Zur Berechnung von Wachstumsraten in diskreter Zeit

1. Bestandsgrößen, Stromgrößen und Zeitrahmen

Im Folgenden soll der *Zeitindex* $t = 0,1,2,\ldots,n$ die zeitliche Reihenfolge der Beobachtungswerte $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ zum Ausdruck bringen. Diese Abfolge der Beobachtungswerte $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ heißt *Zeitreihe*. x_0 ist der *Anfangswert*, x_n der *Endwert* der Zeitreihe.

Handelt es sich bei den Beobachtungswerten um *Bestandsgrößen*, so ist der Zeitindex t als aufeinander folgende Reihe *äquidistanter Zeitpunkte* zu interpretieren. x_t ist dann der Wert der Bestandsgröße zum Zeitpunkt t, also z. B. die Einwohnerzahl Deutschlands am 1.1.2001. Der zeitliche Abstand zwischen zwei benachbarten Zeitpunkten in dieser Reihe ist dabei immer derselbe, nämlich *eine Periode*. Um empirisch gehaltvolle Aussagen zu erhalten, muss klar sein, wieviele Kalenderzeiteinheiten diese Einheitsperiode umfasst, z. B. ein Jahr, einen Monat, ein Jahrzehnt, eine Minute, ... Ebenso klar muss sein, welchem Kalenderdatum der Zeitpunkt $t = 0$ zuzuordnen ist.

Handelt es sich bei den Beobachtungswerten dagegen um *Stromgrößen*, so ist der Zeitindex t als aufeinander folgende Reihe von *Zeitperioden einheitlicher Dauer* zu interpretieren. In diesem Fall bezeichnet x_t den während der Dauer der Periode t kumulierten Wert der betrachteten Stromgröße, z. B. das Bruttoinlandsprodukt im zweiten Quartal 2001. Für empirisch gehaltvolle Aussagen muss auch hier klar sein, wieviele Kalenderzeiteinheiten die Einheitsperiode umfasst und welche Kalenderzeitspanne als Periode $t = 0$ gemeint ist.

Unabhängig davon, ob es sich bei den Beobachtungswerten um Bestands- oder Stromgrößen handelt, gilt: Zwischen dem Anfangswert der Zeitreihe x_0 und dem Endwert x_n sind genau n Perioden gleicher Länge vergangen. Je nachdem, welche Periodenlänge vereinbart wurde, können das n Jahre, n Monate, n Jahrzehnte, n Minuten ... sein.

2. Wachstumsrate und Wachstumsfaktor

Eine **Wachstumsrate je Zeiteinheit** p_t ist definiert als die *relative Änderung* eines Zeitreihenwertes x_t im Vergleich zu seinem Vorgängerwert x_{t-1}, also

$$(1) \qquad p_t = \frac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}} \qquad \Leftrightarrow \qquad p_t = \frac{x_t}{x_{t-1}} - 1 .$$

Die Zeitreihe $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ umfasst $n+1$ Beobachtungswerte. Somit lassen sich daraus n Wachstumsraten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ berechnen.

Als **Wachstumsfaktor je Zeiteinheit** q_t bezeichnet man denjenigen Faktor, mit dem man den früheren *x*-Wert multiplizieren muss, um den späteren *x*-Wert zu erhalten, also

$$x_{t-1} \cdot q_t = x_t$$

Somit lautet also die Definition für den Wachstumsfaktor:

(2) $$q_t = \frac{x_t}{x_{t-1}}$$

Bei $n+1$ Beobachtungswerten gibt es n Wachstumsfaktoren. Wachstumsfaktor und Wachstumsrate stehen in einem eindeutigen Zusammenhang. **Es gilt immer**:

(3) $$\begin{aligned} p_t &= q_t - 1 \\ q_t &= 1 + p_t \end{aligned}$$

In der Praxis werden Wachstumsraten häufig anschaulichkeitshalber in Prozent angegeben, was bedeutet, dass man p_t mit 100 multipliziert ($p_t\% = p_t \cdot 100$). Dann gilt:

(3') $$\begin{aligned} \frac{p_t\%}{100} &= q_t - 1 \\ q_t &= 1 + \frac{p_t\%}{100} \end{aligned}$$

Die Angabe einer Wachstumsrate (oder eines Wachstumsfaktors) macht allerdings erst einen Sinn, wenn zugleich der Zeitrahmen genannt wird, auf den sie sich bezieht. Ohne Kenntnis der Dauer der Einheitsperiode, ohne also zu wissen, wieviel Zeit zwischen den Werten x_{t-1} und x_t vergangen ist, fehlt eine entscheidende Information. Wachstumsraten sind daher immer *Wachstumsraten je Zeiteinheit*, also z. B. Wachstumsraten pro Jahr, pro Monat oder pro Jahrzehnt.

