Grundzüge der Spieltheorie

Prof. Dr. Stefan Winter
Ruhr-Universität Bochum

Begleitmaterialien zur Vorlesung sind abrufbar unter:
http://www.rub.de/spieltheorie

Die folgende Vorlesungsaufzeichnung und das hier vorliegende Skript beruhen auf dem Buch:
„Grundzüge der Spieltheorie“
von **Stefan Winter**,
Springer Gabler,
Erschienen im Dezember 2014

7. Kooperative Spieltheorie

Begriff „bindende Verträge“

Verträge, die sich auf die Wahl von Strategien beziehen. Sie geben den Spielern die Möglichkeit ihre jeweils zu wählenden Strategien direkt zu vereinbaren.

Ziel:

Abweichend zur nicht-kooperativen Spieltheorie, sucht die kooperative Spieltheorie nicht direkt nach den Strategiekombinationen, die vereinbart werden sollten, sondern nach den Auszahlungskombinationen, die abgesprochen werden sollten. Aus diesen werden dann die zu wählenden Strategiekombinationen hergeleitet.

Beispiel:

- Konni und Sven haben sich im Urlaub aus den Augen verloren
- Jeder überlegt nun, wohin er fahren soll

Auszahlungsmatrix:

		Sven	
		Fahre nach Blackall	Fahre nach Charleville
Konni	Fahre nach Blackall	10 / 10	0 / 0
	Fahre nach Charleville	0 / 0	10 / 10

Ergebnis:

- Das Spiel hat zwei Gleichgewichte in reinen Strategien, in denen beide Spieler entweder nach Blackall oder nach Chareleville fahren.
- In den Gleichgewichten erzielen die Spieler jeweils Auszahlungen in Höhe von 10.
- Da das die höchsten Auszahlungen sind, die jeder Spieler überhaupt erreichen kann, würde die kooperative Spieltheorie zu dem Ergebnis kommen, dass sich die Spieler auf die Auszahlungskombination 10/10 einigen sollten.
- Über das Reiseziel und damit auf welche Strategiekombination sie sich einigen sollten, wird dann in der Regel gar nicht mehr diskutiert.

Verhandlungsmengen:

Frage:

Welche Auszahlungskombinationen sind für die Spieler erreichbar?

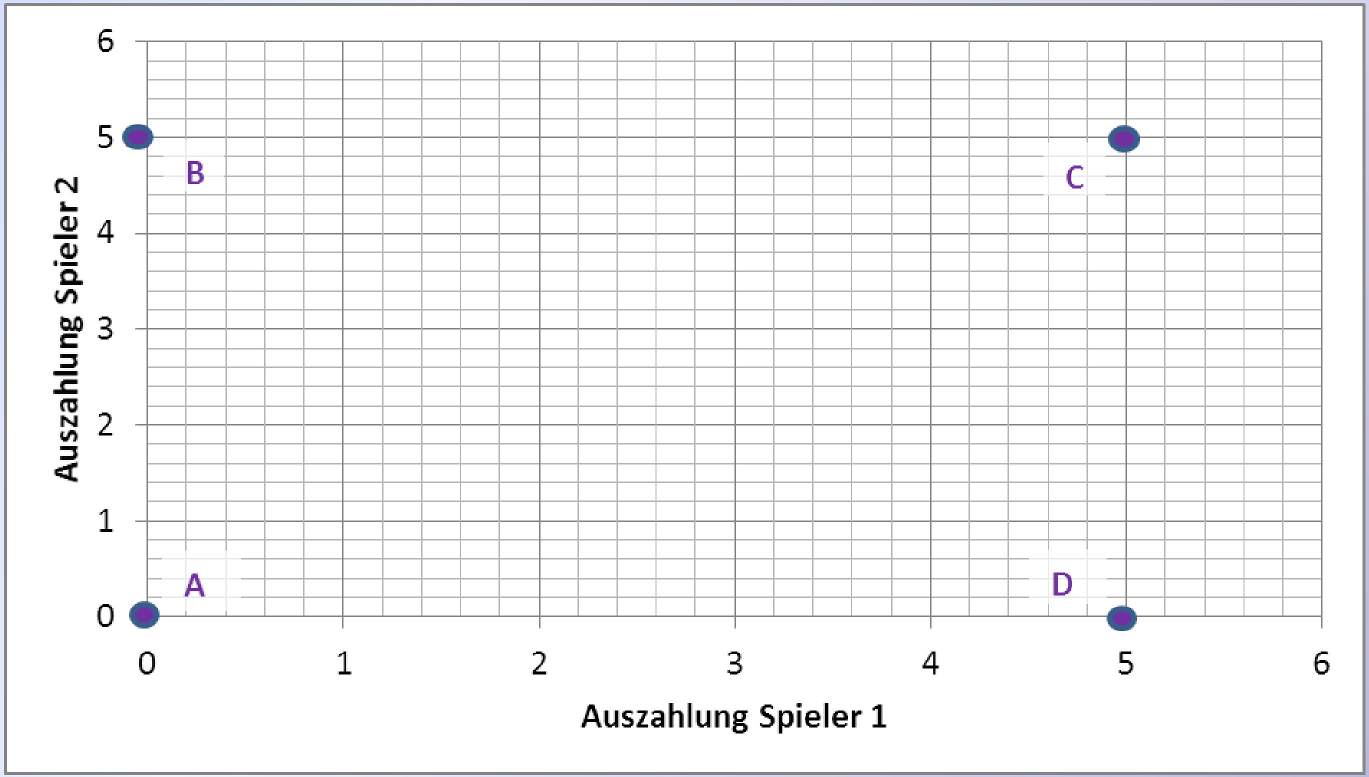
Auszahlungsmatrix:

		Spieler 2	
		links	rechts
Spieler 1	oben	0 0 (A)	5 0 (D)
	unten	0 5 (B)	5 5 (C)

Ergebnis:

Alle vier Strategiekombinationen sind Gleichgewichte, aber nur das Gleichgewicht {*unten; rechts*} (d.h. Punkt C im folgenden Diagramm) ist effizient.

Auszahlungsdiagramm:



Annahme:

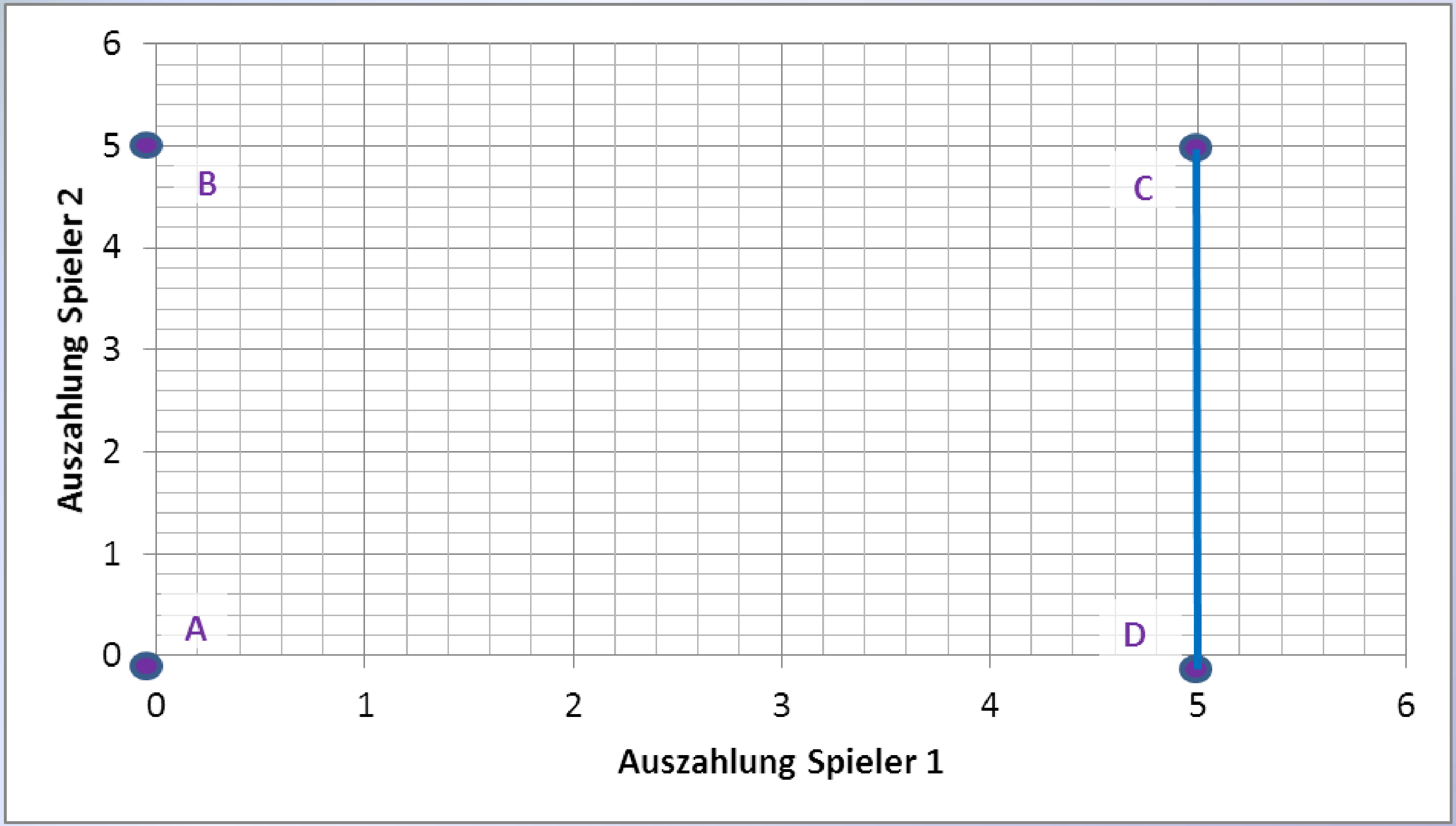
Zusätzlich zu den reinen Strategien werden nun auch die gemischten Strategien betrachtet.

Im Beispiel:

Wenn Spieler 2 „rechts" spielt:

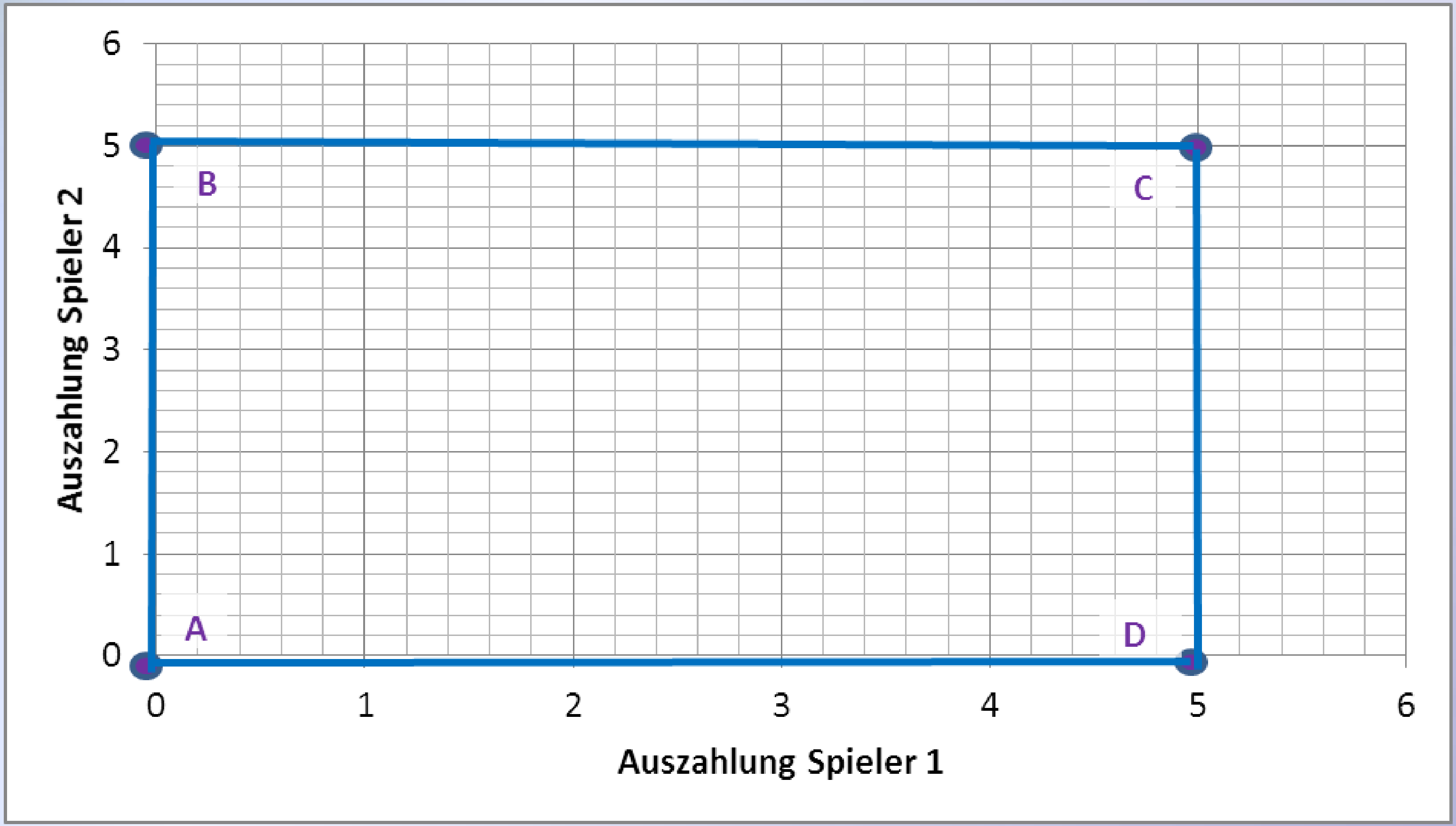
- Spieler 1 erhält immer eine Auszahlung von 5, egal, ob er „unten", „oben" oder eine gemischte Strategie spielt
- Spieler 2 erhält eine Auszahlung von 0, wenn Spieler 1 „oben", eine Auszahlung von 5, wenn Spieler 1 „unten" und eine erwartete Auszahlung zwischen 0 und 5, wenn Spieler 1 eine gemischte Strategie spielt.

Auszahlungsdiagramm, wenn Spieler 2 „rechts“ und Spieler 1 eine gemischte Strategie spielt:

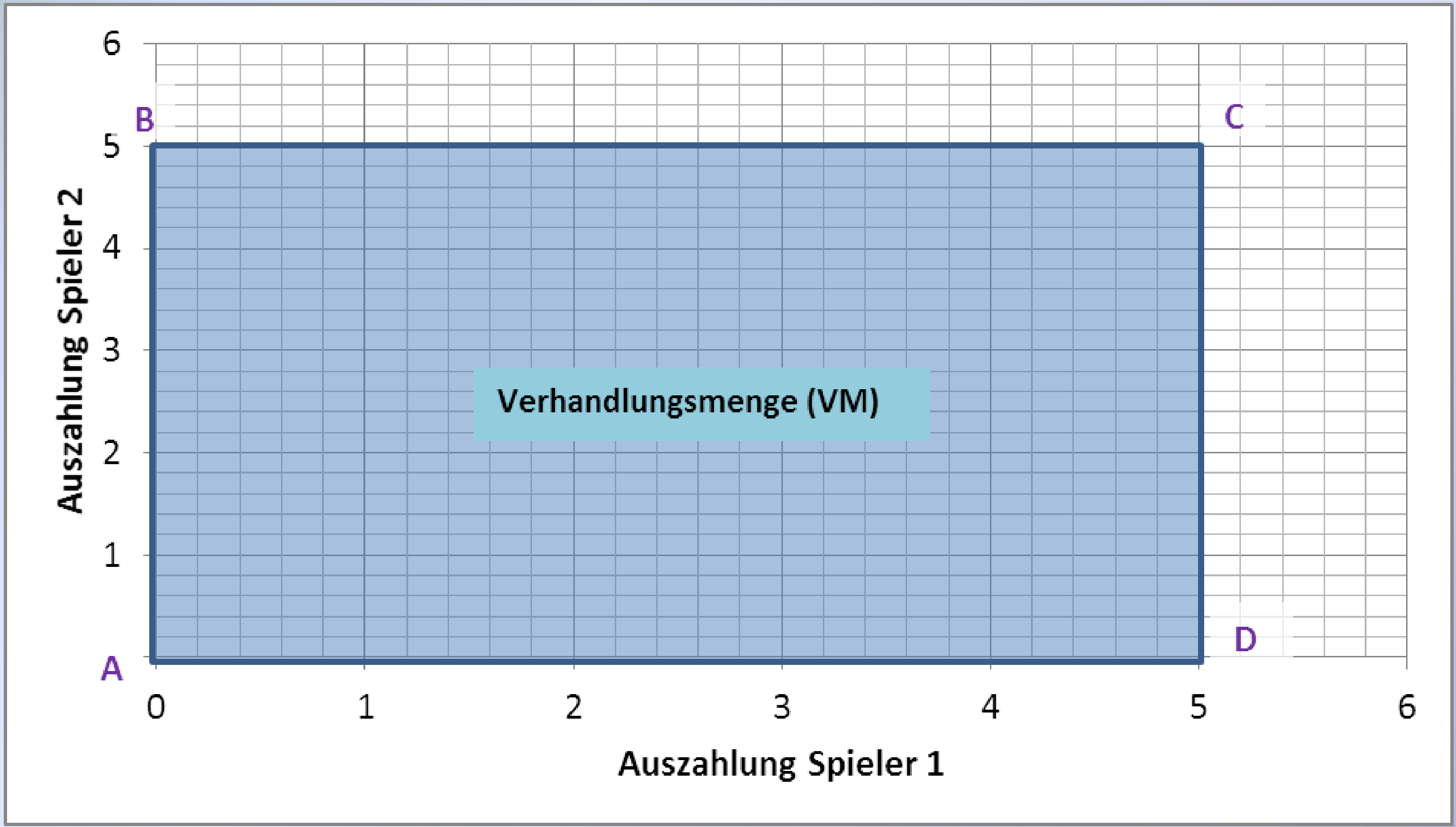


Alle erreichbaren Auszahlungskombinationen liegen auf der blauen Linie.

Auszahlungsdiagramm, wenn einer der Spieler eine reine und der andere Spieler eine gemischte Strategie spielt.



Auszahlungsdiagramm, wenn beide Spieler eine gemischte Strategie spielen:



Begriff: „Verhandlungsmenge" (VM)

Die Gesamtheit aller erreichbaren Auszahlungskombinationen von Spieler 1 und Spieler 2.

