Grundzüge der Spieltheorie

Prof. Dr. Stefan Winter
Ruhr-Universität Bochum

Begleitmaterialien zur Vorlesung sind abrufbar unter:
http://www.rub.de/spieltheorie

© Prof. Dr. Stefan Winter

Die folgende Vorlesungsaufzeichnung und das hier vorliegende Skript beruhen auf dem Buch:
„Grundzüge der Spieltheorie“
von **Stefan Winter**,
Springer Gabler,
Erschienen im Dezember 2014

8. Spiele mit fehlerhaften Strategien

© Prof. Dr. Stefan Winter

Bisheriges Gleichgewichtkonzept:

Alle Spieler treffen bewusste Entscheidungen, die darauf abzielen, ihre Auszahlungen zu maximieren. Sie machen dabei keine Fehler.

Frage in diesem Kapitel:

Wie sollten Spieler ihre optimalen Strategien wählen, wenn ihre Mitspieler eventuell Fehler bei der Wahl ihrer eigenen Strategien machen?

© Prof. Dr. Stefan Winter

Einführendes Beispiel:

		Uli	
		links	rechts
Iris	oben	10 / 10	-990 / 9
	unten	9 / -990	9 / 9

© Prof. Dr. Stefan Winter

Gleichgewichte:

- $\{oben;\ links\}$ → beide Spieler erreichen Auszahlungen von 10
- $\{unten;\ rechts\}$ → beide Spieler reichen Auszahlungen von 9

→ Das zweite Gleichgewicht ist ineffizient. Iris sollte „oben“ und Uli „links“ spielen.

Gefahr:

- Sollte einer der beiden Spieler einen Fehler machen, setzt der andere Spieler sich der Gefahr aus, eine Auszahlung von -990 zu bekommen.
- Spielt Iris „oben“ und Uli „rechts“, hat dieser Fehler für Uli selbst kaum Auswirkungen (seine Auszahlung sinkt von 10 auf 9). Iris Auszahlungen hingegen sinken von 10 auf -990.

© Prof. Dr. Stefan Winter

Lösungsmöglichkeit:

- Iris könnte „unten“ spielen. Dann hat sie eine sichere Auszahlung von 9.
- Gleiches gilt für Uli, der „rechts“ spielen könnte.

Problem:

Wenn der jeweils andere Spieler gar keinen Fehler machen würde, hätten die Spieler vergeblich auf die Auszahlung in Höhe von 10 verzichtet und sich mit 9 begnügt.

Folgerung:

Eine eindeutige Lösung lässt sich nicht festlegen. Es ist jedoch möglich, die wichtigsten Einflussgrößen auf die Strategiewahl der Spieler zu bestimmen.

© Prof. Dr. Stefan Winter

Einflussgröße Fehlerwahrscheinlichkeit w

		Uli	
		links (1-*w*)	rechts *w*
Iris	oben	10 10	-990 9
	unten	9 -990	9 9

© Prof. Dr. Stefan Winter

Erwartete Auszahlungen:

- Wenn Iris „oben“ spielt, dann erzielt sie eine erwartete Auszahlung von:

$$E(A_{oben}) = (1 - w) \cdot 10 + w \cdot (-990) = 10 - 1000w$$

- Spielt sie „unten“, dann erhält sie eine erwartete Auszahlung von:

$$E(A_{unten}) = (1 - w) \cdot 9 + w \cdot 9 = 9$$

Berechnung der kritischen Fehlerwahrscheinlichkeit w

- Iris sollte bei der Strategie „oben“ bleiben, solange ihre erwartete Auszahlung mindestens so hoch ist wie ihre erwartete Auszahlung für „unten“. Es muss gelten:

$$10 - 1000w \geq 9$$

$$\Leftrightarrow w \leq 1/1000$$

- Solange Iris bei Uli mit einer Fehlerwahrscheinlich von 1/1000 oder weniger rechnet, sollte sie bei der Strategie „oben“ bleiben.