Meistens wird dieser Zeitrahmen auf ein Jahr normiert, man spricht dann von einer Wachstumsrate pro Jahr oder *jährlichen Wachstumsrate*. Wenn nichts anderes gesagt wird, sind immer jährliche Wachstumsraten gemeint.

3. Wachstumsrate über mehrere Perioden

Über einen Zeitraum von *n* Perioden läßt sich die Gesamtwachstumsrate p_{0n} bei gegebenem Anfangswert x_0 und gegebenem Endwert x_n berechnen zu:

(4) $$p_{0n} = \frac{x_n}{x_0} - 1.$$

Da die Zeitreihe sich bei Rückgriff auf die *n* Wachstumsraten pro Periode p_t wie folgt entwickelt,

(5) $$\begin{aligned} x_1 &= (1+p_1)\cdot x_0 \\ x_2 &= (1+p_2)\cdot x_1 = (1+p_1)\cdot(1+p_2)\cdot x_0 \\ x_3 &= (1+p_3)\cdot x_2 = (1+p_1)\cdot(1+p_2)\cdot(1+p_3)\cdot x_0 \\ &\vdots \\ x_n &= (1+p_1)\cdot(1+p_2)\cdot\dots\cdot(1+p_n)\cdot x_0 \end{aligned}$$

lässt sich die Gesamtwachstumsrate p_{0n} statt wie in Gleichung (4) auch aus den *n* verschiedenen Wachstumsraten p_t berechnen:

(6) $$p_{0n} = (1+p_1)\cdot(1+p_2)\cdot\dots\cdot(1+p_n) - 1 \quad \Leftrightarrow \quad p_{0n} = \left[\prod_{t=1}^{n}(1+p_t)\right] - 1$$

Man kann also eine Wachstumsrate für n Perioden berechnen, indem man das Produkt aus allen Wachstumsfaktoren $q_t = 1 + p_t$ bildet und davon Eins subtrahiert.

4. Konstante Wachstumsrate

Sind alle n Wachstumsraten konstant, $p_t = \overline{p}$, dann entwickelt sich die Zeitreihe wie folgt:

(7)
$$\begin{aligned} x_1 &= (1+\overline{p})\cdot x_0 \\ x_2 &= (1+\overline{p})\cdot x_1 = (1+\overline{p})^2 \cdot x_0 \\ x_3 &= (1+\overline{p})^3 \cdot x_0 \\ &\vdots \\ x_n &= (1+\overline{p})^n \cdot x_0 \end{aligned}$$

Für diesen Fall erhält man folglich die Gesamtwachstumsrate als:

(8)
$$p_{0n} = (1+\overline{p})^n - 1$$

Die Wachstumsrate über n Perioden ist also **nicht** die Summe der n einperiodigen Wachstumsraten! Sondern sie ist das Produkt der n einperiodigen Wachstums*faktoren*, abzüglich Eins.

Wächst z. B. eine Größe, ausgehend von einem Anfangswert von 100, um konstant 10% pro Jahr, dann ist sie nach zwei Jahren nicht um 20%, sondern um 21% gestiegen. Im ersten Jahr steigt sie um 10 auf 110 ($110 = 100 \cdot 1{,}1$), im zweiten Jahr um 10% von 110, also um 11, auf 121 ($121 = 100 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}1$). In zwei Jahren ist sie somit um 21% gestiegen ($0{,}21 = 1{,}1^2 - 1$). Oder ein Monatszinssatz von 1% entspricht nicht etwa einer jährlichen Verzinsung von 12%, sondern ergibt einen Jahreszins von 12,68% ($0{,}1268 = 1{,}01^{12} - 1$).

5. Durchschnittliche Wachstumsrate

Die Überlegungen des vorangegangenen Abschnitts bestimmen im Umkehrschluss die Definition der *durchschnittlichen Wachstumsrate pro Periode*. Angenommen, eine Größe hat sich nach n Perioden vom Anfangswert x_0 auf den Endwert x_n entwickelt. Dann ist sie wegen Gleichung (7) im Durchschnitt pro Periode offenbar um

(9)
$$\overline{p} = \sqrt[n]{\frac{x_n}{x_0}} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{p} = \left(\frac{x_n}{x_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

gewachsen. Unter der durchschnittlichen Wachstumsrate versteht man also diejenige konstante einperiodige Wachstumsrate, welche ausgehend von einem gegebenen Anfangswert x_0 nach n Perioden zu dem gegebenen Endwert x_n führt.