Aufbau von Verhandlungsmengen

Annahme:

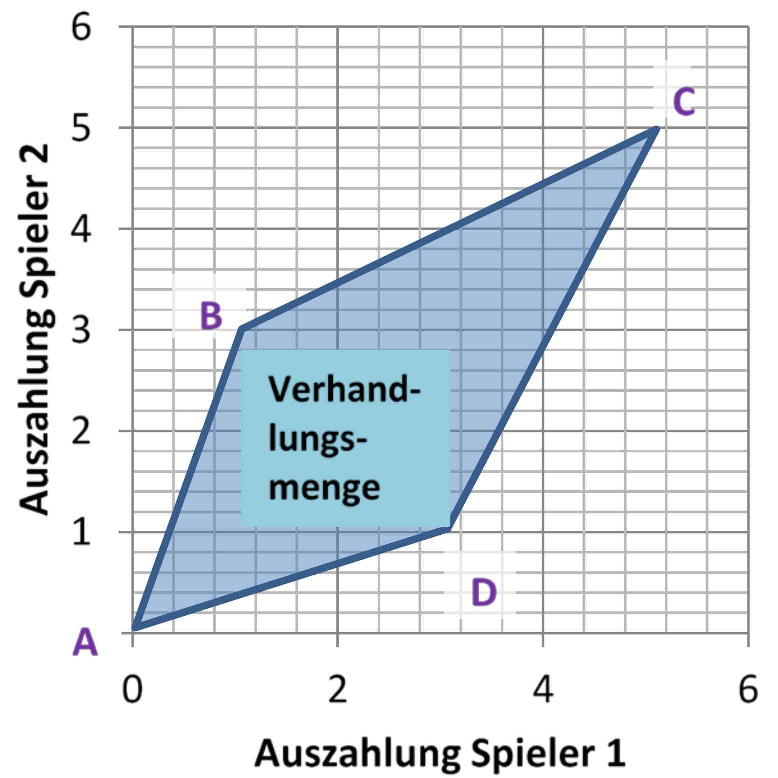
Betrachtet werden Spiele mit zwei Spielern mit jeweils zwei reinen Strategien.

Beobachtung aus vorherigem Spiel:

Jede Strategiekombination reiner Strategien hat zu einer anderen Auszahlungskombination geführt. Insgesamt gab es vier unterschiedliche Auszahlungskombinationen, so dass die Verhandlungsmenge viereckig war. Wenn es vier verschiedene Auszahlungskombinationen gibt, dann ist die Verhandlungsmenge meistens ein Viereck, aber nicht immer.

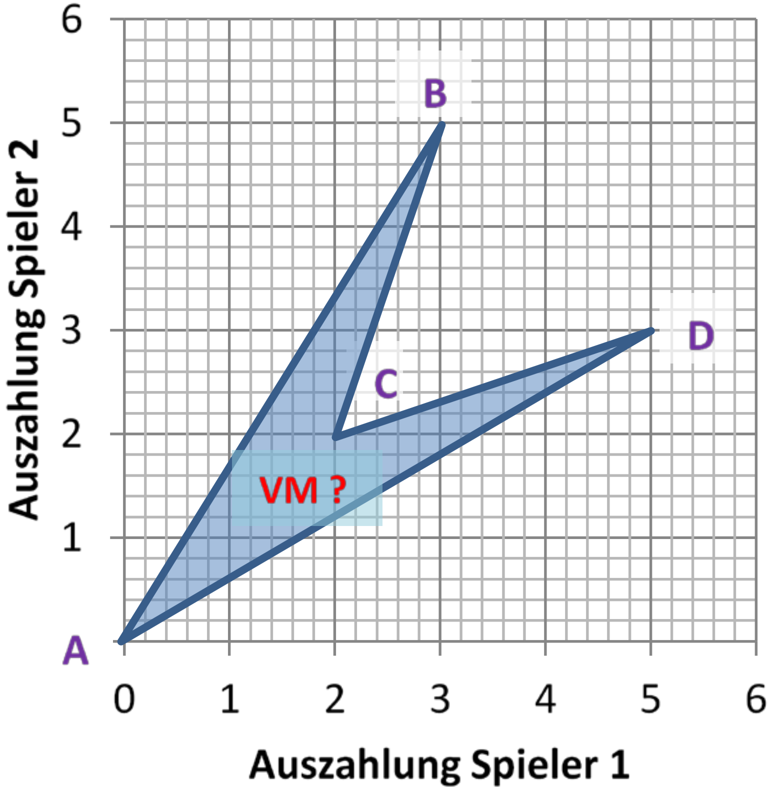
Spiele mit vier-, aber nicht rechteckiger Verhandlungsmenge – Beispiel 1:

		Spieler 2	
		links	rechts
Spieler 1	oben	0 ; 0 (A)	3; 1 (D)
	unten	1 ; 3 (B)	5 ; 5 (C)



Spiele mit vier-, aber nicht rechteckiger Verhandlungsmenge – Beispiel 2:

		Spieler 2	
		links	rechts
Spieler 1	oben	0 ; 0 (A)	5; 3 (D)
	unten	3 ; 5 (B)	2 ; 2 (C)



Beobachtung:

Die Verhandlungsmenge hat ein merkwürdiges Muster.

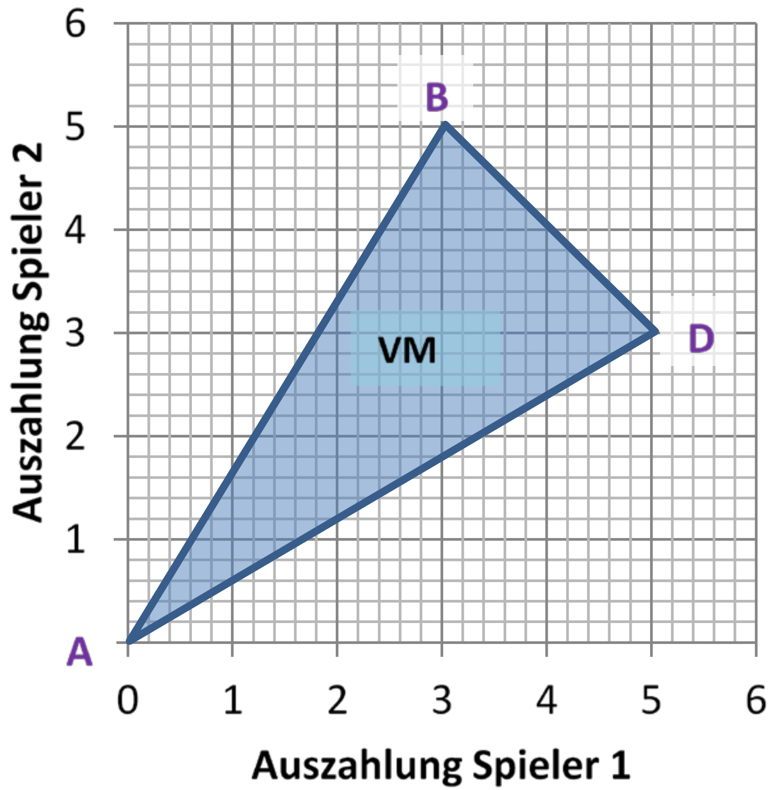
Erklärung:

Es liegt ein absichtlicher Fehler der Darstellung vor. Es ist nicht berücksichtigt worden, dass auch die Punkte auf der Linie zwischen B und D erreicht werden können.

Grund dafür ist:
Wenn zwei erreichbare Auszahlungskombinationen bekannt sind (dargestellt durch Punkte im Auszahlungsdiagramm), dann können mittels geeignet gewählter gemischter Strategien auch alle Punkte erreicht werden, die auf der Verbindungslinie zwischen den beiden bekannten Punkten liegen.

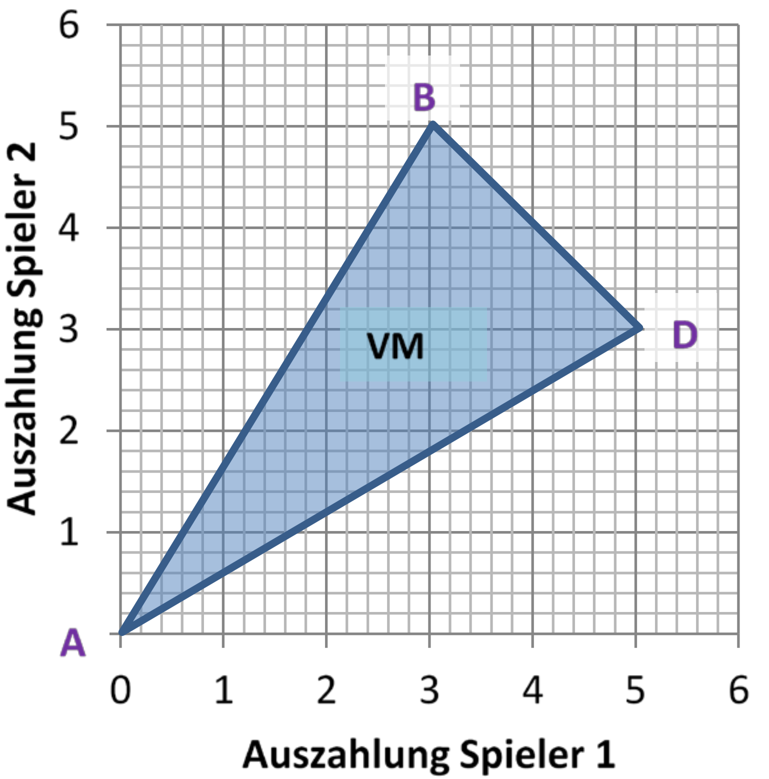
Beispiel 2 - Mit korrekt dargestellter Verhandlungsmenge:

		Spieler 2	
		links	rechts
Spieler 1	oben	0 ; 0 (A)	5; 3 (D)
	unten	3 ; 5 (B)	2 ; 2 (C)



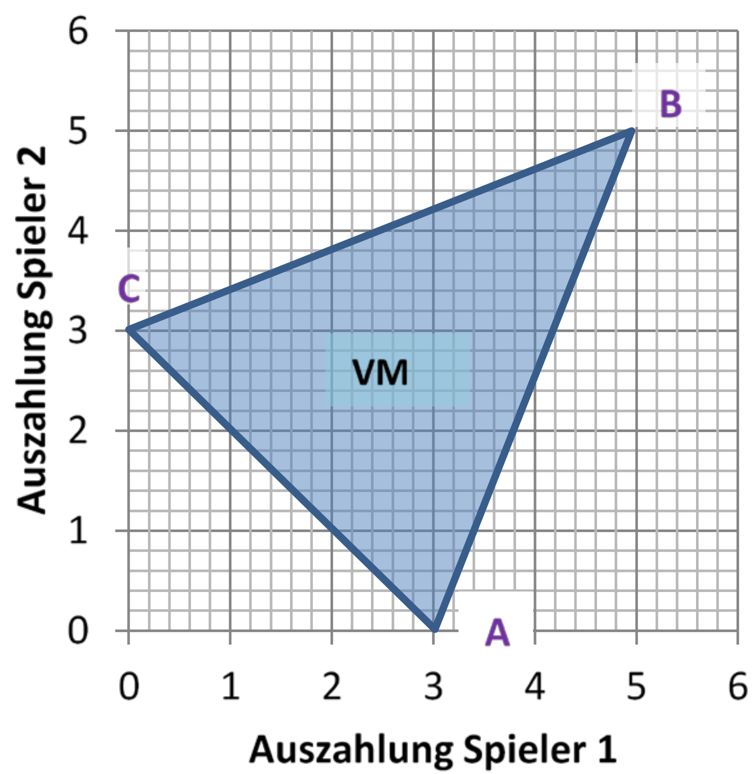
Spiele mit drei unterschiedlichen Auszahlungskombinationen – Beispiel 1:

		Spieler 2	
		links	rechts
Spieler 1	oben	0 ; 0 (A)	5; 3 (D)
	unten	3 ; 5 (B)	3 ; 5 (B)



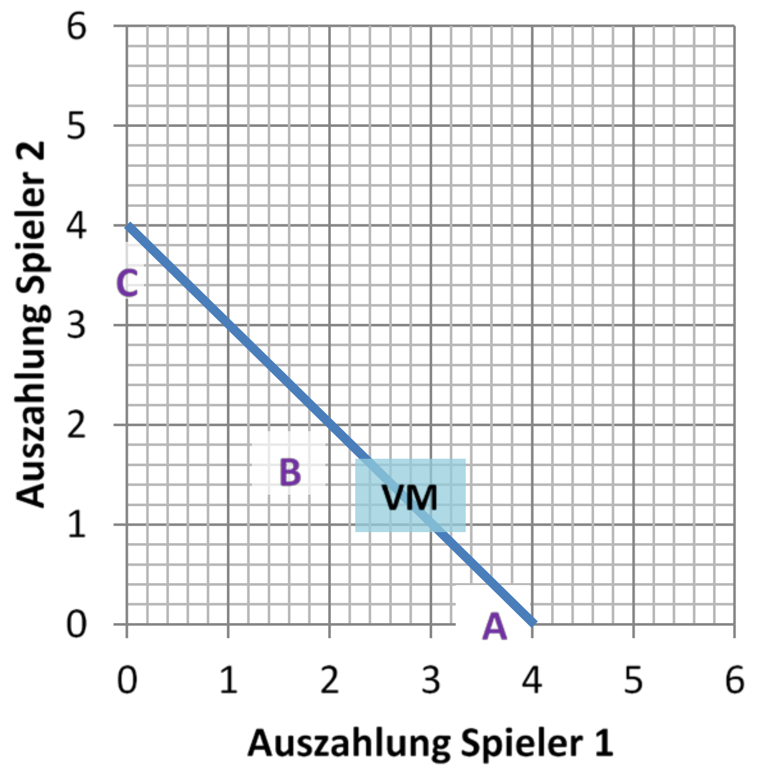
Spiele mit drei unterschiedlichen Auszahlungskombinationen – Beispiel 2:

		Spieler 2	
		links	rechts
Spieler 1	oben	3 ; 0 (A)	5; 5 (B)
	unten	5 ; 5 (B)	0 ; 3 (C)



Spiele mit drei unterschiedlichen Auszahlungskombinationen – Beispiel 3:

		Spieler 2	
		links	rechts
Spieler 1	oben	4 ; 0 (A)	2; 2 (B)
	unten	2 ; 2 (B)	0 ; 4 (C)

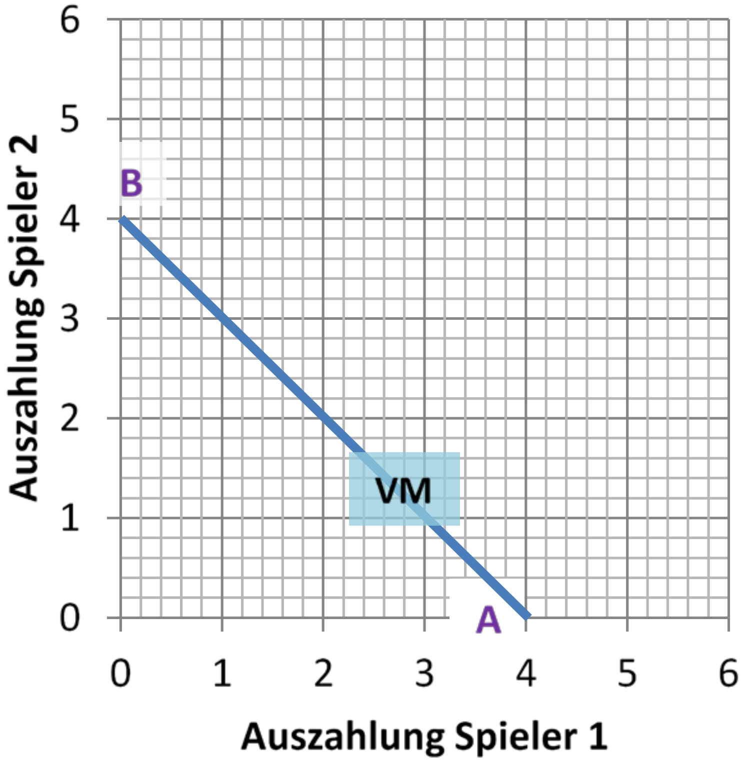


Beobachtungen:

Auch bei drei unterschiedlichen Auszahlungskombinationen kann die Zahl der Ecken geringer sein.
Es ist also auch möglich, dass die Verhandlungsmenge lediglich eine Linie ist.

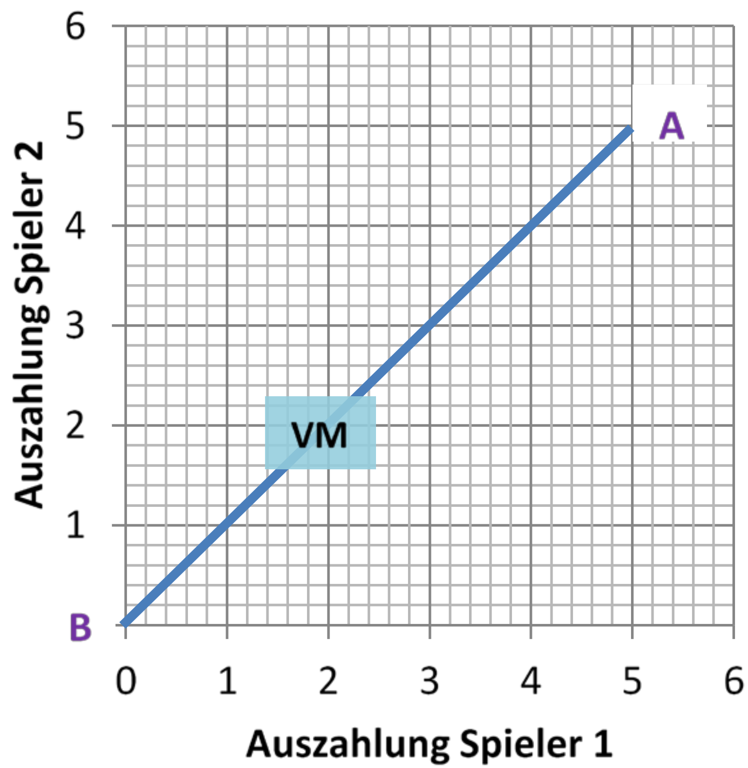
Spiele mit zwei unterschiedlichen Auszahlungskombinationen – Beispiel 1:

		Spieler 2	
		links	rechts
Spieler 1	oben	4 ; 0 (A)	0; 4 (B)
	unten	0 ; 4 (B)	4 ; 0 (A)



Spiele mit zwei unterschiedlichen Auszahlungskombinationen – Beispiel 2:

		Spieler 2	
		links	rechts
Spieler 1	oben	5 ; 5 (A)	0; 0 (B)
	unten	0 ; 0 (B)	5 ; 5 (A)



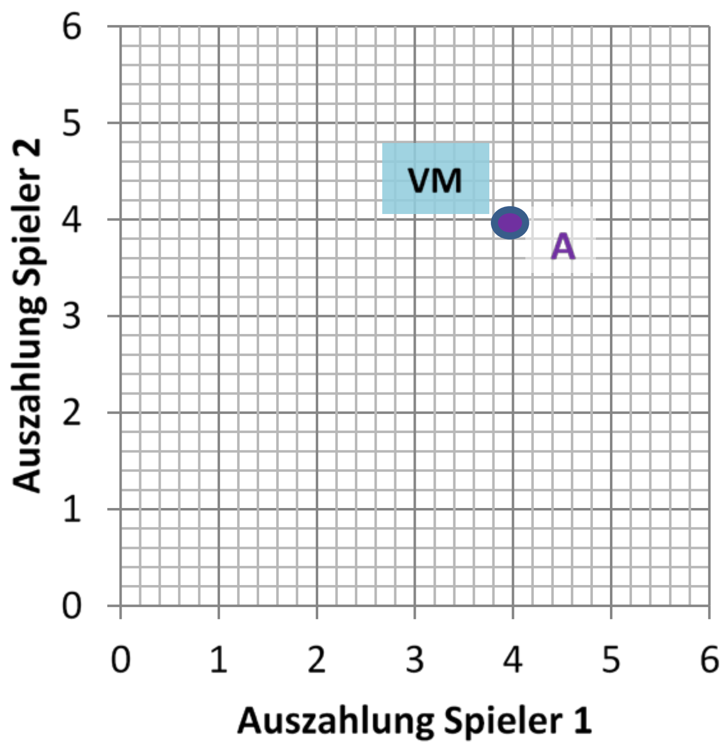
Beobachtungen:

Bei zwei unterschiedlichen Auszahlungskombinationen, ist die Verhandlungsmenge immer eine Linie.