Kritik:

Selbst wenn man annimmt, der Mitspieler könnte einen Fehler machen, weiß man in der Regel trotzdem nicht, wie hoch die Wahrscheinlichkeit eines solchen Fehlers ist.
Die Berechnung der kritischen Werte ist also möglich, es gibt aber keinen objektiven Maßstab mit dem diese verglichen werden können.

© Prof. Dr. Stefan Winter

Einflussgröße Schadenshöhe

		Uli	
		links (1-*w*)	rechts *w*
Iris	oben	10 10	0 9
	unten	9 0	9 9

Anmerkung:

Die Änderung der Auszahlungen von je -990 auf 0 ändert nichts an den Gleichgewichten des Spiels.

© Prof. Dr. Stefan Winter

Erwartete Auszahlungen:

- Wenn Iris „oben“ spielt, dann erzielt sie eine erwartete Auszahlung von:

$$E(A_{oben}) = (1-w) \cdot 10 + w \cdot 0 = 10 - 10w$$

- Spielt sie „unten“, dann erhält sie eine erwartete Auszahlung von:

$$E(A_{unten}) = (1-w) \cdot 9 + w \cdot 9 = 9$$

Berechnung der Fehlerwahrscheinlichkeit w

- Iris sollte bei der Strategie „oben“ bleiben, solange ihre erwartete Auszahlung mindestens so hoch ist wie ihre erwartete Auszahlung für „unten“. Es muss gelten:

$$10 - 10w \geq 9$$

$$\Leftrightarrow w \leq 1/10$$

- Solange Iris bei Uli mit einer Fehlerwahrscheinlich kein von 1/10 oder weniger rechnet, sollte sie bei der Strategie „oben“ bleiben.

© Prof. Dr. Stefan Winter

Beobachtung:

Durch die Änderung der Auszahlungen, könnte Iris auch mit höheren Fehlerwahrscheinlichkeiten als 1/1000 leben, solange diese den Wert 1/10 nicht überschreitet.

Fazit:

Bei der Berücksichtigung möglicher Fehler spielen sowohl die *Fehlerwahrscheinlichkeiten* also auch die *Schadenshöhe* eine Rolle.

© Prof. Dr. Stefan Winter

Trembling-Hand Perfektion

Beispiel Weltvernichtungsmaschine:

- Entscheidungen über einen Angriff und den Bau einer Weltvernichtungs-maschine werden simultan getroffen.

© Prof. Dr. Stefan Winter

Weltvernichtungsspiel in Matrixform

		UDSSR	
		Automatische Bombe	Nichtautomatische Bombe
USA	Kein Angriff	1 / 1	1 / 1
USA	Angriff	-1 / -1	2 / 0

Gleichgewichte:

$\{Kein\ Angriff;\ Automatische\ Bombe\}$

$\{Angriff;\ Nichtautomatische\ Bombe\}$

Frage:

Sind die zu den Gleichgewichten gehörenden Gleichgewichtsstrategien auch dann noch gute Strategien, wenn der jeweilige Gegenspieler evtl. einen Fehler macht?

Anmerkung:

- Berücksichtigung von Fehlern erfolgt durch die Annahme, dass der Gegner nicht seine beste Antwort spielt, sondern eine gemischte Strategie.
- w bezeichnet wieder die Fehlerwahrscheinlichkeit
- Im Gegensatz zu zuvor betrachteten gemischten Strategien, werden die Wahrscheinlichkeiten nicht bewusst zur Gewinnmaximierung gewählt, sondern entstehen durch Fehler.

Weltvernichtungsspiel mit Fehlerwahrscheinlichkeit w aus Sicht der USA

		UDSSR	
		Automatische Bombe (1-*w*)	Nichtautomatische Bombe *w*
USA	Kein Angriff	1	1
	Angriff	-1	2

© Prof. Dr. Stefan Winter

Erwartete Auszahlungen der USA:

$$E\left(A_{Kein\ Angriff}\right) = (1-w) \cdot 1 + w \cdot 1 = 1$$

$$E\left(A_{Angriff}\right) = (1-w) \cdot (-1) + w \cdot 2 = 3w - 1$$

Berechnung der Fehlerwahrscheinlichkeit w:

Die Strategie „Kein Angriff“ ist eine Gleichgewichtsstrategie, solange die erwartete Auszahlung für „Kein Angriff“ mindestens genauso hoch ist wie die erwartete Auszahlung für „Angriff“. Dies ist dann der Fall, wenn gilt:

$$E\left(A_{Kein\ Angriff}\right) \geq E\left(A_{Angriff}\right)$$

$$1 \geq 3w - 1$$

$$\Leftrightarrow w \leq 2/3$$

Solange die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler der UdSSR geringer als 2/3 ist, bleibt die Strategie „Kein Angriff“ beste Antwort auf die Strategie „Automatische Bombe“.