Die durchschnittliche Wachstumsrate lässt sich auch aus n gegebenen einperiodigen Wachstumsraten ermitteln. Dazu muss nur auf Gleichung (5) zurückgegriffen werden und man erhält:

(10)
$$\overline{p} = \sqrt[n]{(1+p_1)\cdot(1+p_2)\cdots(1+p_n)} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{p} = \left[\prod_{t=1}^{n}(1+p_t)\right]^{\frac{1}{n}} - 1$$

Demnach ist die durchschnittliche Wachstumsrate das *geometrische Mittel der Wachstumsfaktoren* abzüglich Eins.

Beispiel:

Gegeben sei folgende Zeitreihe:

t	0	1	2	3
x	100	110	100	105

Daraus ergeben sich die folgenden Wachstumsraten je Periode (Angaben in Prozent):

t	0	1	2	3
p%	X	10,00%	-9,09%	5,00%

Die durchschnittliche Wachstumsrate je Periode beträgt mithin 1,64% und läßt sich entweder mit Hilfe von Anfangs- und Endwert der Zeitreihe, also gemäß Gleichung (9), oder mit Hilfe der einzelnen Wachstumsraten, also gemäß Gleichung (10), berechnen:

Gleichung (9) $\Rightarrow$ $$\overline{p} = \left(\frac{105}{100}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 = 0{,}016396$$

Gleichung (10) $\Rightarrow$ $\overline{p} = \left[(1+0{,}1)\cdot(1-0{,}\overline{09})\cdot(1+0{,}05)\right]^{\frac{1}{3}} - 1 = \left(1{,}1\cdot 0{,}\overline{90}\cdot 1{,}05\right)^{\frac{1}{3}} - 1 = 0{,}16396$

Aufgabe 9

Gegeben sind die folgenden 4 wirtschaftsstatistischen "Kennzahlen": Sexualproportion, Elastizität, gesamtwirtschaftliche Arbeitsproduktivität und Inflationsrate in %. Wie lauten die Definitionen dieser "Kennzahlen"? Ordnen Sie den 4 "Kennzahlen" jeweils eine der folgenden 3 Größen zu: G (Gliederungszahl), B_2 (Beziehungszahl mit 2 "Dimensionen") oder B_0 ("dimensionslose" Beziehungszahl).

Nehmen Sie Stellung zu den folgenden Behauptungen (richtig/falsch, mit stichwortartiger Begründung).

a) Für das Jahr 1990 veröffentlichte das StatBA einen Indexstand von 222,6 zum Preisindex für die Lebenshaltung der mittleren Verbrauchsgruppe in Griechenland (Basis 1985=100). Die Inflationsraten 1989/90 lauteten 20,39% bzw. 18,56 ln%. Behauptung: für das Jahr 1989 erhält man damit einen Indexstand von 184,9.

b) Gegeben sind zwei Zeitreihenwerte x_t und x_{t-1}. Behauptung: Im Falle des "Nullwachstums" sind der Wachstumsfaktor und die Wachstumsrate in % jeweils gleich 0.

c) Behauptung: In der Bundesstatistik besteht eine Verpflichtung zur Geheimhaltung von Einzelangaben ("Statistikgeheimnis") nur dann, wenn für die jeweilige Erhebung eine Auskunftspflicht angeordnet wurde.

Lösung ZP H 95, Aufgabe 9b):

Definition Wachstumsrate, Gleichung (1): $p_t = \dfrac{x_t - x_{t-1}}{x_{t-1}}$

Definition Wachstumsfaktor, Gleichung (2): $q_t = \dfrac{x_t}{x_{t-1}}$

Nullwachstum bedeutet: $x_t = x_{t-1}$

Also ist bei Nullwachstum die Wachstumsrate $p_t = 0$, aber der Wachstumsfaktor $q_t = 1$, d. h. die Behauptung ist falsch.