Es können sich sowohl steigende als auch fallende Linien ergeben.

Spiele mit einer Auszahlungskombination:

		Spieler 2	
		links	rechts
Spieler 1	oben	4 ; 4 (A)	4; 4 (A)
	unten	4 ; 4 (A)	4 ; 4 (A)



In diesem Fall liegt kein echtes Verhandlungsproblem mehr vor, denn es kann faktisch nur ein Verhandlungsergebnis erzielt werden.

Effizienz

Frage:

Auf welchen Punkt der Verhandlungsmenge sollten sich die Spieler einigen und in einem bindenden Vertrag festhalten?

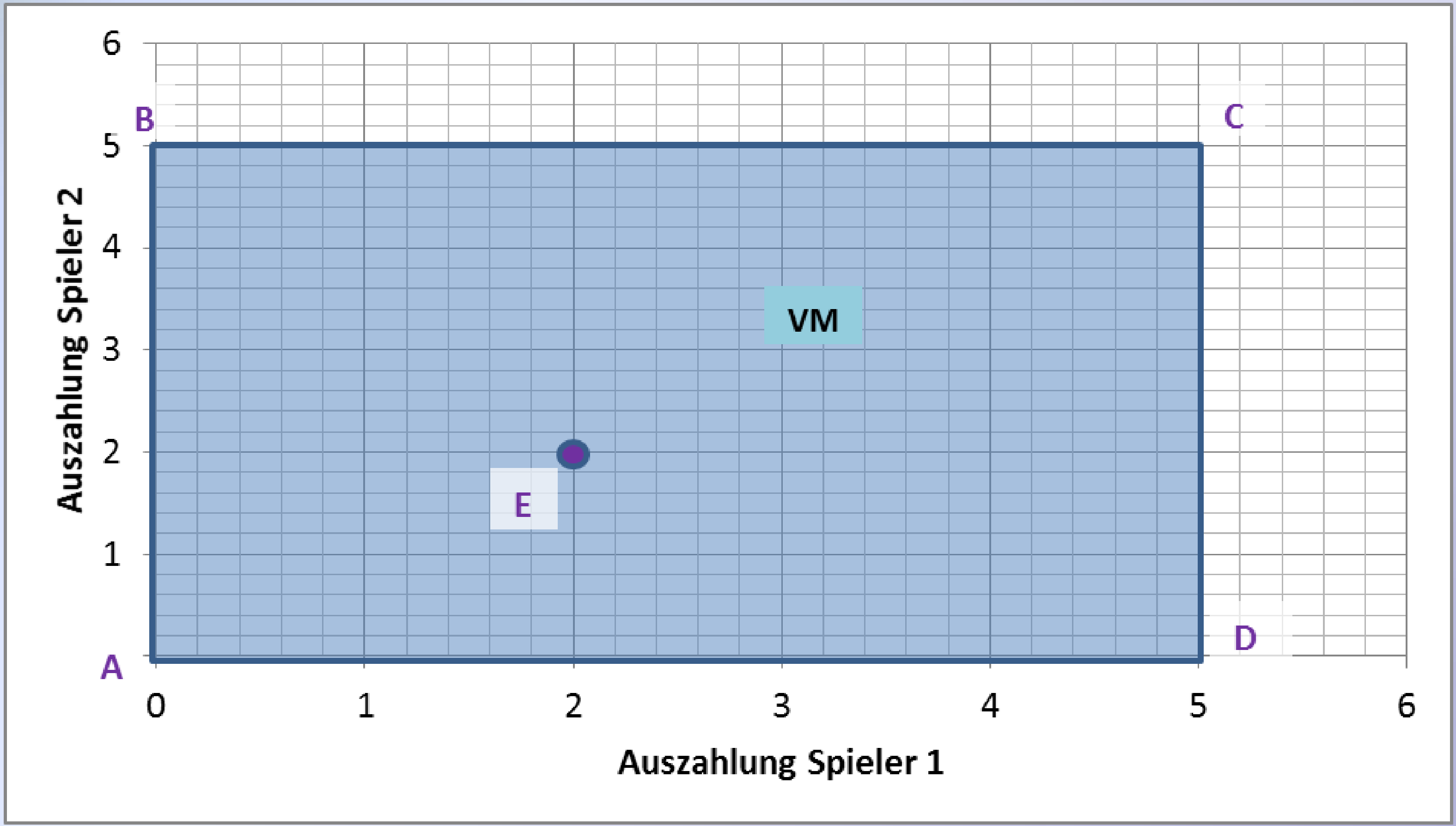
Anmerkungen:

- Strategiekombinationen außerhalb der Verhandlungsmenge müssen nicht beachtet werden, da die Spieler diese durch Absprachen nicht erreichen können.
- Auch im Rahmen der kooperativen Spieltheorie wird angenommen, dass die Spieler bestrebt sind die eigenen Auszahlungen zu maximieren. Dabei kommt es immer zu einem Konflikt, wenn die Spieler ihre jeweiligen Auszahlungsmaxima nicht gleichzeitig erreichen.

Idee:

Auch wenn die Spieler ihre Auszahlungsmaxima nicht gleichzeitig erreichen können, besteht eventuell die Möglichkeit, bestimmte Auszahlungskombinationen in der Verhandlungsmenge zu identifizieren, an denen keiner der Spieler ein echtes Interesse haben kann.

Auslese von nicht relevanten Auszahlungskombinationen (1) - Auszahlungskombination E



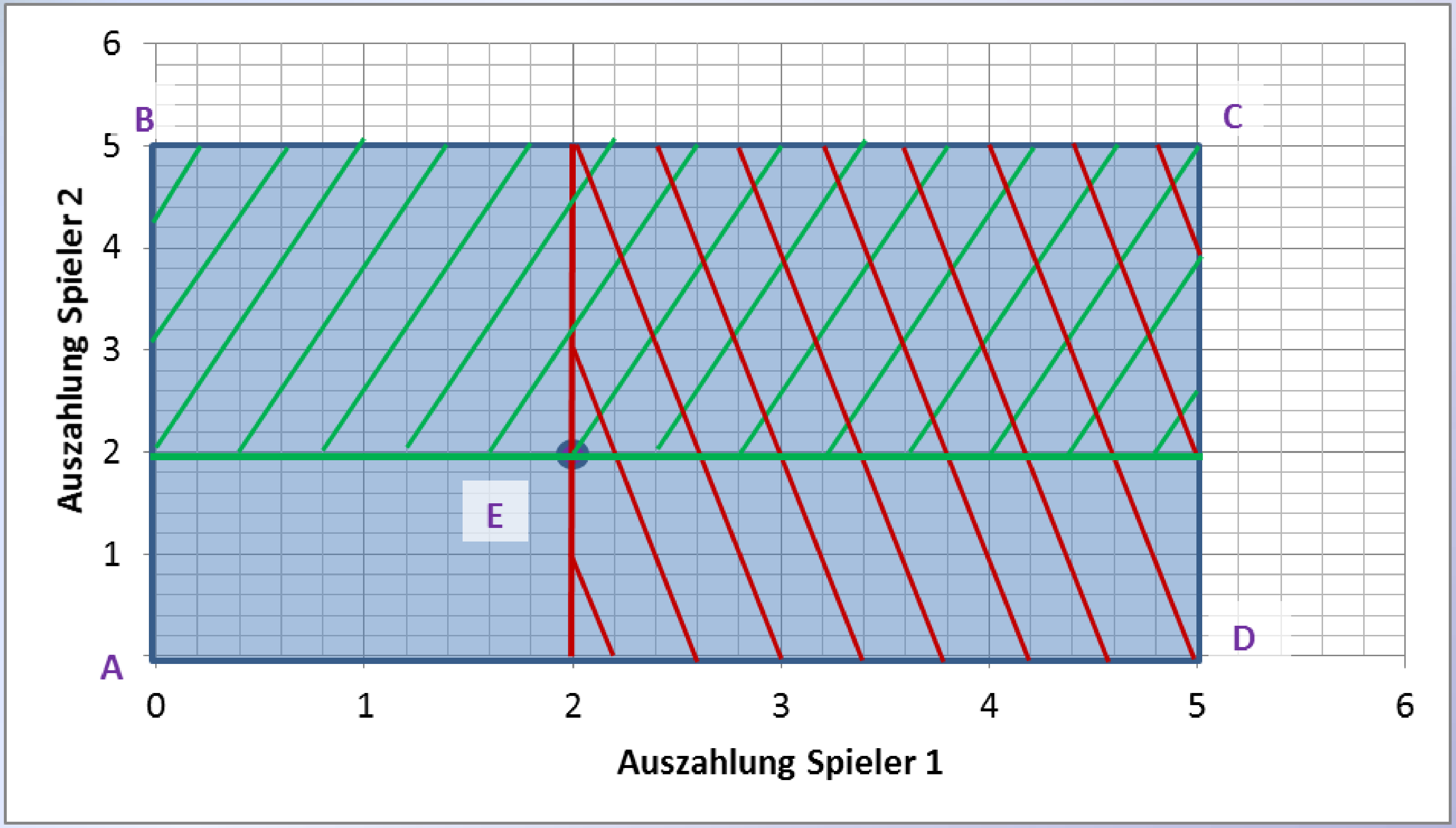
Frage:

Kann einer der Spieler ein Interesse daran haben, sich vertraglich auf die Auszahlungskombination 2/2 (Punkt E) zu einigen?

Lösungsansatz:

Es sollte herausgefunden werden welche Auszahlungskombinationen für Spieler 1 bzw. 2 genau so gut oder besser wären.

Auslese von nicht relevanten Auszahlungskombinationen (2) – Identifikation der genauso guten oder besseren Auszahlungskombinationen



Beobachtung:

Der Punkt E ist für keinen der Spieler optimal, da es andere Auszahlungskombinationen in der Verhandlungsmenge gibt, die mindestens einen Spieler besser und keinen Spieler schlechter stellen würden.

Verallgemeinerung:

Angenommen, es gibt einen beliebigen Punkt F in einer Verhandlungsmenge. Beide Spieler haben nichts gegen einen Wechsel von F auf einen anderen Punkt G, wenn:

- G auf einer waagerechten Linie rechts neben F liegt und somit Spieler 1 besser und Spieler 2 nicht schlechter stellt.
- G auf einer senkrechten Linie oberhalb von F liegt und somit Spieler 2 besser und Spieler 1 nicht schlechter stellt.
- G auf einer diagonalen Linie rechts oberhalb von F liegt und so beide Spieler besser stellt.

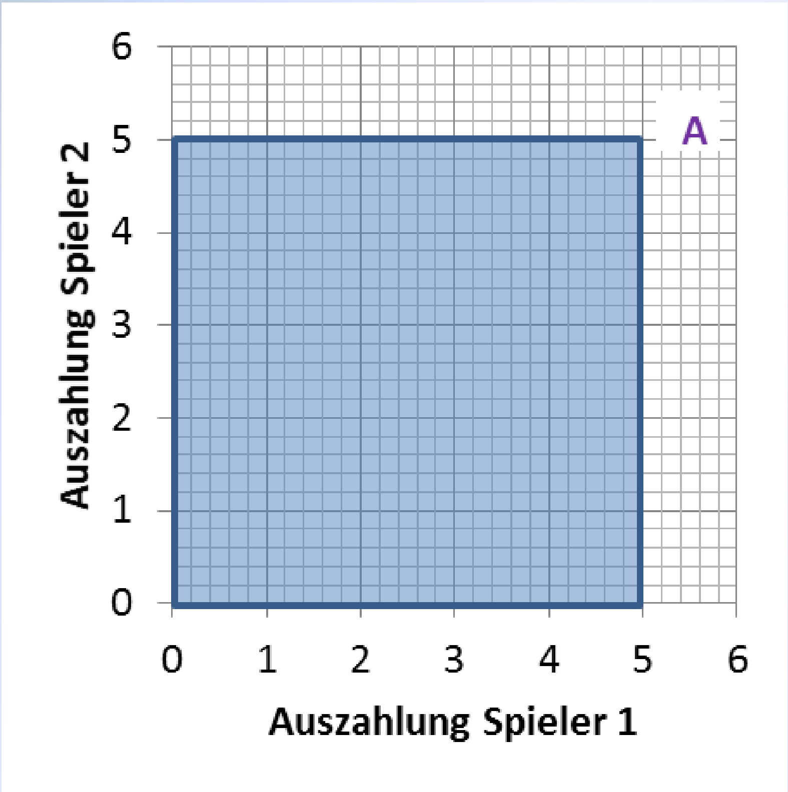
Begriff „effiziente Auszahlungskombination“

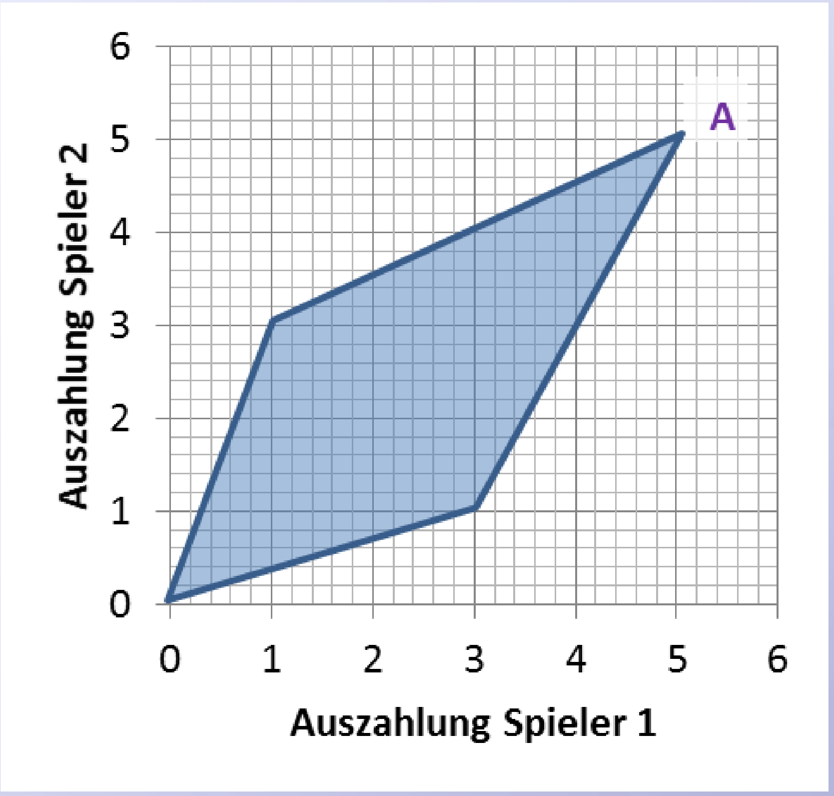
Eine Auszahlungskombination A heißt „effizient“, wenn es in der Verhandlungsmenge keine andere Auszahlungskombination B gibt, die mindestens einen Spieler besser und keinen Spieler schlechter stellen würde.

1. Optimalitätsregel:

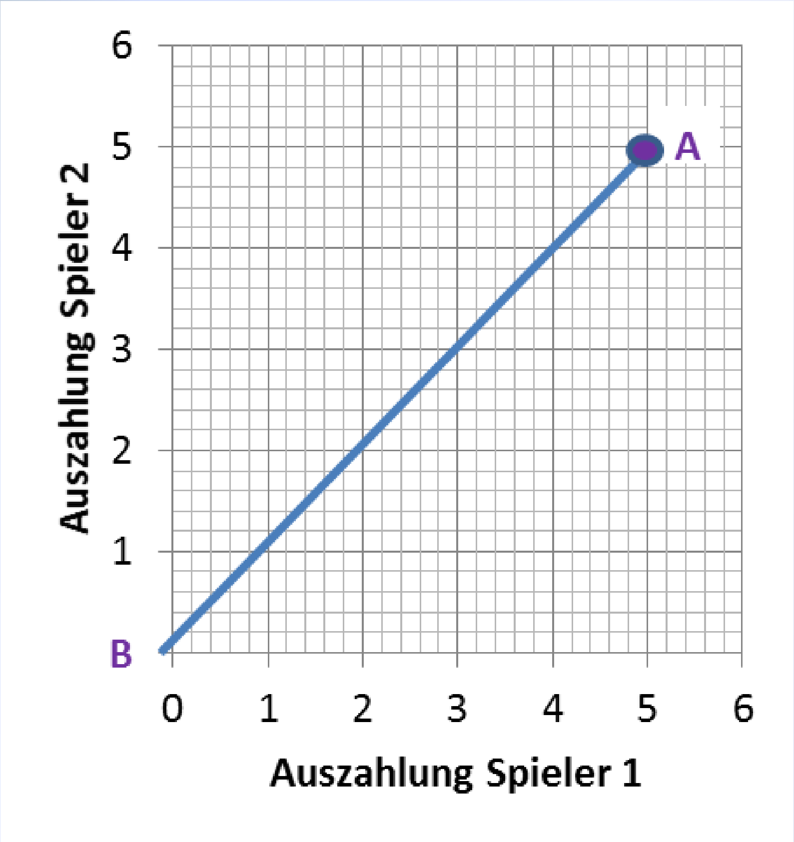
Spieler sollten nur solche Auszahlungskombinationen vertraglich vereinbaren, die effizient sind.