© Prof. Dr. Stefan Winter

Begriff „Trembling-Hand perfekte Strategie“

Eine Strategie heißt „Trembling-Hand perfekt“, wenn sie bei einer geringen Fehlerwahrscheinlichkeit des Gegners immer noch eine beste Antwort bleibt.

Begriff „Trembling-Hand perfektes Gleichgewicht“

Ein Gleichgewicht wird als „Trembling-Hand perfektes Gleichgewicht“ bezeichnet, wenn die Strategien aller Spieler in der Strategiekombination des Gleichgewichts Trembling-Hand perfekte Strategien sind.

Erläuterung „Trembling-Hand“

Der Begriff „Trembling-Hand“, wörtlich übersetzt: „Zitternde Hand“, spielt darauf an, dass die Spieler bei der Auswahl ihrer Strategien einen ihrer Spielpläne mit einer zitternden Hand auswählen, also die falsche Strategie erwischen könnten.

© Prof. Dr. Stefan Winter

Begriff „ Trembling-Hand Perfektion“

- Trembling-Hand Perfektion ist ebenso wie Teilspielperfektion eine weitere Verfeinerung von Gleichgewichtskonzepten. Solche Verfeinerungen dienen zur Bestimmung der „besseren“ Gleichgewichte, wenn man mehrere zur Auswahl hat.
- Trembling-Hand Perfektion verlangt von einem Gleichgewicht, dass die Strategien der Spieler auch dann noch gute Strategien sein sollen, wenn der Gegner mit einer gewissen, geringen Wahrscheinlichkeit einen Fehler macht und nicht seine beste Antwort spielt.

© Prof. Dr. Stefan Winter

Folgerung:

- Eine genaue Definition einer „geringen Fehlerwahrscheinlichkeit ist nicht eindeutig bestimmbar. Man kann aber sagen, dass eine Strategie, die erst bei einer Fehlerwahrscheinlichkeit von 2/3 keine beste Antwort mehr wäre, Trembling-Hand perfekt ist.
- Die oben analysierte Strategie der USA, keinen Angriff auszuführen, lässt sich als Trembling-Hand perfekte Strategie kennzeichnen.

© Prof. Dr. Stefan Winter

Weltvernichtungsspiel mit Fehlerwahrscheinlichkeit w aus Sicht der UdSSR

		UDSSR	
		Automatische Bombe	Nichtautomatische Bombe
USA	Kein Angriff (1-*w*)	1	1
	Angriff *w*	-1	0

© Prof. Dr. Stefan Winter

Erwartete Auszahlungen der UdSSR:

$$E(A_{Automatische\ Bombe}) = (1-w)\cdot 1 + w\cdot(-1) = 1-2w$$

$$E(A_{Nichtauotmatische\ Bombe}) = (1-w)\cdot(-1) + w\cdot 0 = 1-w$$

Berechnung der Fehlerwahrscheinlichkeit w:

Die Strategie „Automatische Bombe“ ist eine Gleichgewichtsstrategie, solange die erwartete Auszahlung für „Automatische Bombe“ mindestens genauso hoch ist wie die erwartete Auszahlung für „Nichtautomatische Bombe“. Dies ist dann der Fall, wenn gilt:

$$E(A_{Automatische\ Bombe}) \geq E(A_{Nichtauotmatische\ Bombe})$$

$$1-2w \geq 1-w$$

$$\Leftrightarrow w \leq 0$$

Als Wahrscheinlichkeit kann w nicht kleiner 0 werden, also muss die Fehlerwahrscheinlichkeit der USA bei Null liegen.