Aufgabe 10

Gegeben sind die folgenden Daten zur Anzahl der Privathaushalte in Deutschland (Quelle: Statistisches Bundesamt, Statistisches Jahrbuch 1999, Tabelle 2.1):

Zeitpunkt	**Anzahl der Privathaushalte in Deutschland**	
	Einpersonenhaushalte	Mehrpersonenhaushalte
	in 1.000	
April 1993	12.379	23.851
April 1995	12.891	24.047
April 1997	13.259	24.198

a) Um wieviel Prozent ist die Zahl der Einpersonenhaushalte im Zeitraum April 1993 bis April 1997 insgesamt und im Jahresdurchschnitt gestiegen?

b) Ermitteln Sie zur Beurteilung der Entwicklung der Anzahl von Ein- und Mehrpersonenhaushalten die jahresdurchschnittlichen Elastizitäten für die Zeiträume 1993-95 und 1995-97.

c) Iinterpretieren Sie die in Teilaufgabe b) gewonnenen Zahlenwerte.

Lösung ZP F 00, 10a):

Anstieg insgesamt: Verwendung von Gleichung (4):

$$p_{0n} = \frac{x_n}{x_0} - 1 = \frac{13259}{12379} - 1 = 0{,}071088$$

Demnach Anstieg um rund 7,11 %.

Jahresdurchschnittliche Wachstumsrate: Verwendung von Gleichung (9):

$$\overline{p} = \left(\frac{x_n}{x_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(\frac{13259}{12379}\right)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0{,}017317$$

Also pro Jahr ein durchschnittliches Wachstum um rund 1,73 %.

Hinweis: Es ist nach der *jahresdurchschnittlichen* Wachstumsrate gefragt. Das ist die durchschnittliche Wachstumsrate *pro Jahr*. Wir haben hier einen Zeitraum von April 1993 bis April 1997. Das sind vier Jahre. Deshalb ist in der Formel mit n = 4 zu rechnen.

Aufgabe 11

Für die Entwicklung der Wachstumsraten des realen Bruttoinlandsprodukts in Deutschland liegen die folgenden Daten vor (Quelle: Wirtschaft und Statistik 1/2001, S. 12.):

Bruttoinlandsprodukt in Preisen von 1995

Veränderung im Vergleich zum Vorjahr in Prozent

1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
+ 2,2	- 1,1	+ 2,3	+ 1,7	+ 0,8	+ 1,4	+ 2,1	+ 1,6	+ 3,1

a) Um wieviel Prozent ist das reale Bruttoinlandsprodukt im Zeitraum 1991 bis 2000 insgesamt gestiegen?

b) Im Jahr 2000 war die Wachstumsrate nahezu doppelt so hoch wie im Jahresdurchschnitt des Zeitraums 1991-2000. Trifft diese Behauptung zu?

c) Erläutern Sie den Vorgang der Preisbereinigung, indem Sie auf den Unterschied zwischen dem Bruttoinlandsprodukt in laufenden Preisen und dem Bruttoinlandsprodukt in Preisen eines Basisjahres eingehen.

d) Welche zusätzlichen Informationen wären erforderlich, damit man von den Zahlen in der Tabelle auf die Wachstumsraten des nominalen Bruttoinlandsprodukts schließen kann?

Lösung ZP H 01, 11a),b):

11a): Zur Berechnung der Gesamtwachstumsrate ist Gleichung (6) zu verwenden:

$$p_{0n} = (1+p_1)\cdot(1+p_2)\cdot\dots\cdot(1+p_n) - 1$$

Zweckmäßigerweise berechnet man zunächst die Wachstumsfaktoren:

Jahr	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
p%	+ 2,2	- 1,1	+ 2,3	+ 1,7	+ 0,8	+ 1,4	+ 2,1	+ 1,6	+ 3,1
q	**1,022**	**0,989**	**1,023**	**1,017**	**1,008**	**1,014**	**1,021**	**1,016**	**1,031**

Dann wird die Formel benutzt:

$$p_{09} = 1{,}022 \cdot 0{,}989 \cdot 1{,}023 \cdot 1{,}017 \cdot 1{,}008 \cdot 1{,}014 \cdot 1{,}021 \cdot 1{,}016 \cdot 1{,}031 - 1 = 0{,}14953018$$

Die neunjährliche Wachstumsrate beträgt also rund 14,95 %.

11b) Hier muss die jahresdurchschnittliche Wachstumsrate berechnet werden. Das geht mit Gleichung (10). Am besten greift man jetzt auf den in Aufgabe 11a) schon berechneten Gesamtwachstumsfaktor 1,14953018 zurück:

$$\overline{p} = 1{,}14953018^{\frac{1}{9}} - 1 = 0{,}01560420$$

Das reale Bruttoinlandsprodukt ist durchschnittlich pro Jahr um rund 1,6 % gewachsen, die Behauptung stimmt also ungefähr.