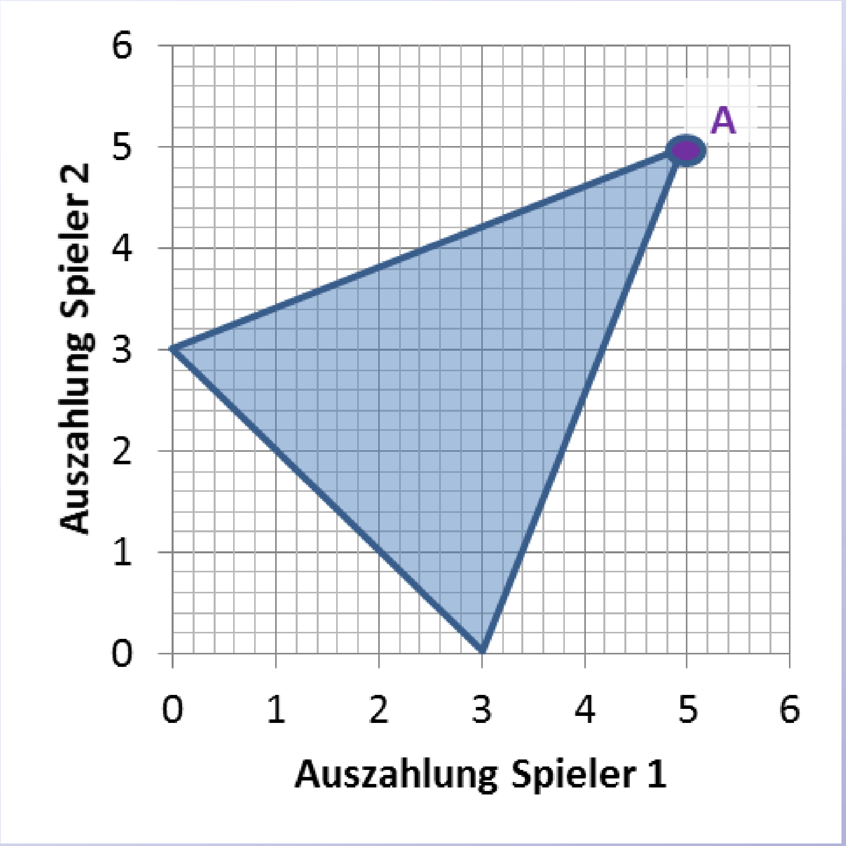
Beispiele, in denen es nur eine effiziente Auszahlungskombination A gibt (1)



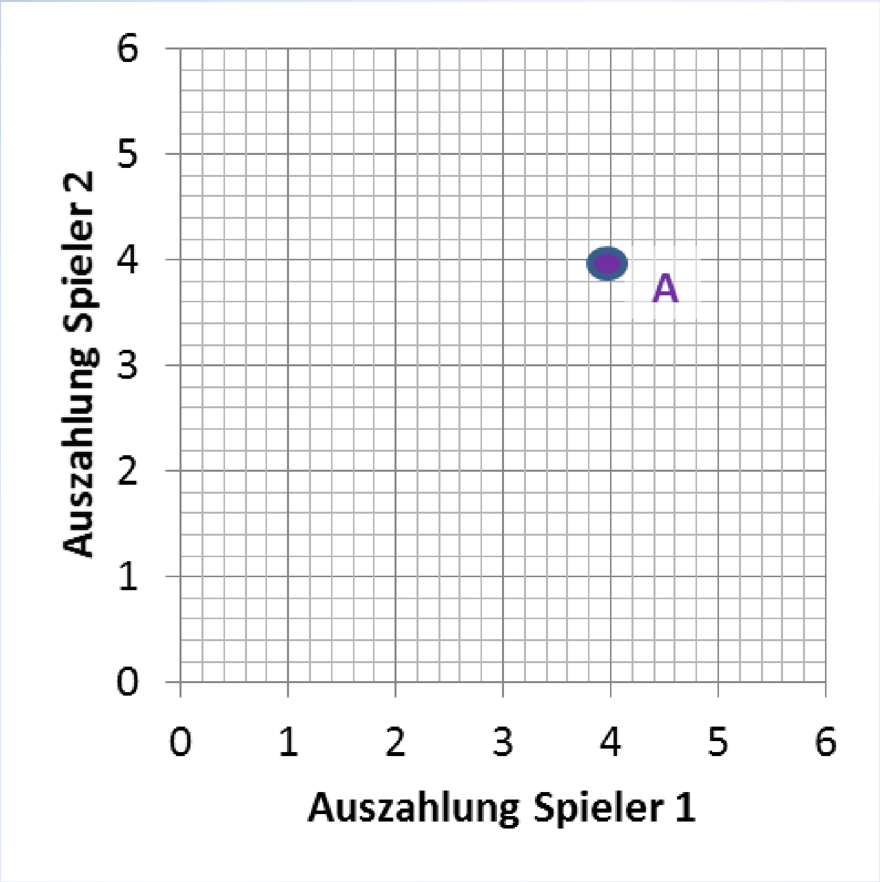


Beispiele in denen es nur eine effiziente Auszahlungskombination A gibt (2)





Beispiele in denen es nur eine effiziente Auszahlungskombination A gibt (3)



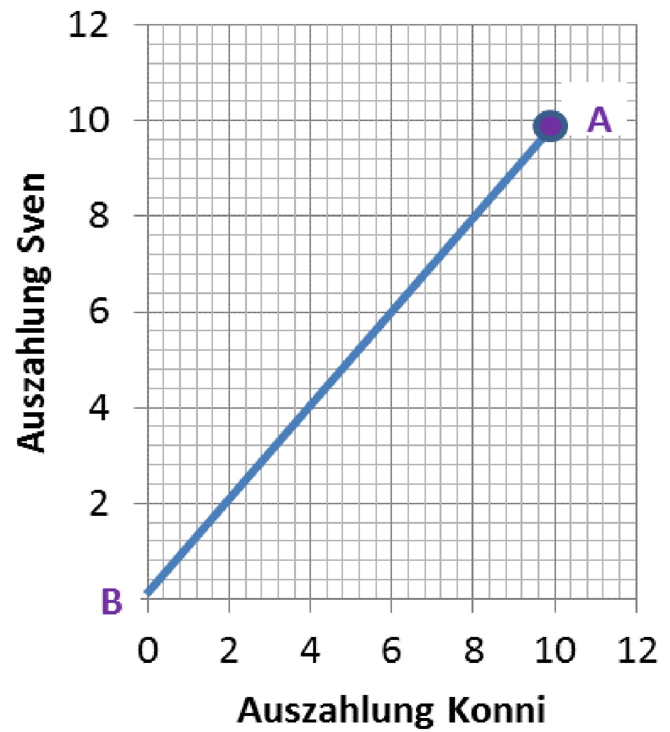
Anmerkungen:

Mithilfe der 1. Optimalitätsregel gefundene Auszahlungskombinationen sagen nur etwas darüber aus, welche Auszahlungen die Spieler erreichen, wenn sie sich optimal einigen.

Die Auszahlungskombinationen sagen aber nicht automatisch, welche Strategien die Spieler wählen sollten, denn eventuell führen mehrere Strategiekombinationen zu der gleichen, effizienten Auszahlungskombination.

Beispiel für ein Spiel mit einer effizienten Auszahlungskombination: das Reiseispiel

		Sven	
		Blackall	Charleville
Konni	Blackall	10 ; 10 (A)	0; 0 (B)
	Charleville	0 ; 0 (B)	10 ; 10 (A)



Lösung:

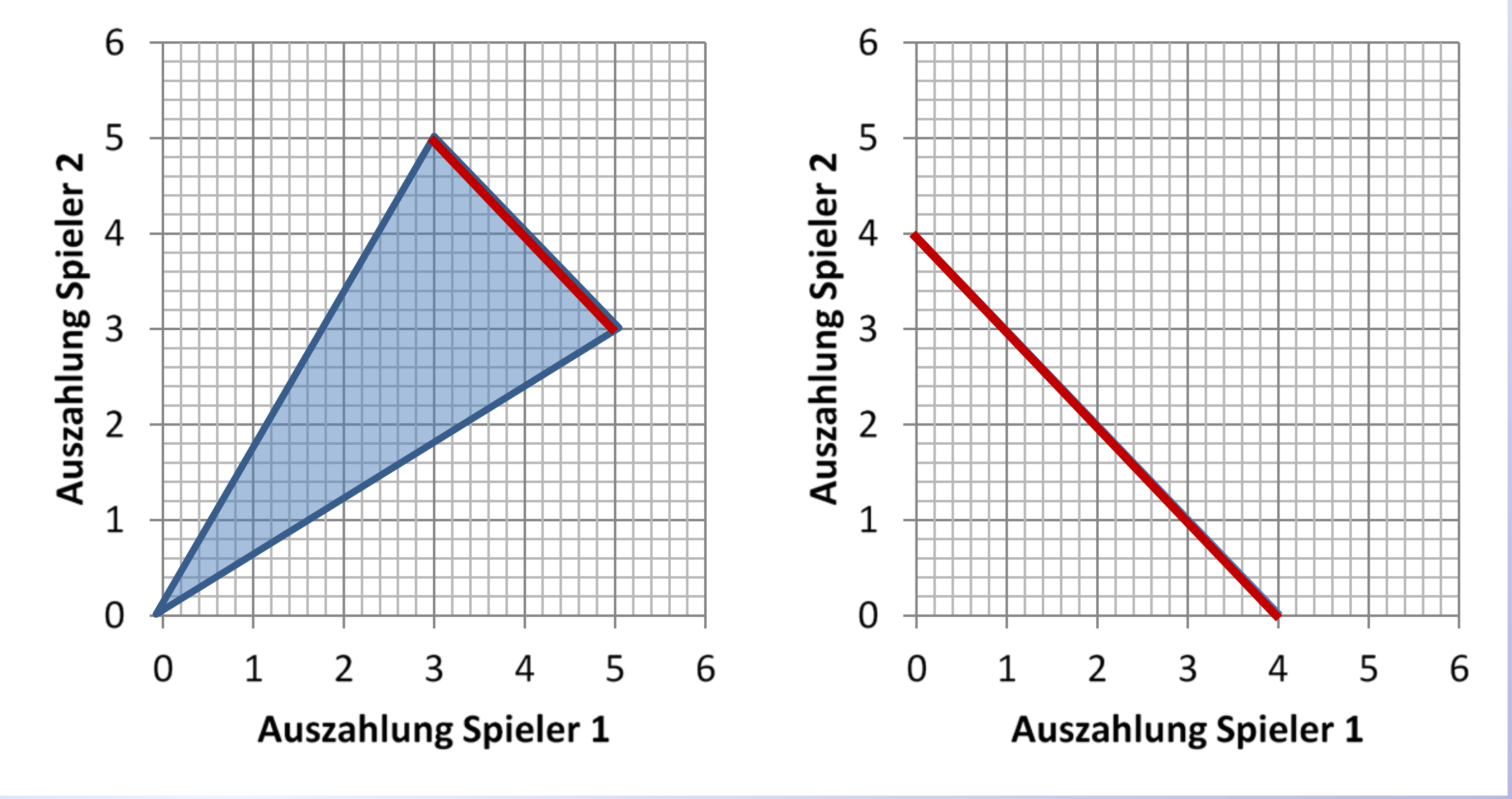
Die effiziente Auszahlungskombination A kann erreicht werden durch:

- die Einigung auf die Strategie „Blackall"
- die Einigung auf die Strategie „Charleville"
- die Wahl einer gemeinsamen gemischten Strategie bei der mit beliebigen Wahrscheinlichkeiten ausgewählt, ob sie beide nach „Blackall" oder nach „Charleville" fahren

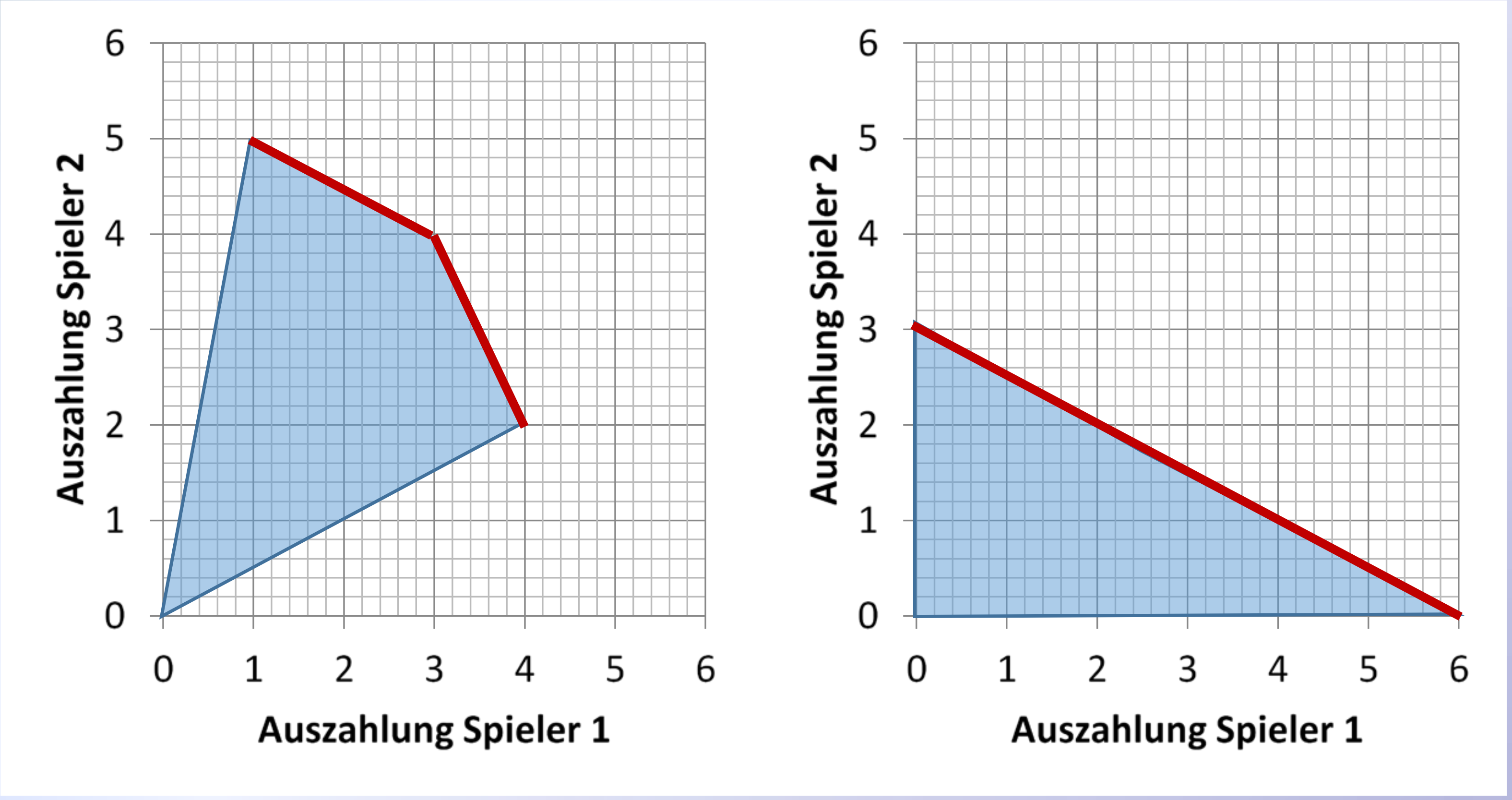
Anmerkungen:

Die kooperative Spieltheorie trifft keine Aussage darüber, welche dieser Möglichkeiten gewählt werden sollte.
Für eine eindeutige Aussage müssten noch weitere Bewertungskriterien herangezogen werden, die jedoch nicht existieren.

Beispiele für Spiele mit mehreren effizienten Auszahlungskombinationen (1):



Beispiele für Spiele mit mehreren effizienten Auszahlungskombinationen (2):



Anmerkung:

Da es für keinen der Spieler einen Grund geben kann, ineffiziente Auszahlungskombinationen durchsetzen zu wollen, werden die weiteren Betrachtungen auf die rot markierten, effizienten Auszahlungskombinationen beschränkt.

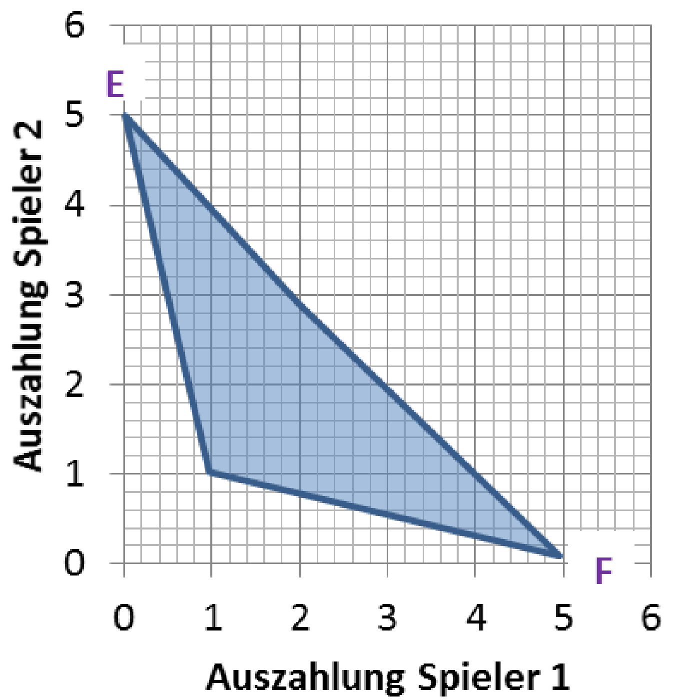
Individuelle Rationalität

Frage:

Gibt es unter den effizienten Auszahlungskombinationen eine Auszahlungskombination E, die ausgeschlossen werden kann, weil mindestens einer der Spieler einem Vertrag über die Kombination E keinesfalls zustimmen würde?

Beispiel (1):

		Spieler 2	
		links	rechts
Spieler 1	oben	5 ; 0 (F)	1; 1
	unten	1 ; 1	0 ; 5 (E)



Lösung:

Die Auszahlungskombination E ist effizient. Dennoch wird E nicht als Ergebnis eines bindenden Vertrages vereinbart werden.