© Prof. Dr. Stefan Winter

Schlussfolgerung:

- Sollte eine Wahrscheinlichkeit dafür bestehen, das die USA einen Fehler macht, ist „automatische Bombe“ keine Gleichgewichtsstrategie mehr.
- Der Bau der automatischen Bombe ist also nicht Trembling-Hand perfekt.

→ Das Gleichgewicht $\{Kein\ Angriff;\ Automatische\ Bombe\}$ ist kein Trembling-Hand perfektes Gleichgewicht.

© Prof. Dr. Stefan Winter

Prüfung des zweiten Gleichgewichts $\{Angriff; Nichtautomatische\ Bombe\}$:

Aus Sicht der USA:

Erwartete Auszahlungen:

$$E\left(A_{Angriff}\right) = w \cdot (-1) + (1 - w) \cdot 2 = 2 - 3w$$

$$E\left(A_{Kein\ Angriff}\right) = w \cdot 1 + (1 - w) \cdot 1 = 1$$

© Prof. Dr. Stefan Winter

Berechnung der Fehlerwahrscheinlichkeit w:

Die Strategie „Angriff“ ist eine Gleichgewichtsstrategie, solange die erwartete Auszahlung für „Angriff“ mindestens genauso hoch ist wie die erwartete Auszahlung für „Kein Angriff“. Dies ist dann der Fall, wenn gilt:

$$E\left(A_{Angriff}\right) \geq E\left(A_{Kein\ Angriff}\right)$$

$$2 - 3w \geq 1$$

$$w \leq 1/3$$

Solange die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler der UdSSR geringer als 1/3 ist, bleibt die Strategie „Angriff“ beste Antwort auf die Strategie „Nichtautomatische Bombe“

→ **Da die Wahrscheinlichkeit mit 1/3 recht hoch ist, kann man sagen, dass die Strategie „Angriff“ Trembling-Hand perfekt ist**

Aus Sicht der UdSSR

Erwartete Auszahlungen:

$$E(A_{Nichtauotmatische\ Bombe}) = (1-w)\cdot 0 + w\cdot 1 = w$$

$$E(A_{Automatische\ Bombe}) = (1-w)\cdot(-1) + w\cdot 1 \ = 2w-1$$

Berechnung der Fehlerwahrscheinlichkeit w:

Bestimmung der Fehlerwahrscheinlichkeit w, bis zu der die Strategie „Nichtautomatische Bombe“ eine beste Antwort bleibt:

$$E(A_{Nichtauotmatische\ Bombe}) \geq E(A_{Automatische\ Bombe})$$

$$w \geq 2w-1$$

$$w \leq 1$$

Fazit:

- Da eine Wahrscheinlichkeit nicht größer als 1 sein kann, ist die Bedingung $w \leq 1$ immer erfüllt.
- Die Strategie „Nichtautomatische Bombe“ ist daher Trembling-Hand perfekt.

→ Das Gleichgewicht $\{Angriff; Nichtautomatische\ Bombe\}$ ist ein Trembling-Hand perfektes Gleichgewicht.

Ergänzung:

Gleichgewichte dominanter Strategien sind immer Trembling-Hand perfekt, denn es ist für einen Spieler mit einer dominanten Strategie irrelevant, was der oder die anderen Spieler tun.
Seine dominante Strategie ist immer die beste Antwort auf alle möglichen Strategien der Mitspieler, auch wenn diese Fehler machen.

© Prof. Dr. Stefan Winter

Nutzungshinweise:

Das hier vorliegende Vorlesungsskript darf ausschließlich im Rahmen gebührenfreier Bildungsangebote ohne weitere Genehmigung genutzt werden. Im Fall von gebührenpflichtigen Bildungsangeboten wenden Sie sich zur Klärung der Nutzungsbedingungen bitte vorab an Prof. Dr. Stefan Winter. Die Weitergabe der hier verwendeten Materialien ist nicht gestattet, alle Unterlagen dienen ausschließlich dem persönlichen Gebrauch. Mit der Nutzung der hier bereitgestellten Materialien erklären Sie sich mit diesen Bedingungen einverstanden.