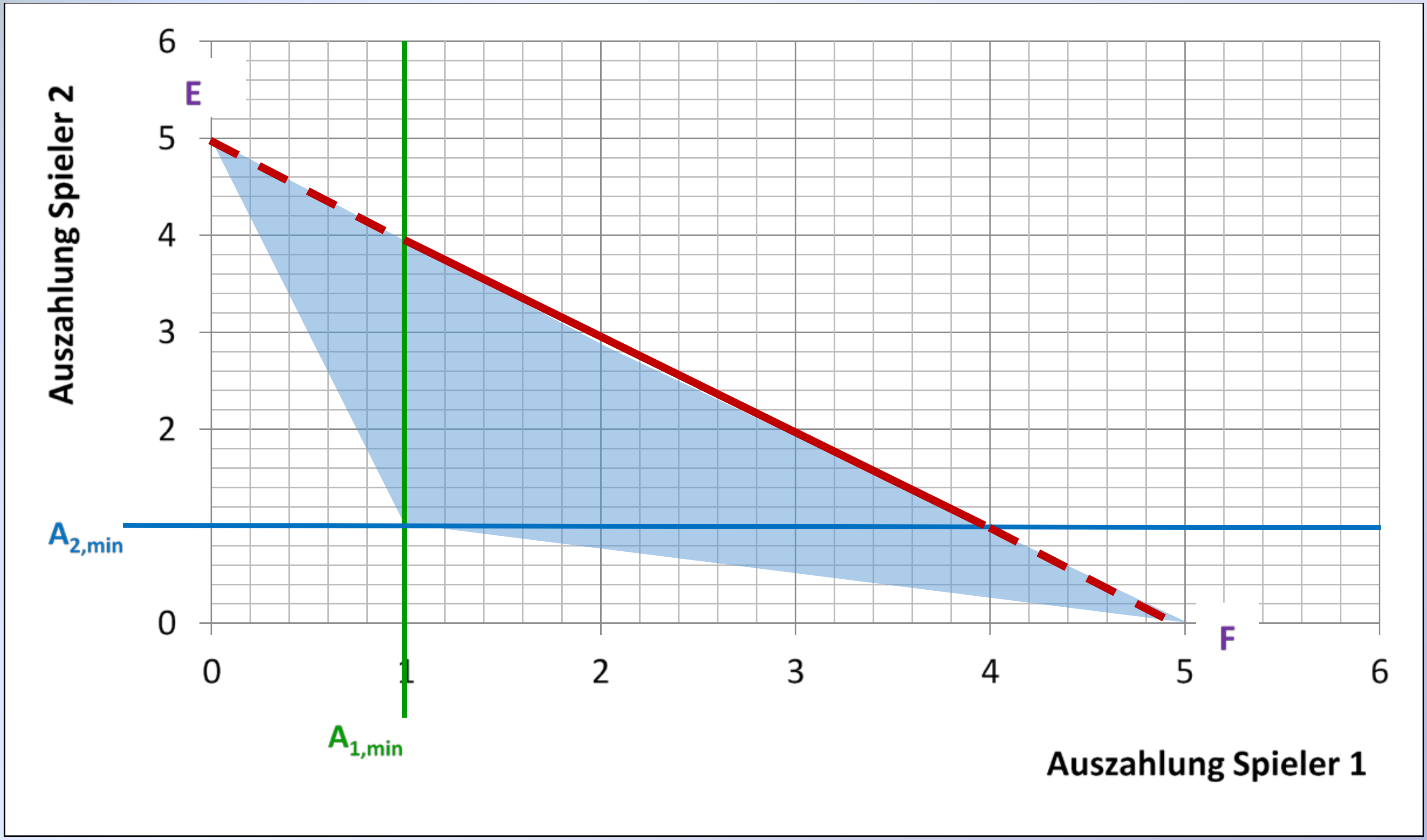
Erklärung:

Wenn in einem Vertrag E vereinbart würde, erhielte Spieler 1 eine Auszahlung von 0.
Nähme er hingegen nicht an Vertragsverhandlungen teil und spielte einfach „oben“, bekäme er mindestens eine Auszahlung in Höhe von 1.
Da eine Teilnahme an Vertragsverhandlungen nicht erzwungen werden kann, muss Spieler 1 niemals Auszahlungskombination E akzeptieren.

Begriff „Mindestauszahlung“

Zahlung, die sich jeder Spieler auch ohne Vertrag sichern kann.

Beispiel (2) – Einzeichnen der Mindestauszahlungen $A_{1,min}$ und $A_{2,min}$:



Schlussfolgerung:

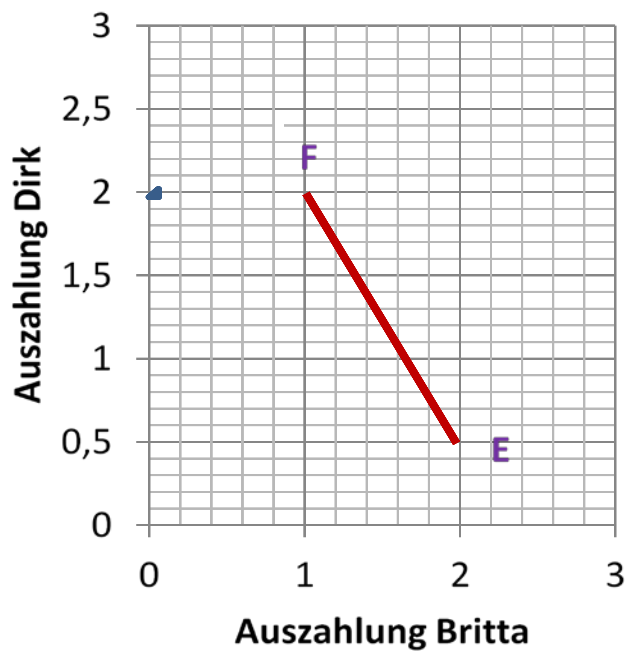
Alle effizienten Auszahlungskombinationen, die unter den Mindestauszahlungen der Spieler liegen, können ausgeschlossen werden.
Grafisch: Gestrichelter Bereich der roten Linie

2. Optimalitätsregel

Neben der Forderung nach Effizienz müssen die optimalen Auszahlungskombinationen auch individuell rational (vernünftig) sein. Individuelle Rationalität zeigt sich darin, dass kein Spieler einen Vertrag unterschreiben sollte, der ihn schlechter stellen würde als das, was der Spieler ohne Vertrag für sich bereits allein erreichen kann.

Beispiel bei dem durch individuelle Rationalität die Menge der effizienten Auszahlungen nicht weiter eingeschränkt werden kann – Kampf der Geschlechter (1):

		Dirk	
		Oper	Boxen
Britta	Oper	1 ; 2 (F)	0; 0
	Boxen	0 ; 0	2 ; 1 (E)

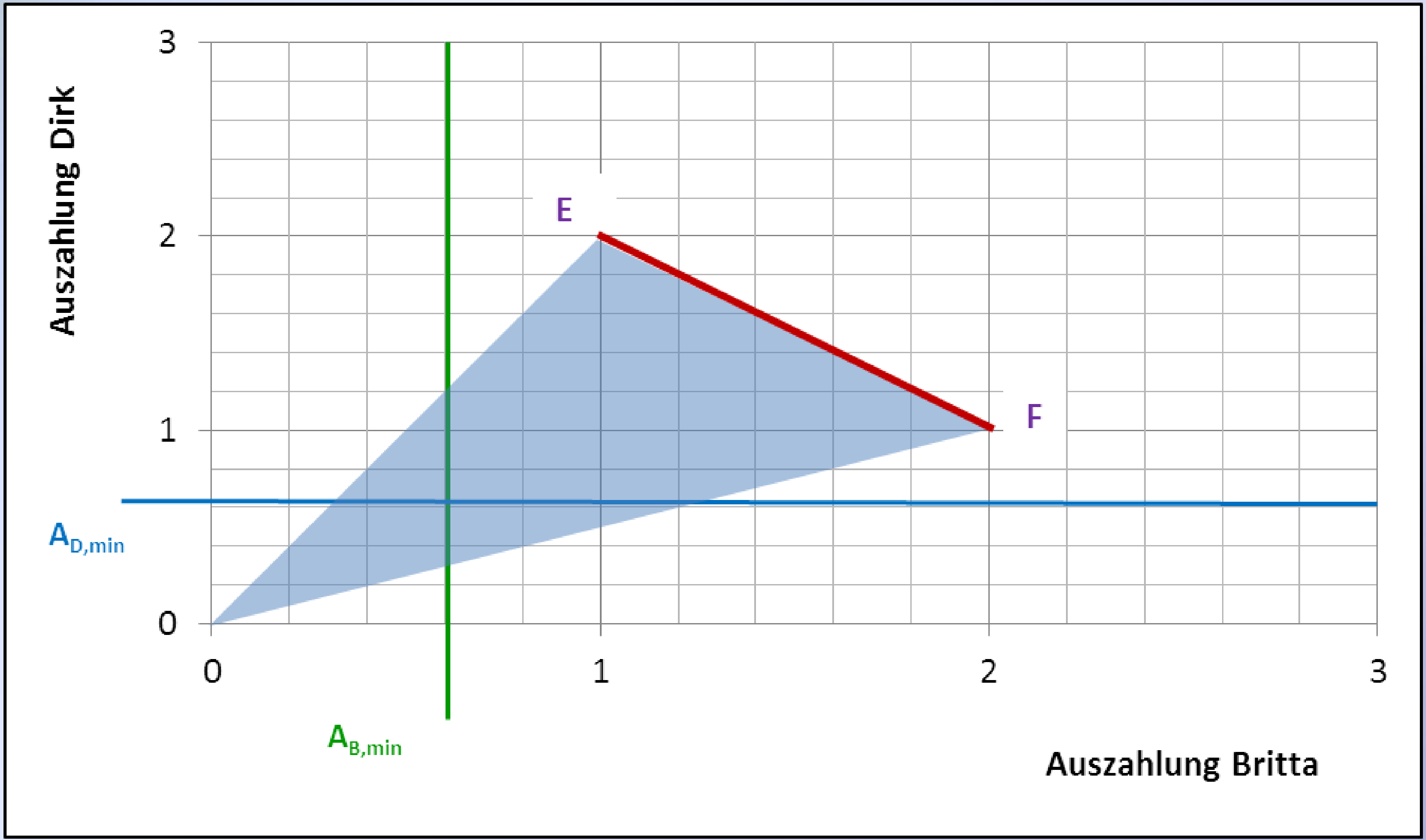


Erklärung:

- Jeder Spieler kann auf den ersten Blick lediglich eine Auszahlung von Null garantieren. Somit schränkt die Forderung nach individueller Rationalität die Menge möglicher effizienter Verhandlungsergebnisse nicht ein.
- Bei der Analyse wird jedoch noch nicht miteinbezogen, dass jeder Spieler individuell eine höhere erwartete Auszahlung als Null sichern kann, wenn er eine geeignete gemischte Strategie spielt.
- Wenn Britta in diesem Spiel mit der Wahrscheinlichkeit von 2/3 „Oper“ spielt und mit der Wahrscheinlichkeit von 1/3 „Boxen“, dann erreicht sie, unabhängig davon, was Dirk tut, eine erwartete Auszahlung von 2/3

→ Britta (und analog auch Dirk) kann sich unabhängig von Dirks (Brittas) Handeln eine Mindestauszahlung von 2/3 sichern

Berücksichtigung der angepassten Mindestauszahlungen – Kampf der Geschlechter (2):

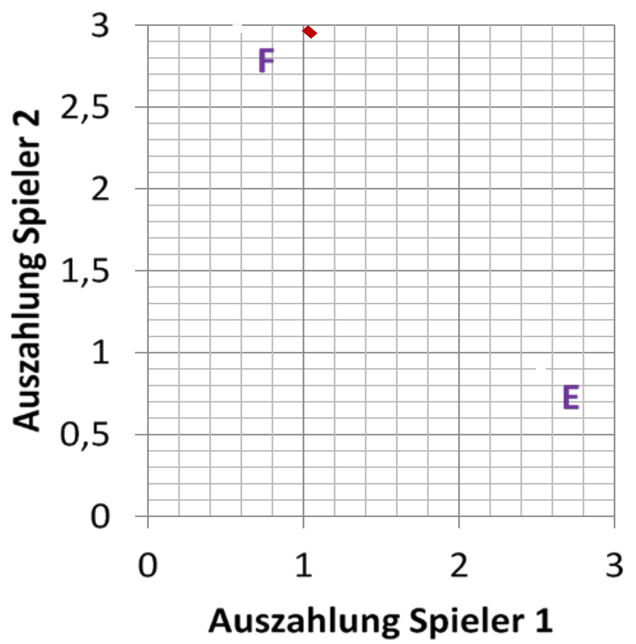


Schlussfolgerung:

Da durch die Berücksichtigung der Mindestauszahlungen keine der effizienten Auszahlungskombinationen entfernt wurden, bringt die Forderung nach individueller Rationalität die Lösung nicht näher.

Beispiel bei dem durch individuelle Rationalität eine eindeutige Lösung bestimmt werden kann (1):

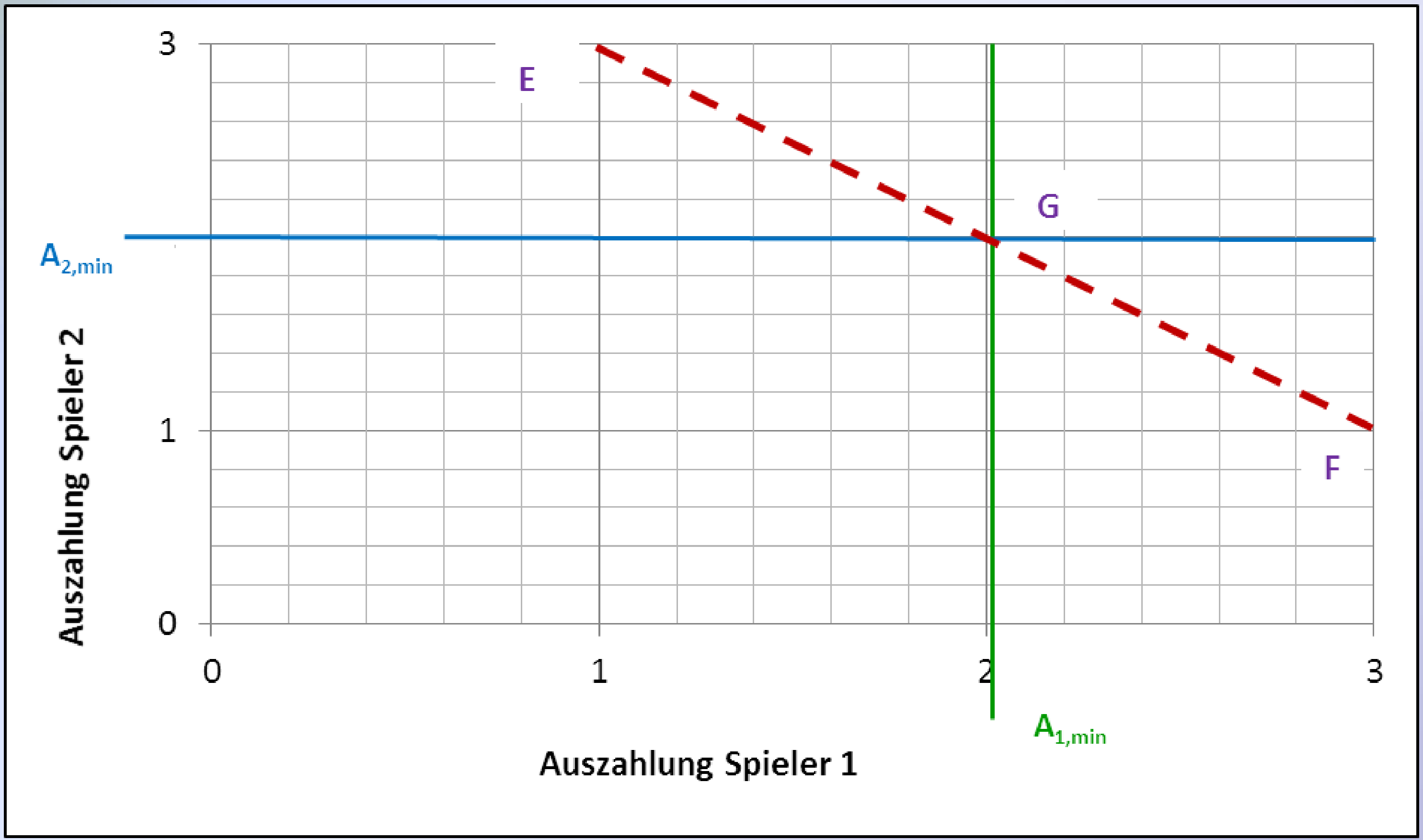
		Spieler 2	
		links	rechts
Spieler 1	oben	3 / 1 (E)	1 / 3 (F)
	unten	1 / 3 (F)	3 / 1 (E)



Erklärung:

- In reinen Strategien, kann jeder der beiden Spieler für sich selbst lediglich eine Mindestauszahlung von 1 erreichen.
- Durch eine geeignet gewählte gemischte Strategie kann jeder Spieler eine (erwartete) Auszahlung von 2 sichern.
- Wenn Spieler 1 mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% „oben“ spielt und der Gegenwahrscheinlichkeit „unten“, dann beträgt seine erwartete Auszahlung 2, egal was Spieler 2 tut. Gleiches gilt für Spieler 2.

Berücksichtigung der angepassten Mindestanforderungen:



Von allen effizienten Auszahlungskombinationen bleibt nur noch der Punkt G übrig, also die Auszahlungskombination in der jeder Spieler eine Auszahlung von 2 erhält. Das Spiel ist eindeutig gelöst.

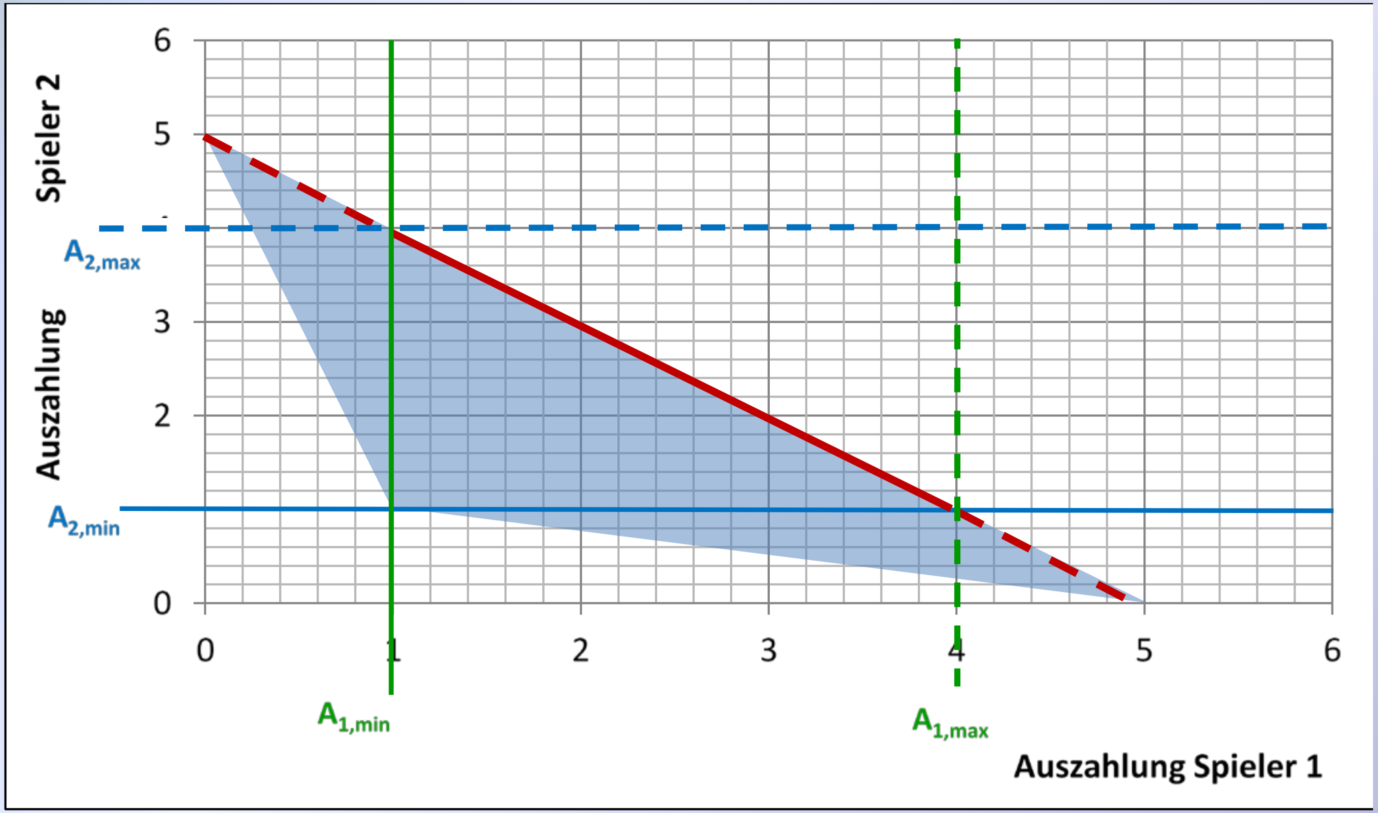
Schlussfolgerungen:

- Wenn es nur eine effiziente Auszahlungskombination A gibt, dann wird diese vereinbart.
- Wenn es mehrere effiziente Auszahlungskombinationen gibt, von denen aber nur die Kombination A der Forderung nach individueller Rationalität aller Spieler gerecht wird, dann wird diese vereinbart.
- Wenn es mehrere effiziente Auszahlungskombinationen gibt, die auch dem Kriterium der individuellen Rationalität aller Spieler entsprechen, dann benötigt man weitere Kriterien, um eine eindeutige Lösung bestimmen zu können.

Weiterer Effekt der individuellen Rationalität (1):

- Wenn ein Spieler kein Verhandlungsergebnis akzeptiert, welches schlechter ist als seine Mindestauszahlung, dann wird dadurch automatisch auch die maximal überhaupt noch erreichbare Auszahlung des anderen Spielers festgelegt.
- Diese ergibt sich dann jeweils durch den Schnittpunkt des effizienten Randes der Verhandlungsmenge mit der jeweiligen Mindestauszahlung des anderen Spielers.

Weiterer Effekt der individuellen Rationalität - Beispiel (2):



Weiteres Vorgehen:

- Im weiteren Verlauf werden zusätzliche Kriterien diskutiert, die geeignet sein könnten, die Lösung weiter einzugrenzen.
- Diese Kriterien sind jedoch nicht mehr so eindeutig begründbar wie das Effizienzkriterium und das Kriterium der individuellen Rationalität.

Weiteres Kriterium: Verhandlungsposition

Was macht eine gute Verhandlungsposition aus?

1. Das Scheitern der Verhandlung hätte für den anderen Verhandlungspartner schlimme Folgen. Je mehr der andere also durch das Scheitern einer verlieren kann, desto eher wird er bereit sein, Zugeständnisse zu machen.
2. Man kann selbst beim Scheitern der Verhandlung nicht so viel Verlieren. Der Spieler kann sich selbst also eine hohe Mindestauszahlung garantieren. Für Spieler 1 hatten wir diese erreichbare Mindestauszahlung mit $A_{1,min}$ und die von Spieler 2 mit $A_{2,min}$ bezeichnet.

Frage:

Welche Effekte sollte man erwarten, wenn sich die Mindestauszahlungen von Spielern verändern?

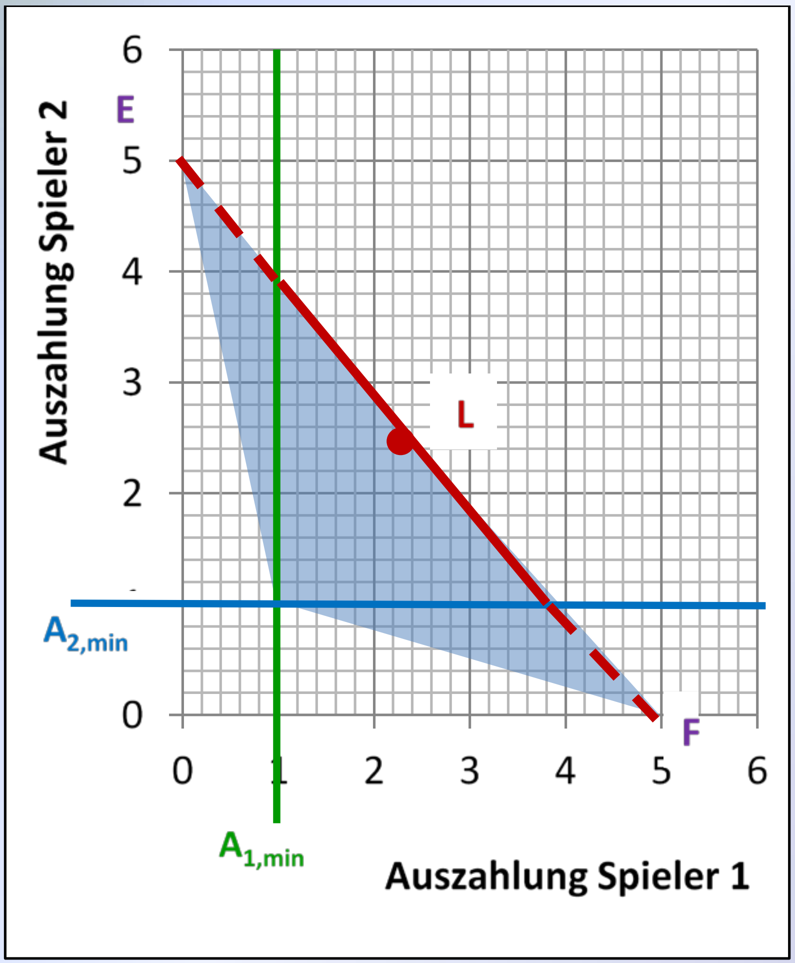
Annahme:

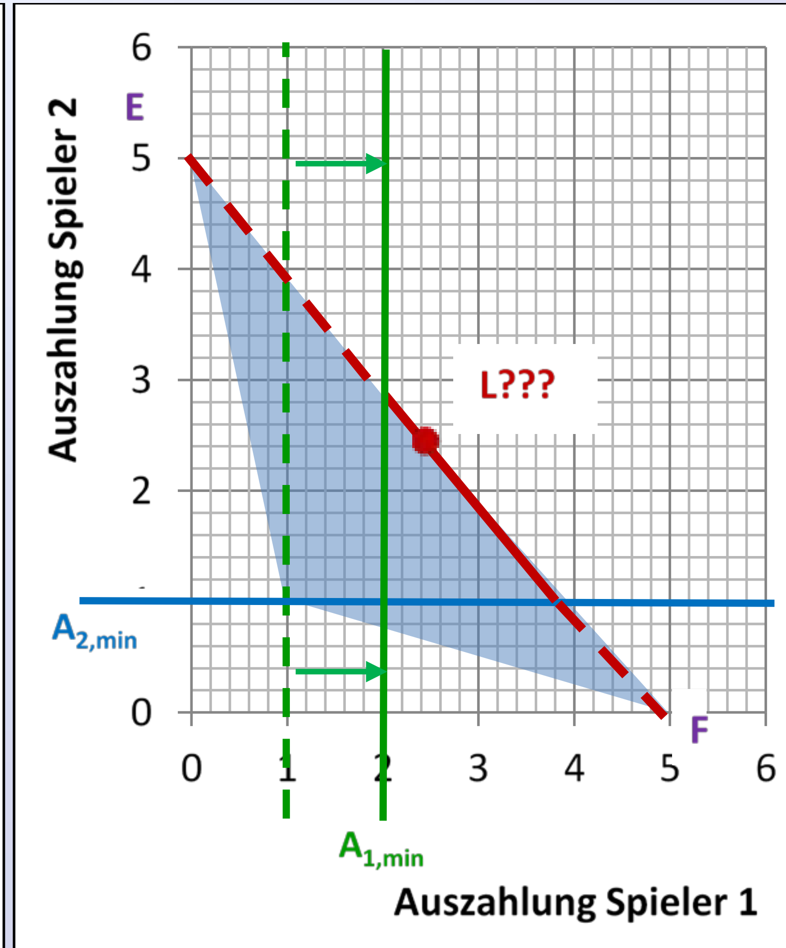
Sollte sich nun in einem Spiel nichts anderes ändern als eine dieser Mindestauszahlungen, dann kann man plausibel argumentieren, dass das einen Einfluss auf die Lösung haben müsste.

Fortsetzung des Beispiels:

- Die Spieler haben sich auf die Auszahlungskombination **L** geeinigt, die also Lösung des kooperativen Spiels ist.

Darstellung des kooperativen Spieles mit L – Steigende Mindestauszahlungen





Erklärung:

- Die Mindestauszahlung $A_{1,min}$ für Spieler 1 steigt von 1 auf 2.
- Die Menge der individuell akzeptablen Auszahlungskombinationen verringert sich.

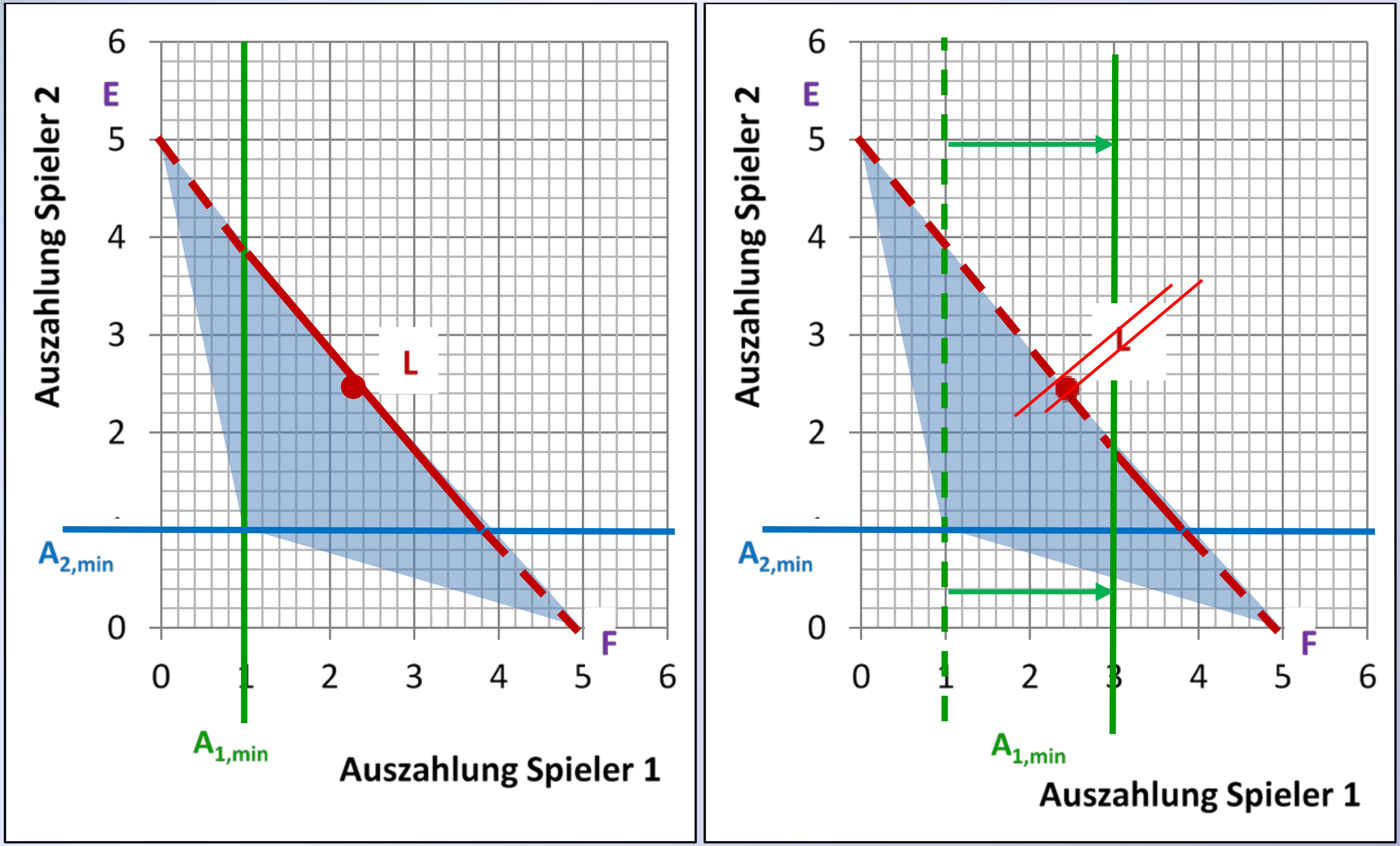
Frage:

Sollte die Lösung **L** von dieser Veränderung unberührt bleiben?

Antwort:

- Die Lösung **L** ist weiter möglich, da sie effizient ist und dem Kriterium der individuellen Rationalität genügt.
- Dennoch ist sie nicht plausibel:

Darstellung des kooperativen Spieles mit L – Weiter steigende Mindestauszahlungen



Ergebnis:

- Die alte Lösung **L** wird nicht mehr gewählt, da sie nun das Kriterium der individuellen Rationalität verletzten würde.

Schlussfolgerungen:

- Dass es im ersten Fall gar keinen Effekt geben sollte, während es im zweiten Fall definitiv einen Effekt geben muss, lässt sich nur schwer begründen.
- Deshalb kann man schlussfolgern, dass eine Verbesserung der Verhandlungsposition zu einer Verbesserung der Auszahlung des betreffenden Spielers führen sollte.
- Den genauen monetären Effekt, den eine Veränderung der Mindestauszahlung eines Spielers auf dessen endgültige Auszahlung hat, kann man erst dann bestimmen, wenn man eine plausible Begründung dafür gefunden hat, wie die Lösung aussehen müsste, bevor die Mindestauszahlung variiert wurde.
- Der genaue Effekt einer Veränderung der Mindestauszahlung, lässt sich jedoch nicht mehr allgemein und eindeutig begründen.

Verhandlungsmacht

Idee:

- Verhandlungsmacht bezeichnet das relative Beeinflussungspotenzial bei Verhandlungen. Also die Möglichkeiten über die ein Spieler verfügt, das Verhandlungsergebnis zu seinem Gunsten und damit zu Ungunsten des anderen Spielers zu beeinflussen.
- Wenn in einem Spiel zwei Spieler jeweils das gleiche Beeinflussungspotenzial haben, dann kann man sie als gleichmächtig ansehen. In diesem Fall besitzt jeder Spieler 50% aller Verhandlungsmacht.

Annahmen (1):

- Die Verhandlungsmacht von Spieler 1 bzw. Spieler 2 wird als M_1 bzw. M_2 bezeichnet.
- Wenn alle Spieler gleich viel Macht haben, ist $M_1 = M_2 = 1$
- Die Summe der Machtkennzahlen $M_1 + M_2 + \ldots$ ist genauso groß wie die Anzahl der Spieler

Annahmen (2) :

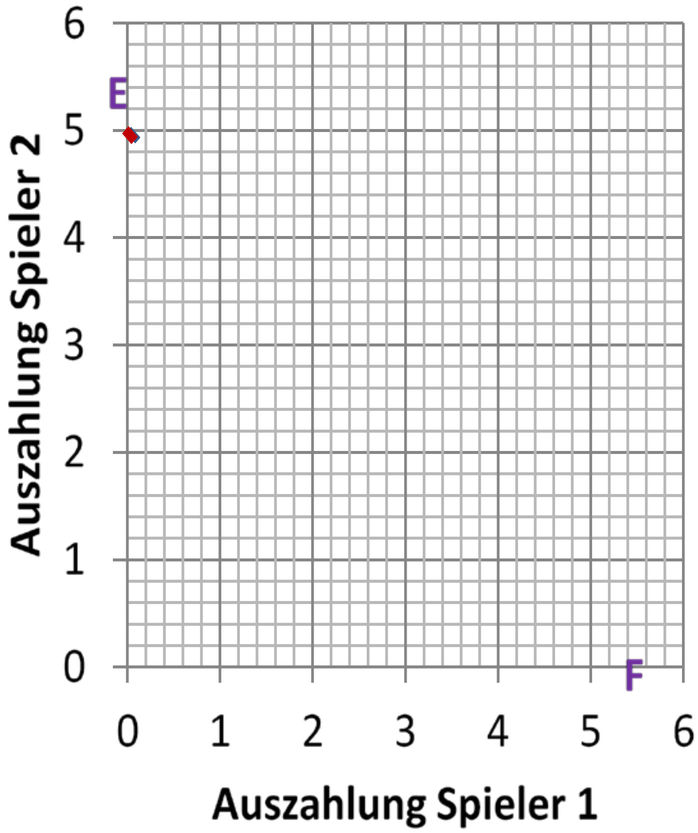
- Im Gegensatz zu der Stärke der Verhandlungsposition, kann die Verhandlungsmacht nicht aus Analysen des jeweils zugrundeliegenden nicht-kooperativen Spiels berechnet werden.
- Macht kann daher erst nachträglich in das Spiel eingebaut werden, indem man einfach Annahmen darüber trifft, welcher Spieler welche Macht hat.
- Die mit diesen Annahmen entstehende Willkür kann durch das vorherige Betrachten der Lösung des kooperativen Verhandlungsspiels (bei dem alle Spieler gleich mächtig wären) ausgeglichen werden.

Begriff „Macht“:

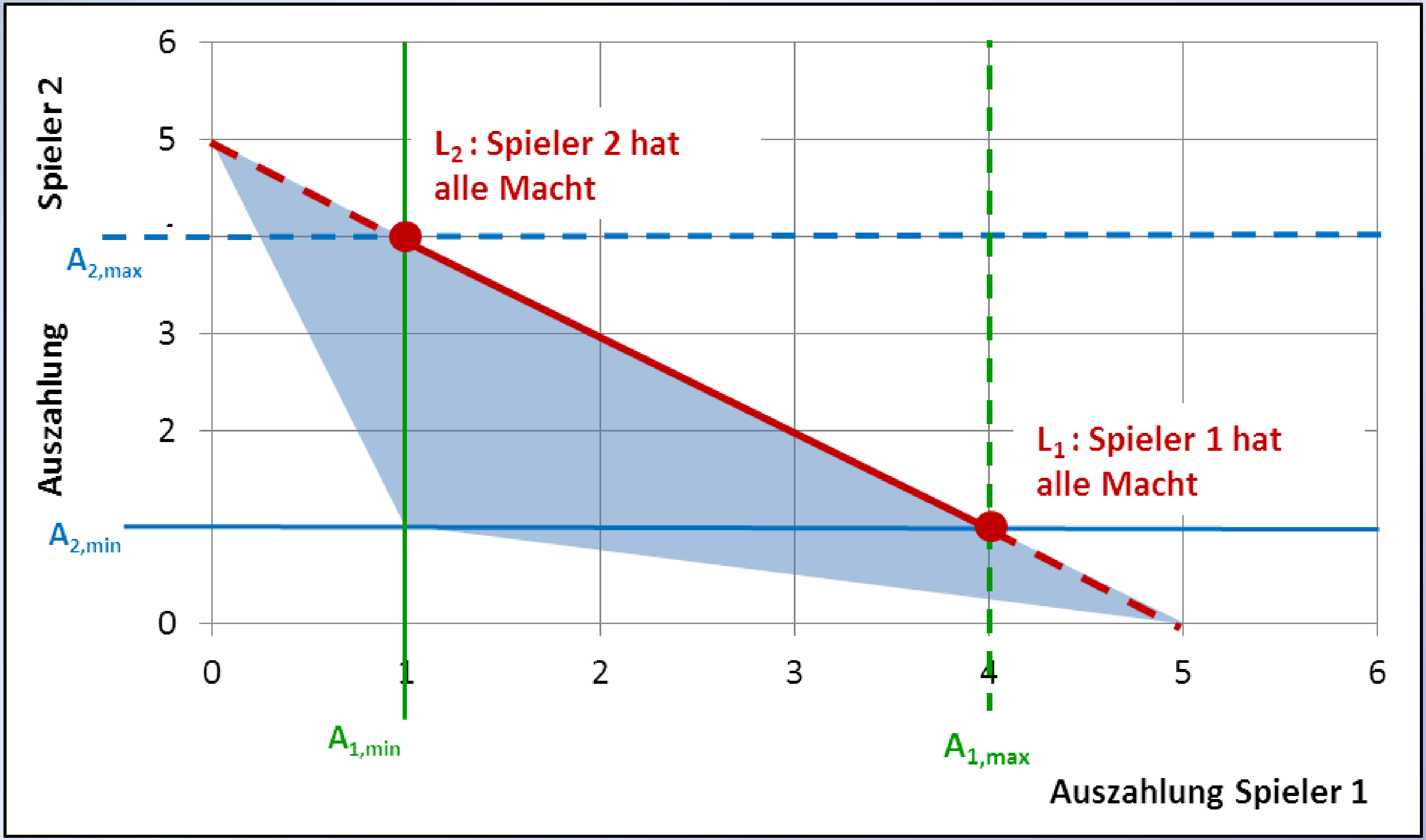
- Die Möglichkeit den anderen Spieler dazu zu bewegen, den eigenen Vorschlägen über die zu wählende Auszahlungskombination zu folgen. Wenn z.B. Spieler 1 die gesamte Macht hat, dann kann er Spieler 2 dazu bringen, jeden Vorschlag bezüglich der Auszahlungskombination zu akzeptieren.
- Einschränkung: die Auszahlungskombinationen dürfen nicht gegen das Kriterium der individuellen Rationalität verstoßen.

„Macht“ im Beispiel:

		Spieler 2	
		links	rechts
Spieler 1	oben	5 0 (F)	1 1
	unten	1 1	0 5 (E)



Ein Spieler hat alle Macht:



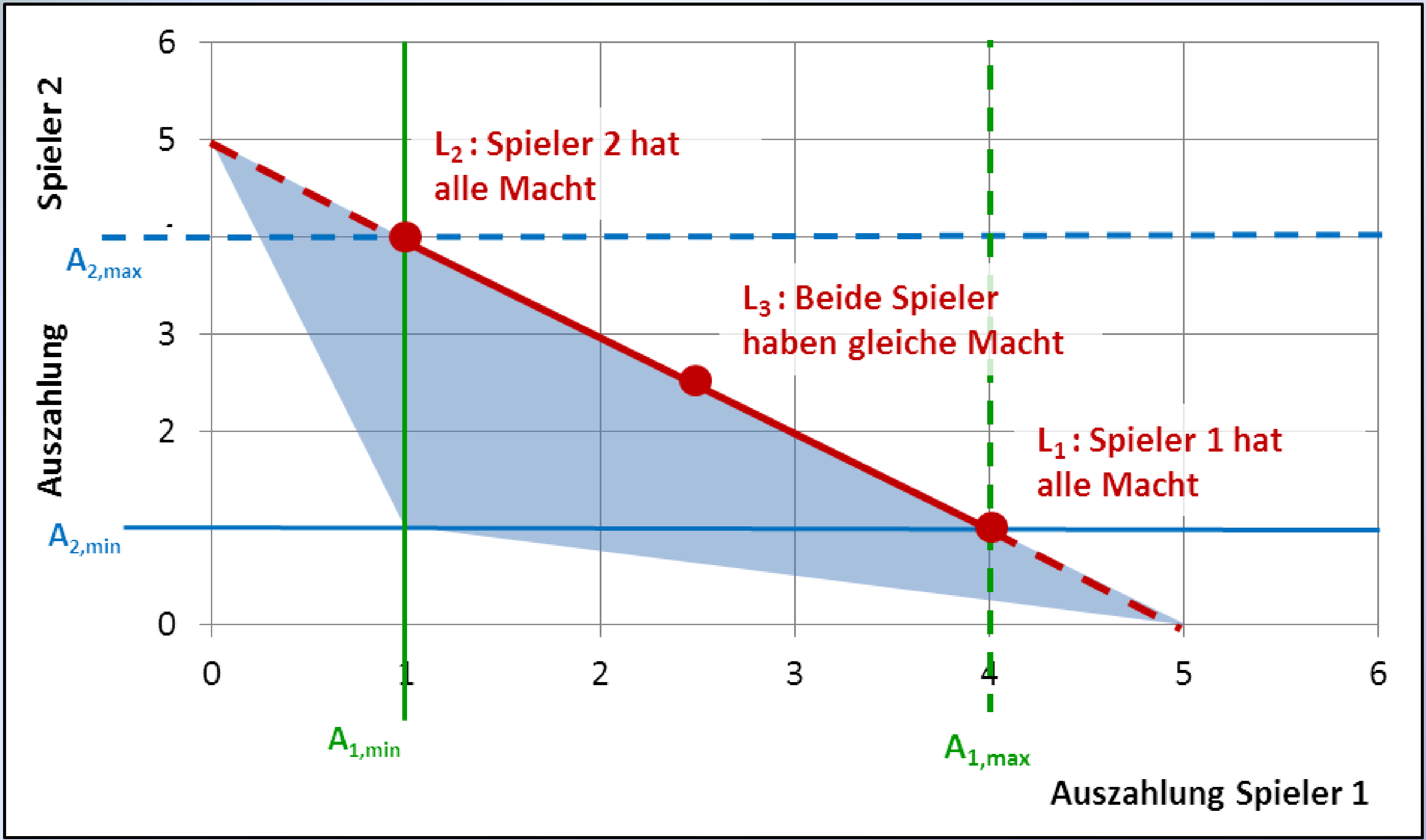
Annahme:

Spieler 1 hat die gesamte Verhandlungsmacht.

Ergebnis:

- Spieler 1 ist bestrebt seine eigene Auszahlung zu maximieren, daher wählt er die höchste Auszahlung $A_{1,max}$ (Punkt L_1), die er erreichen kann.
- Spieler 2 erreicht in diesem Punkt nur noch seine Mindestauszahlung $A_{2,min}$
- Noch mehr als im Punkt L_1 kann Spieler 1 nicht herausholen, weil Spieler 2 sonst aus der Verhandlung aussteigen würde.
- Hat Spieler 2 sämtliche Macht, liegt das Ergebnis entsprechend im Punkt L_2.

Die Spieler sind gleichmächtig:



Erklärung:

- Da beide Spieler die gleiche Verhandlungsposition haben, können sie jeweils für sich selbst die gleichen Mindestauszahlungen sichern.
- Auch die Maximalauszahlungen sind identisch.
- Die Situation von Spieler 1 stimmt in dem Spiel vollständig mit der Situation von Spieler 2 überein.
- Deshalb liegt die Lösung des Spiels in Punkt L_3 , der genau zwischen L_1 und L_2 liegt.
- Jeder Spieler bekäme eine Auszahlung von 2,5.

Die Verhandlungslösung von Nash

Idee:

Die Lösung jedes beliebigen kooperativen Verhandlungsspiel soll dadurch ermittelt werden, dass man plausible Anforderungen an die Lösung stellt und diese Anforderungen sehr allgemein formuliert.

Anforderungen bzw. „Axiome“:

- Effizienzaxiom
- Symmetrieaxiom
- Linearitätsaxiom
- Unabhängigkeitsaxiom

Effizienzaxiom:

Die Forderung, dass die Lösung auf dem effizienten Rand der Verhandlungsmenge liegen sollte.

Symmetrieaxiom:

Das Symmetrieaxiom fordert, dass jeder Spieler die gleiche Auszahlung erreichen sollte, wenn das Spiel symmetrisch ist.
Ein Spiel ist symmetrisch, wenn alle beteiligten Spieler vor exakt der gleichen Situation stehen.
Zwischen den Spielern gibt es keine Unterschiede, die rechtfertigen würden, dass einer der Spieler eine höhere Auszahlungen erhält.

Beispiel (1):

- Katja und Maren verhandeln über die Aufteilung von 100€.
- Sie einigen sich, dass Maren 60% des Geldes erhält und Katja 40%.
- Wenn sie das Geld zuvor zu einem Wechselkurs von 1,30 $/€ umgetauscht haben, müssten Katja und Maren 130$ aufteilen.

Linearitätsaxiom:

- Das Linearitätsaxiom fordert nun, dass die Aufteilung des Geldes nicht von der Währungseinheit abhängen sollte, in der das Geld vorliegt.
- In dem Beispiel sollte auch der Dollarbetrag in einem Verhältnis von 60/40 geteilt werden.

Beispiel (2):

- Das Geld wurde nicht zufällig zur Verfügung gestellt, sondern mit der Bedingung, dass Maren mindestens 20€ erhält.
- Bei der ursprünglichen Aufteilung von 60% für Maren und 40% für Katja von 100€, erhält Maren 60€.

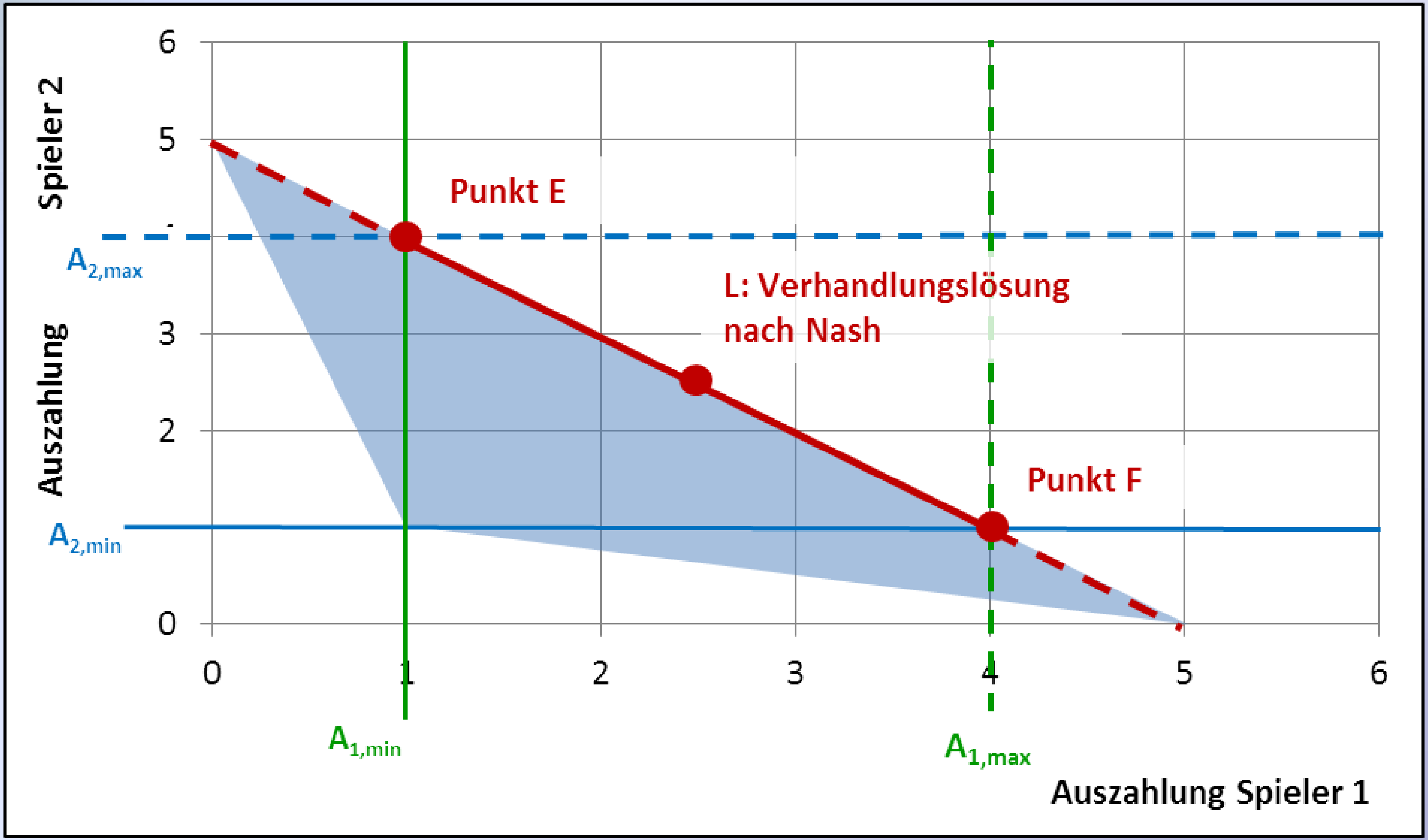
Unabhängigkeitsaxiom:

- Das Unabhängigkeitsaxiom besagt allgemein, dass die Verkleinerung der Verhandlungsmenge keinen Einfluss auf die Lösung haben sollte, solange die ursprüngliche Lösung weiter in der Verhandlungsmenge bleibt.
- In Beispiel 2 sollte die Bedingung, dass Maren mindestens 20€ erhalten muss, keinen Einfluss auf die Lösung haben, da Maren in der Ausgangssituation ohnehin schon mehr als 20€ bekommen hat.

Weitere Anforderung:

- Die Verhandlungslösung muss der Forderung der individuellen Rationalität genügen.

Spiel bei dem der effiziente Rand der Verhandlungsmenge linear ist:



1. Lösungsverfahren – Grafische Interpretation:

- Nach der Lösung von Nash bekommt jeder Spieler eine Auszahlung, die genau in der Mitte seiner Minimal- und Maximalauszahlungen liegt.
- Für Spieler 1 ist seine Mindestauszahlung 1 und seine Maximalauszahlung 4, die Mitte ergibt sich aus (1+4)/2=2,5. Das gleiche gilt für Spieler 2.

2. Lösungsverfahren – Nach Nash:

Annahmen:

- A_1/ A_2 bezeichnet die Auszahlung von Spieler 1 / 2, bei Einigung der beiden Spieler.
- Mit der „Einigungsdividende“ bezeichnet man die Besserstellung des Spielers durch eine Einigung. Sie wird dargestellt durch (A_1 - $A_{1,min}$) für Spieler 1 und durch (A_2 – $A_{2,min}$) für Spieler 2.

Vorgehen:

- Aus der Multiplikation beider Einigungsdividenden ergibt sich eine Funktion „Z“

$$Z = \left(A_1 - A_{1,min}\right)\left(A_2 - A_{2,min}\right)$$

- Diese Funktion Z wird maximiert, in dem die Auszahlungen A_1 und A_2 entsprechend gewählt werden.
- Nebenbedingung: Die Werte von A_1 und A_2 dürfen nicht kleiner werden als die betreffenden Mindestauszahlungen

Rechnung:

- Mit den gegebenen Mindestauszahlungen von 1, ergibt sich für Z:

$$Z = (A_1 - 1)(A_2 - 1)$$

Rechnung (1):

- Mit den gegebenen Mindestauszahlungen von 1, ergibt sich für Z:

$$Z = (A_1 - 1)(A_2 - 1)$$

- Die Werte für die Auszahlungen können nicht freigewählt werden, sondern die Auszahlungskombination muss in der Verhandlungsmenge liegen. Da die gesuchte Auszahlungskombination auf dem effizienten Rand liegen muss und dieser in diesem Fall eine fallende Gerade ist, ergibt sich:

$$A_2 = 5 - A_1$$

- Eingesetzt in die Funktion Z:

$$Z = (A_1 - 1)(A_2 - 1)$$

$$= (A_1 - 1)(5 - A_1 - 1)$$

$$= 5A_1 - A_1^2 - 4$$

Rechnung (2):

- Über die Bedingung erster Ordnung erhält man das Maximum der Funktion:

$$\frac{dZ}{dA_1} = 5 - 2A_1 = 0$$

- Die daraus ermittelte optimale Auszahlung ist $A_1 = 2{,}5$

- Setzt man diesen Wert in die Gleichung des effizienten Randes, erhält man:

$$A_2 = 5 - A_1 = 5 - 2{,}5 = 2{,}5$$

Die asymmetrische Verhandlungslösung

Problem:

Aufgrund des Symmetrieaxioms werden die Einigungsdividenden $(A_1 - A_{1,min})$ und $(A_2 – A_{2,min})$ gleichmäßig bei der Maximierung der Funktion Z berücksichtigt werden. Das bedeutet, dass Verhandlungsmacht über den anderen Spieler nicht abgebildet werden kann.

Idee:

Um Machtverhältnisse untersuchen zu können, muss auf das Symmetrieaxiom verzichtet werden.

Vorgehen:

- Z wird insofern verändert, dass es die Effekte der Macht widerspiegelt. Es ergibt sich mit M_1 und M_2 als die Macht von Spieler 1 bzw. Spieler 2:

$$Z_M = \left(A_1 - A_{1,min}\right)^{M_1}\left(A_2 - A_{2,min}\right)^{M_2}$$

- Da die Summe der Machtfaktoren der Anzahl der Spieler entspricht, also $M_1 + M_2 = 2$ gilt, ergibt sich eingesetzt:

$$Z_M = \left(A_1 - A_{1,min}\right)^{M_1}\left(A_2 - A_{2,min}\right)^{2-M_1}$$

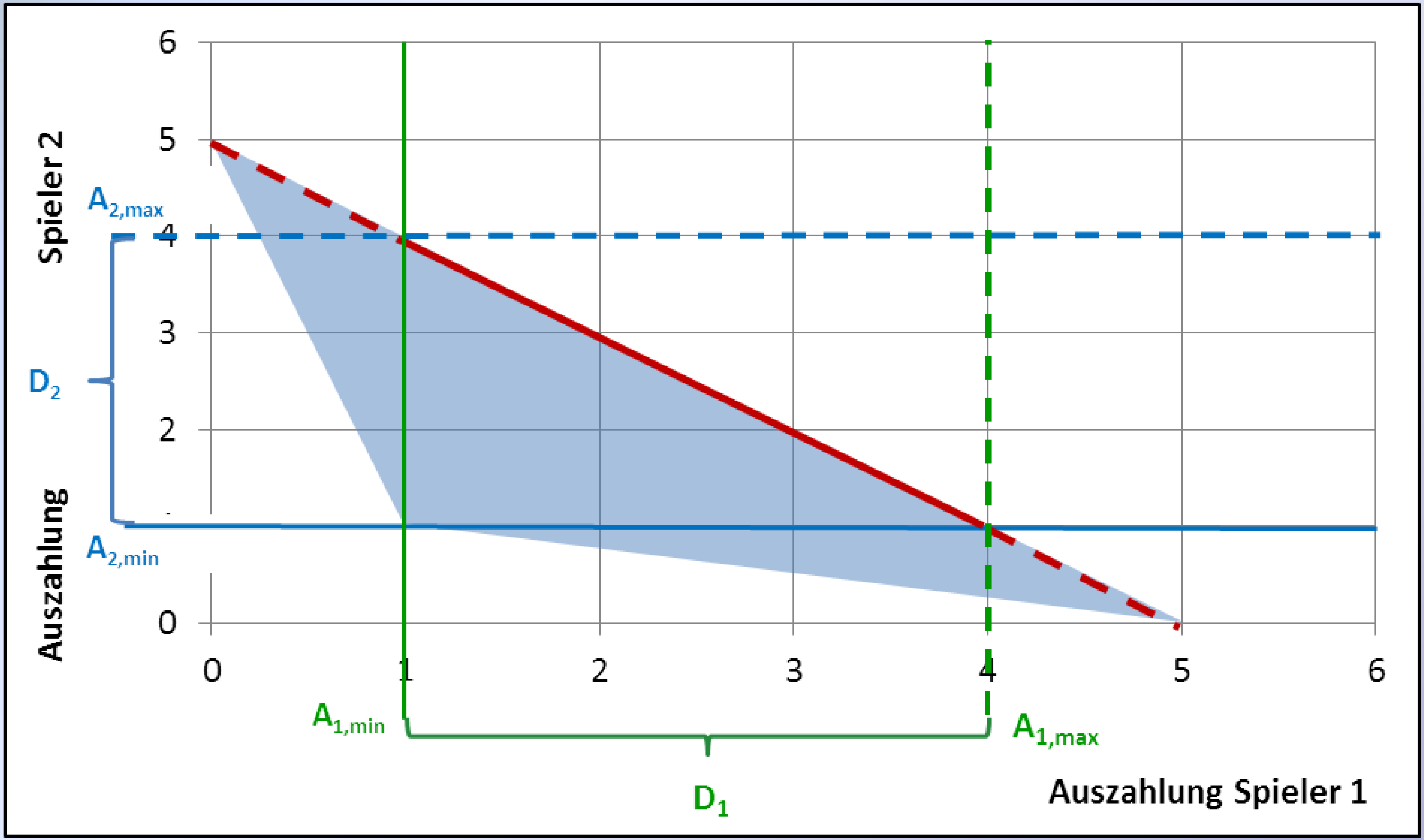
Grafische Lösung für den Fall linearer effizienter Rand (1):

- In der Lösung erhält jeder Spieler eine Auszahlung, die sowohl von seiner Mindestauszahlung als auch von seiner maximalen Auszahlung abhängt.
- Für die Differenz zwischen beiden Auszahlungen für Spieler 1 und 2 ergibt sich:

$$D_1 = A_{1,max} - A_{1,min}$$

$$D_2 = A_{2,max} - A_{2,min}$$

Grafische Lösung für den Fall linearer effizienter Rand (2) – Darstellung der Differenzen:



Grafische Lösung für den Fall linearer effizienter Rand (3) – Weiteres Vorgehen

- Jeder Spieler erhält seine Mindestauszahlung $A_{1,min}$ bzw. $A_{2,min}$ plus einen Anteil an seiner Differenz D_1 bzw. D_2. Dieser Anteil ist direkt proportional zu seinem Machtanteil. Der Machtanteil von Spieler 1 beträgt $M_1/(M_1+M_2)$ und der Machtanteil von Spieler 2 beträgt $M_2/(M_1+M_2)$. Damit ergeben sich für die Auszahlungen:

$$A_1 = A_{1,min} + \frac{M_1}{M_1 + M_2} D_1$$

Entsprechend für Spieler 2:

$$A_2 = A_{2,min} + \frac{M_2}{M_1 + M_2} D_2$$

Grafische Lösung für den Fall linearer effizienter Rand (4) – weiteres Vorgehen

- Da die Summe der Machtvariablen gleich 2 sein soll, kann auch geschrieben werden:

$$A_1 = A_{1,min} + 0{,}5 M_1 D_1$$

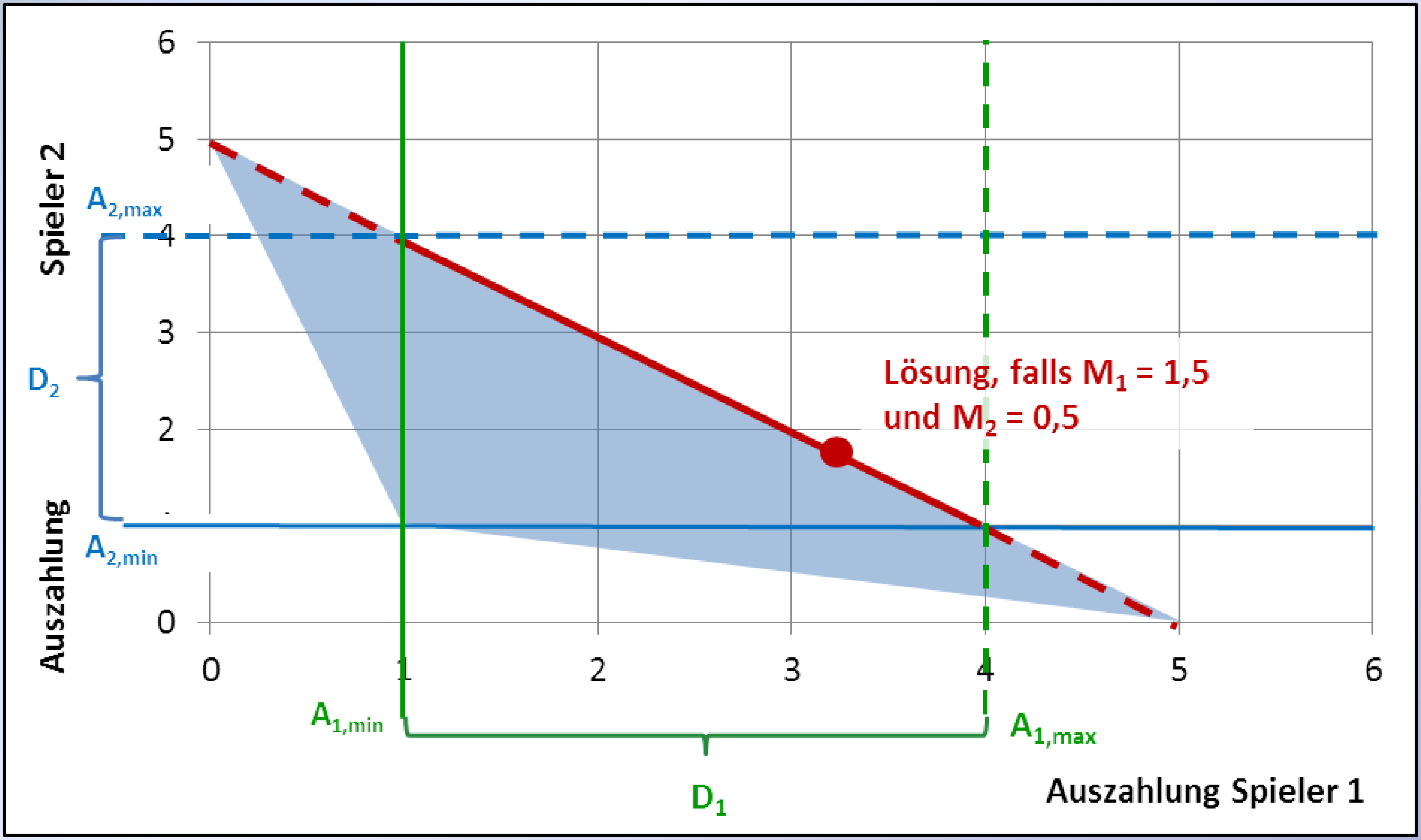
$$A_2 = A_{2,min} + 0{,}5 M_2 D_2$$

- Mit der Annahme, dass Spieler 1 eine Macht von 1,5 hat und Spieler 2 eine Macht von 0,5, erhält man durch einsetzen:

$$A_1 = A_{1,min} + 0{,}5 M_1 D_1 = 1 + 0{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 3 = 3{,}25$$

$$A_2 = A_{2,min} + 0{,}5 M_2 D_2 = 1 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 3 = 1{,}75$$

Grafische Lösung für den Fall linearer effizienter Rand (5) – Darstellung



Grafische Lösung für den Fall linearer effizienter Rand (6) – Erklärung

- Der Lösungspunkt liegt auf 75% der Strecke zwischen $A_{1,min}$ und $A_{1,max}$, da der Machtanteil von Spieler 1: 1,5/(1,5 + 0,5) = 0,75 bzw. 75% beträgt.
- Genauso liegt der Punkt auf 25% der Strecke zwischen $A_{2,min}$ und $A_{2,max}$ Diese 25% entsprechen dem Anteil des Spielers 2 an der insgesamt vorhandenen Macht.
- Hat ein Spieler alle Macht, dann erreicht er auch das Maximum seiner Auszahlung, wodurch der andere dann natürlich nur noch seine Mindestauszahlung bekommen würde. Die Lösung würde also in den Schnittpunkt der Maximalauszahlung des einen Spielers mit der Mindestauszahlung des anderen Spielers wandern.

Anwendungen:

Theoretische Unterstellung:

Es kommt zu einer Einigung, wenn dadurch eine Auszahlungskombination erreicht wird, die mindestens einen der Spieler besserstellt und keinen der Spieler schlechter als die nichtkooperative Lösung des Spiels. Es werden also stets effiziente Lösungen erreicht.

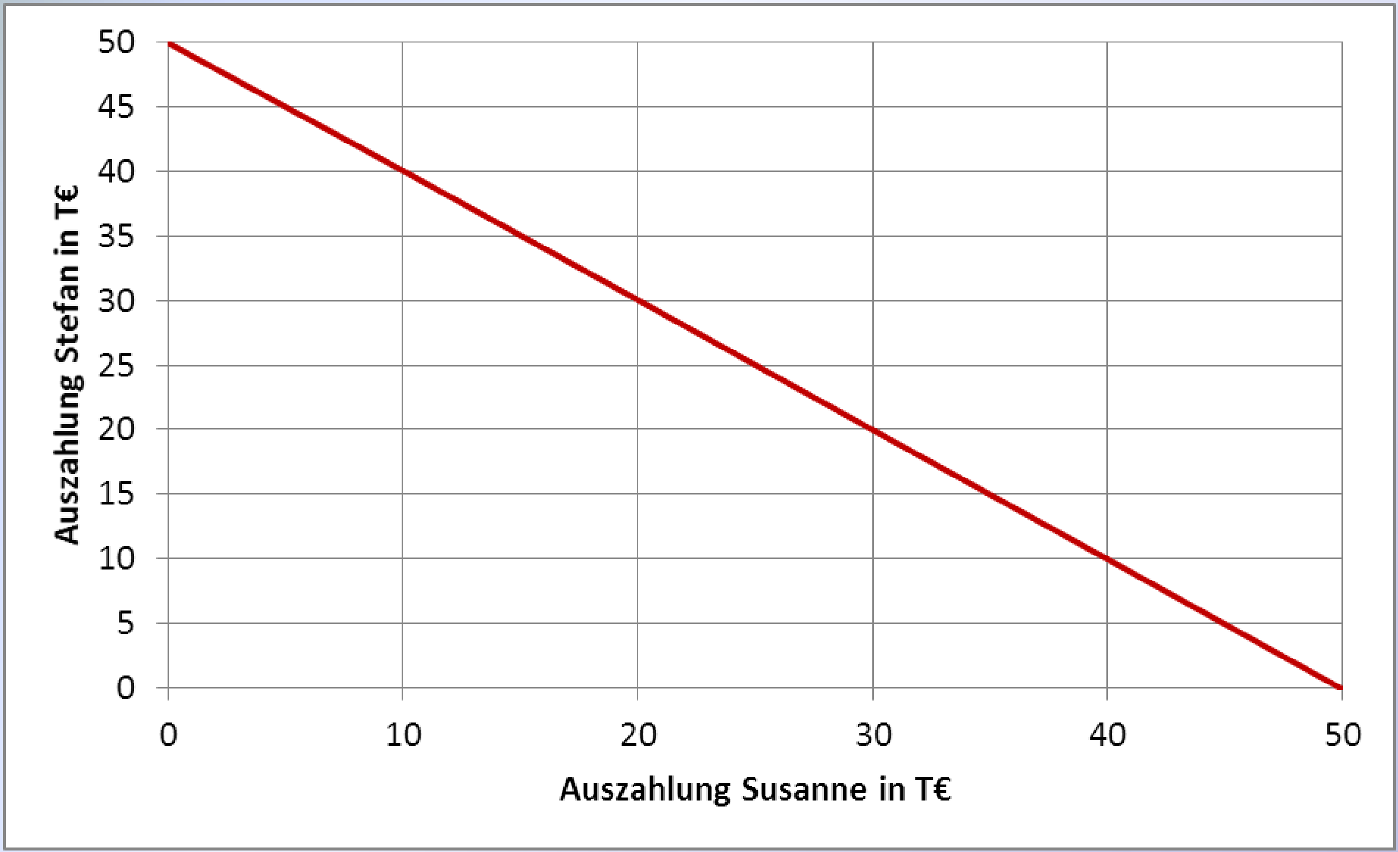
Problem:

Im realen Leben werden nicht immer effiziente Auszahlungskombinationen erreicht.

Beispiel:

- Susanne und Stefan streiten um eine Erbschaft in Höhe von 50.000€.

Beispiel (1) - Darstellung des effizienten Rand der Verhandlungsmenge:

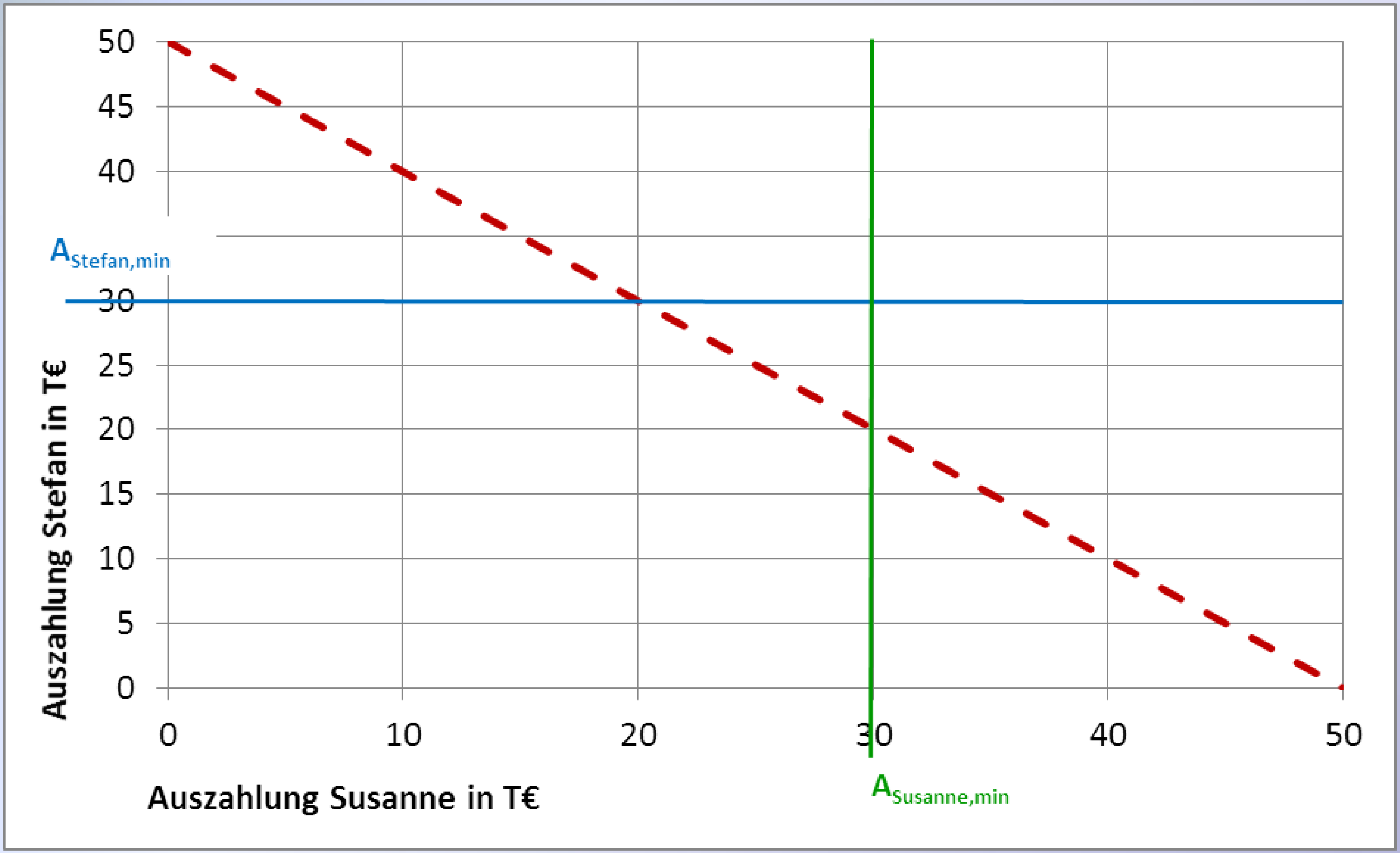


Jede Kombination von Auszahlungen, bei der die 50.000 € komplett an die beiden gehen, ist effizient.

Zusätzliche Annahme:

Sowohl Stefan, als auch Susanne glauben, in einem Prozess mindestens 30.000€ zugesprochen zu bekommen.

Beispiel (2) – Berücksichtigung der Mindestauszahlungen:



Problem:

Da sich die Mindestauszahlungen oberhalb des effizienten Randes schneiden, gibt es keine Auszahlungskombination, die auf dem effizienten Rand liegt und gleichzeitig für beide Spieler individuell akzeptabel wäre. Es gibt daher keine Lösung des Verhandlungsproblems.

Auswirkungen eines Gerichtsprozesses:

- Durch einen Gerichtsprozess wird zumindest einer von beiden weniger erhalten als seine erwartete Mindestauszahlung.
- Von den erwarteten Mindestauszahlungen muss also mindestens eine falsch sein. Da insgesamt nur 50.000€ vorhanden sind, aber beide Parteien erwarten 30.000€ zu erhalten, muss ein Fehler in den Einschätzungen der Mindestauszahlungen vorliegen.

Lösungsmöglichkeiten:

1. Aufgabe der Annahme von rationalen Akteuren.

2. Modifikation der Auszahlungen der Spieler um die Annahme rationaler Akteure nicht aufgeben zu müssen.

Beispiel:

- Menschen könnten einem Gerichtsurteil einen eigenen Wert beimessen.
- So könnten Susanne und Stefan zwar wissen, dass sie sich besser außergerichtlich einigen sollten, dass sie dann aber befürchten, sich ihr ganzes Leben lang Gedanken darüber zu machen, ob sie in einem Prozess nicht doch mehr hätten bekommen können als den Betrag, auf den sie sich außergerichtlich geeinigt hätten.

Nutzungshinweise: