

Grundzüge der Spieltheorie

Prof. Dr. Stefan Winter
Ruhr-Universität Bochum

Begleitmaterialien zur Vorlesung sind abrufbar unter:
<http://www.rub.de/spieltheorie>

Die folgende Vorlesungsaufzeichnung und das hier vorliegende Skript beruhen auf dem Buch:

„Grundzüge der Spieltheorie“
von **Stefan Winter**,
Springer Gabler,
Erschienen im Dezember 2014



5. Dynamische Spiele mit unvollständiger Information

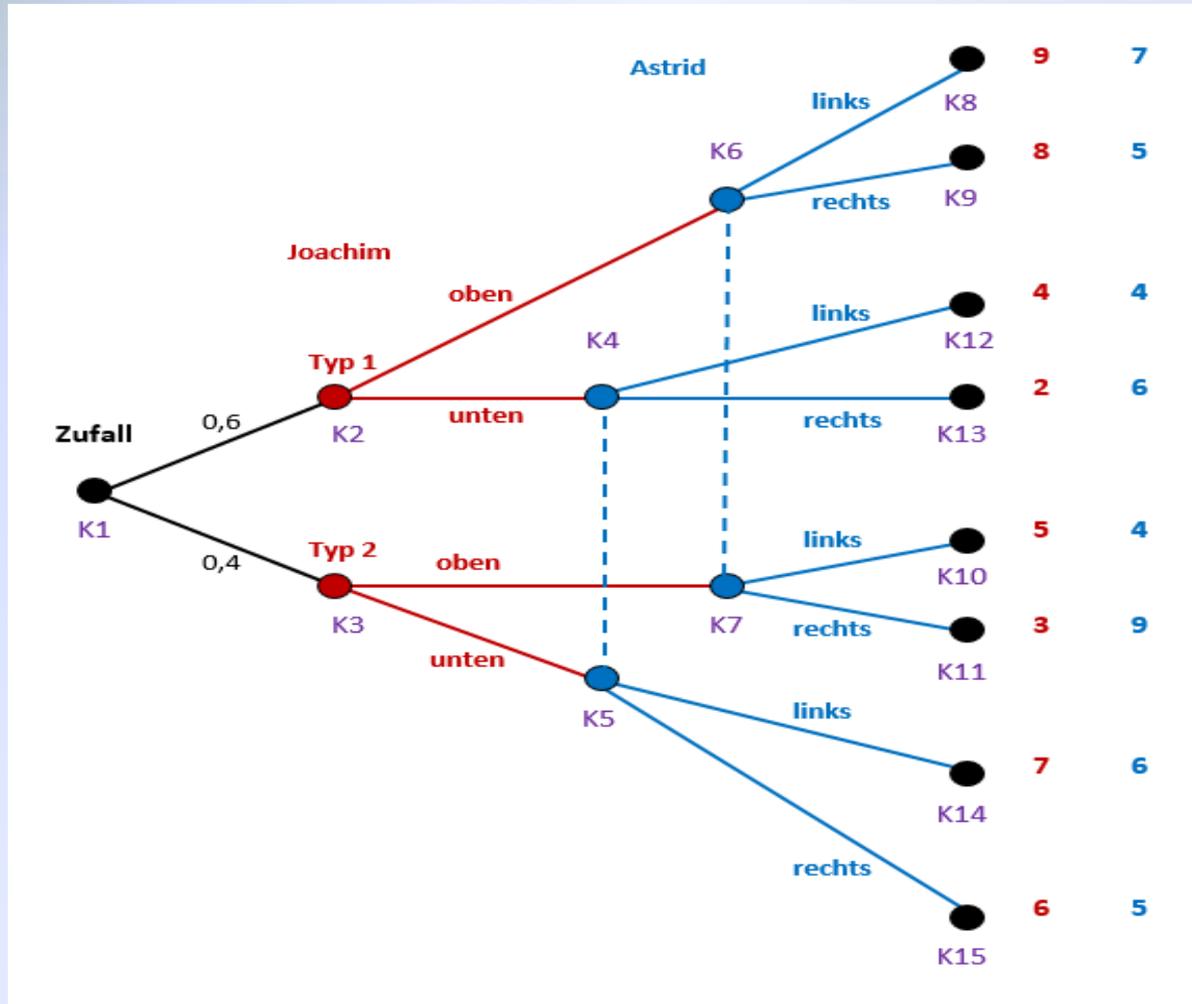
Kernfrage:

Ist es für die später ziehenden Spieler möglich aus dem beobachteten Verhalten der vorher ziehenden Spieler Rückschlüsse über deren Typen zu ziehen?

Einführendes Beispiel:

- Es gibt zwei Spieler Joachim und Astrid
- Joachim zieht zuerst entweder „oben“ oder „unten“, danach zieht Astrid „links“ oder „rechts“.
- Astrid kann zwar erkennen, welchen Zug Joachim gemacht hat, weiß aber nicht welche Auszahlungen für ihn resultieren werden.
- Joachim ist entweder vom Typ 1 oder Typ 2.
- Mit welchem Typ Astrid konfrontiert ist, erscheint aus ihrer Perspektive zufällig.

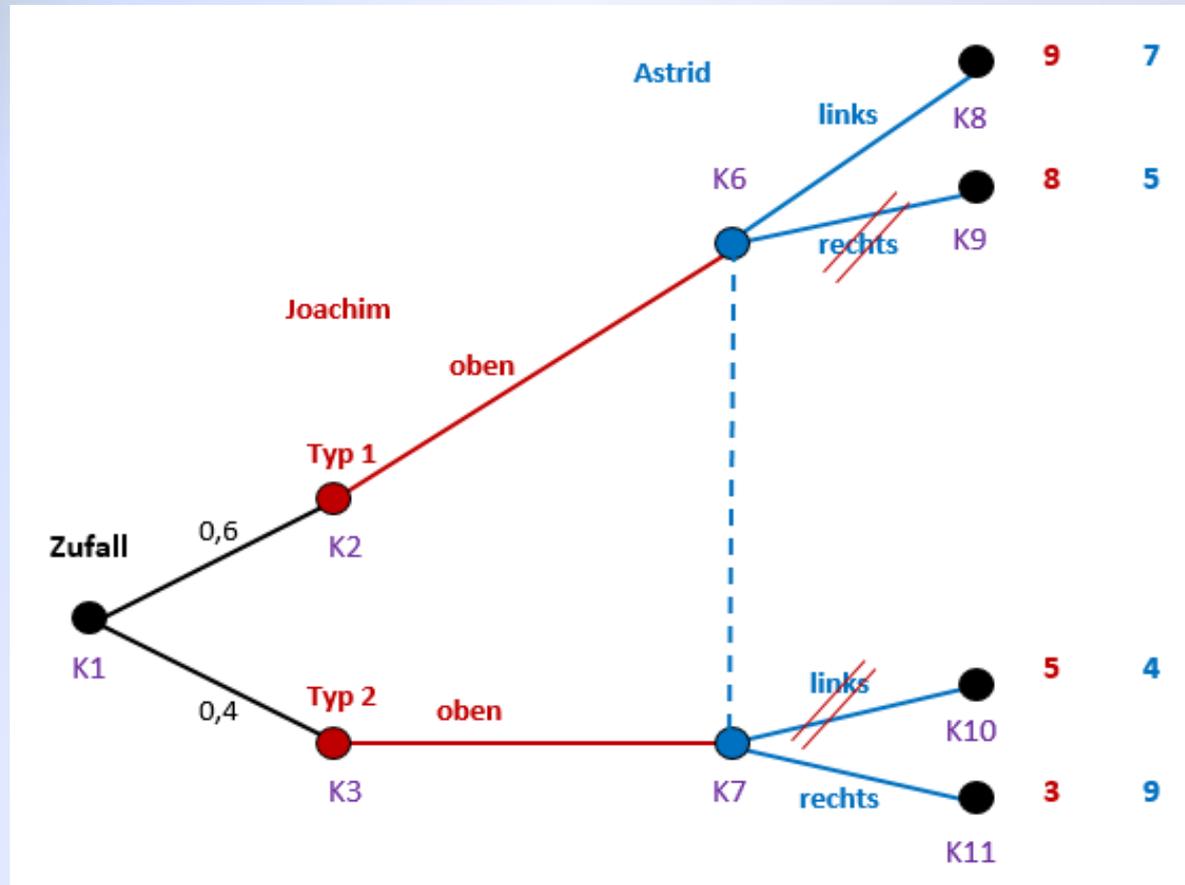
Darstellung als Spielbaum:



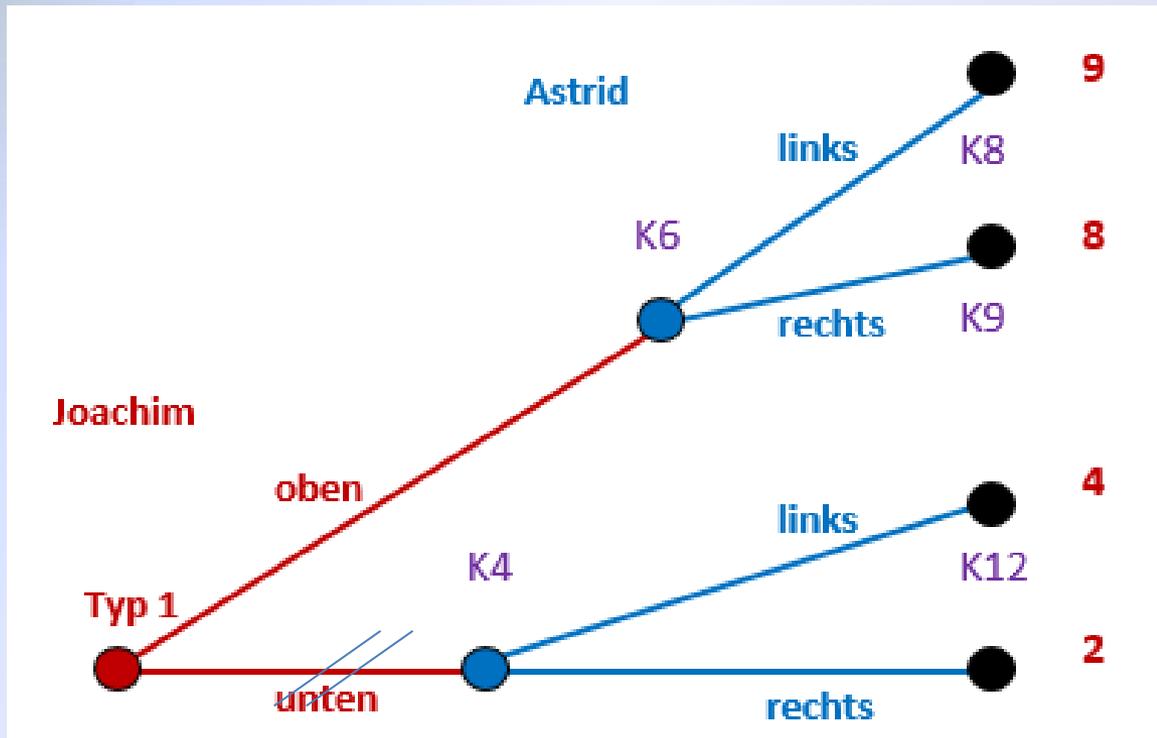
Lösungsweg:

- Da sie nicht den Typ von Joachim kennt, weiß Astrid nur, dass sie entweder in einem der Entscheidungsknoten (K4 oder K5) oder in einem der Knoten (K6 oder K7) ist.
- Aus diesem Grund kann bei dem Spiel nicht einfach eine Rückwärtsinduktion durchgeführt werden.
- Astrid würde nämlich abhängig von dem Knoten in dem sie sich befindet unterschiedliche Züge wählen.

Astrids Strategiewahl, wenn Joachim „oben“ wählt:

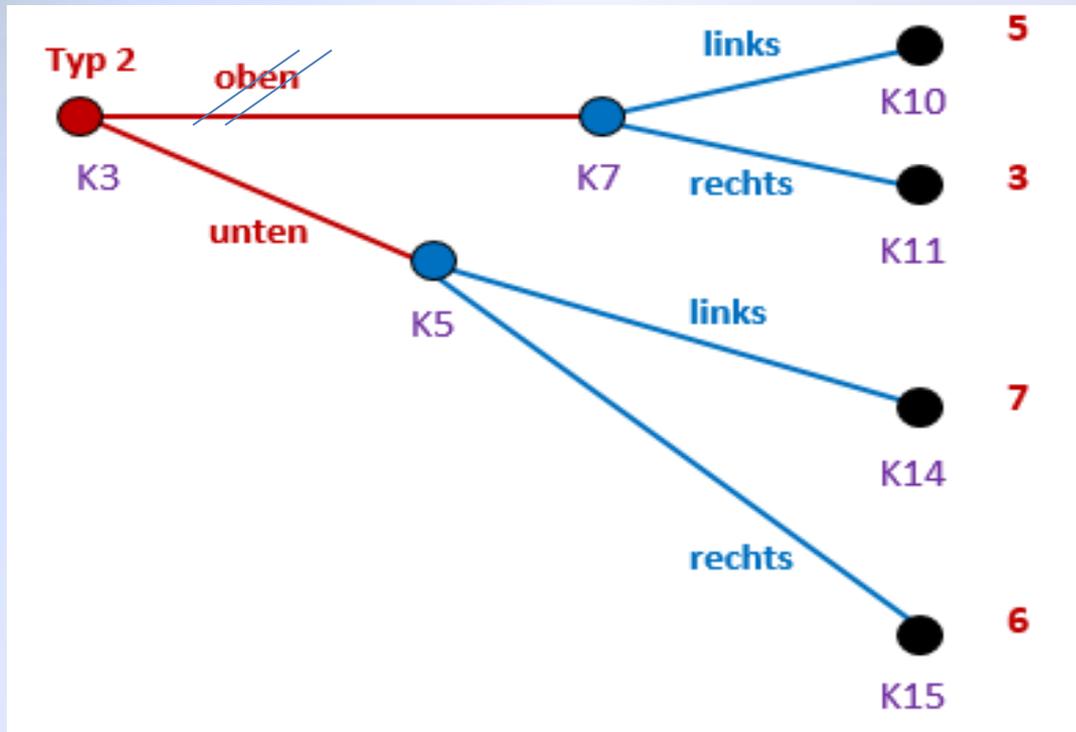


Joachims Strategiewahl, wenn er Typ 1 ist:



Joachim wählt „oben“, da ihm das mindestens eine Auszahlung von 8 garantiert, während „unten“ höchstens eine Auszahlung von 4 erbringt.

Joachims Strategiewahl, wenn er Typ 2 ist:



Joachim wählt „unten“, analoge Begründung.

Schlussfolgerung:

- Joachim wird auf jeden Fall „oben“ wählen, wenn er von Typ 1 ist und „unten“, wenn er von Typ 2 ist.
- Astrid kann daraus folgern, dass sie im Knoten K5 ist, wenn Joachim „unten“ gespielt hat und im Knoten K7 wenn er „oben“ gewählt hat.

Lösung mit Bayesregel (1) – Aufstellen der Randwahrscheinlichkeiten:

		Zug		Gesamt
		oben	unten	
Typ	Typ 1			0,6
	Typ 2			0,4
	Gesamt			1

Lösung mit Bayesregel (2) – Einsetzen der bekannten Informationen:

		Zug		Gesamt
		oben	unten	
Typ	Typ 1	0,6 $w(\text{Typ 1 und "oben"})$		0,6 $w(\text{Typ 1})$
	Typ 2		0,4	0,4
Gesamt				1

Lösung mit Bayesregel (3) – Ergänzen der fehlenden Felder:

		Zug		Gesamt
		oben	unten	
Typ	Typ 1	0,6 $w(\text{Typ 1 und "oben"})$	0	0,6 $w(\text{Typ 1})$
	Typ 2	0	0,4	0,4
Gesamt		0,6	0,4	1

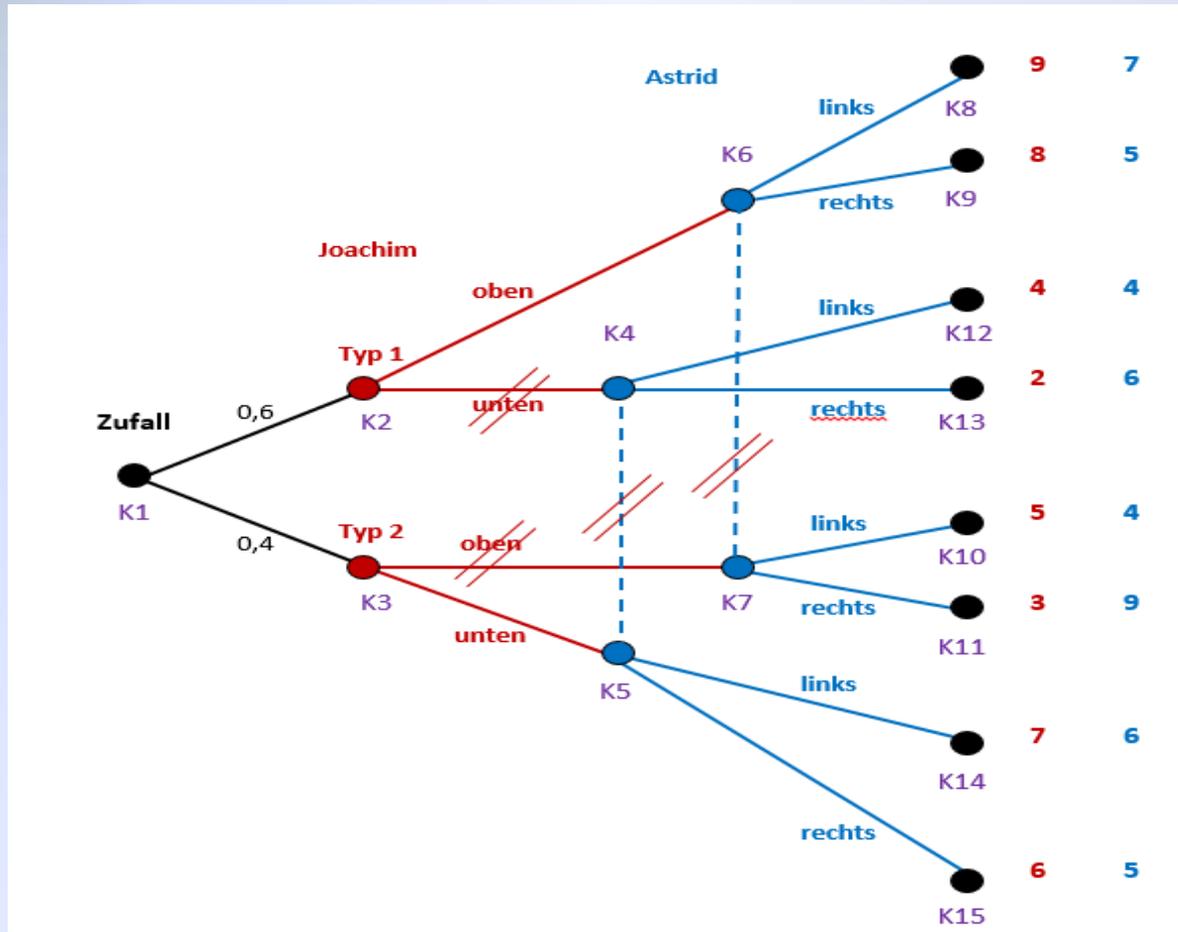
Lösung mit Bayesregel (4) – Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeiten:

Wie hoch ist aus Astrids Perspektive die Wahrscheinlichkeit, dass sie es mit einem Typ 1 zu tun hat, wenn sie den Zug „**oben**“ beobachtet?

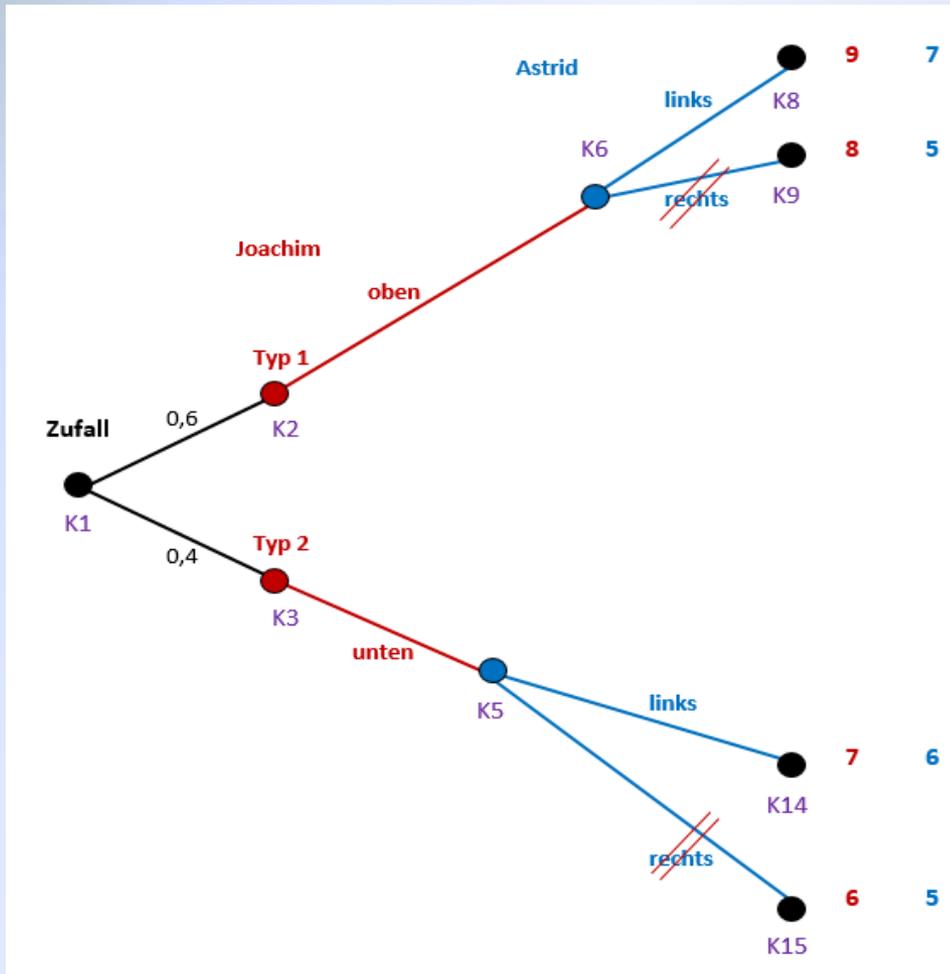
$$w(\text{Typ 1} \mid \text{oben}) = \frac{w(\text{Typ 1 und "oben"})}{w(\text{oben})} = \frac{0,6}{0,6} = 1$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass Astrid sich im Knoten **K6** befindet, wenn Joachim „**oben**“ gezogen hat, ist 1.

Streichung aller nicht relevanten Kanten und Verknüpfungen:



Lösung mit Hilfe der Rückwärtsinduktion:



Ergebnis:

Joachim:

Typ 1 spielt „oben“,

Typ 2 spielt „unten“

Astrid:

spielt „links“, falls Joachim „oben“
gezogen hat

spielt „links“, wenn er „unten“
gezogen hat

Gleichgewichte:

Voraussetzung:

Jeder Spieler handelt vernünftig, d.h. er wählt die für ihn beste Alternative.

Gleichgewicht aus dem Beispiel:

Strategie Joachim: Ich spiele „oben“, wenn ich vom Typ 1 bin und „unten“, wenn ich vom Typ 2 bin.

Strategie Astrid: Ich spiele „links“, wenn Joachim „oben“ gespielt hat und ich spiele „links“, wenn Joachim „unten“ gespielt hat.

Wahrscheinlichkeitseinschätzung Astrid: Wenn Joachim „oben“ gespielt hat, nehme ich mit Sicherheit an, dass Joachim vom Typ 1 ist und ich mich im Entscheidungsknoten K6 befinde. Wenn Joachim „unten“ gespielt hat, nehme ich mit Sicherheit an, dass Joachim vom Typ 2 ist und ich mich also im Knoten K5 befinde.

Bestandteile eines Gleichgewichts bei dynamischen Spielen mit unvollständiger Information:

- Die optimalen Strategiekombinationen
- **Und** die Wahrscheinlichkeitseinschätzungen („beliefs“), mit denen nicht vollständig informierte Spieler ihre Strategien begründen.

Separierende und Pooling-Gleichgewichte

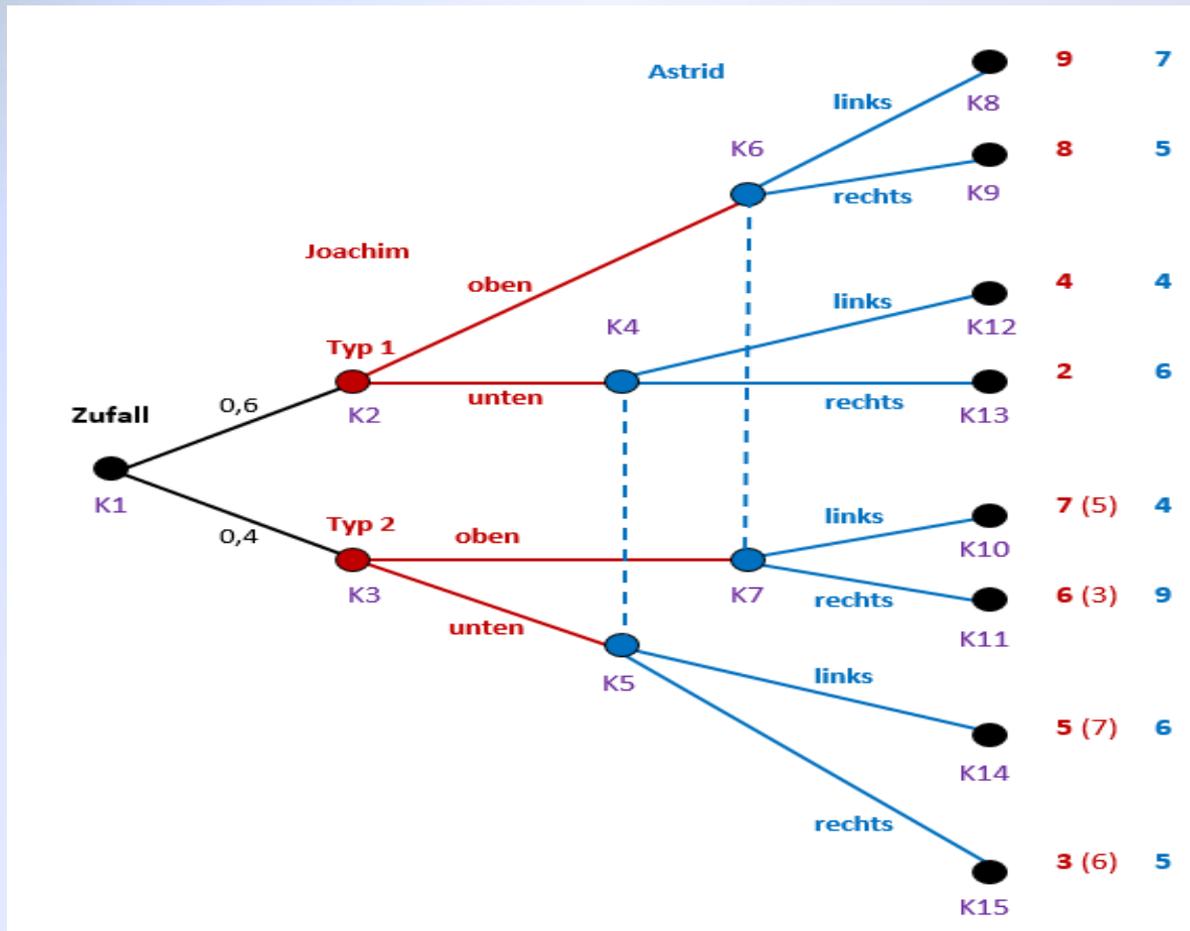
Begriff: „Separierende Gleichgewichte“:

In einem separierenden Gleichgewicht kann jeder Spieler jeden Typ aller anderen Spieler eindeutig an den Verhaltensweisen erkennen.

Begriff: „Pooling-Gleichgewicht“:

In einem Pooling-Gleichgewicht ist die Erkennung des Spielertyps anhand den Verhaltensweisen nicht eindeutig möglich.

Strategiebaum mit veränderten Auszahlungen für Joachim: (die alten Zahlen stehen in Klammern)



Schlussfolgerung:

- Joachim wird immer „oben“ wählen, da oben für ihn jetzt immer dominant ist, egal, von welchem Typ er ist.
 - Astrid, weiß also, dass Joachim immer oben spielt, aber sie erkennt nicht mehr, ob sie sich im Entscheidungsknoten K6 oder K7 befindet.
 - Ihr Problem ist nun, dass es besser wäre, „links“ zu spielen, wenn sie in K6 wäre und „rechts“ wenn sie in K7 wäre.
 - Ihre erwarteten Auszahlung hängt davon ab, wie hoch sie die Wahrscheinlichkeit schätzt, in einem der beiden Knoten K6 oder K7 zu sein.
- Anwendung der Bayes-Regel, um zu wissen, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, es mit einem Typ 1 oder 2 zu tun zu haben, wenn Joachim „oben“ gezogen hat.

Lösung mit Bayesregel (1) – Aufstellen der Randwahrscheinlichkeiten:

		Zug		Gesamt
		oben	unten	
Typ	Typ 1			0,6
	Typ 2			0,4
	Gesamt			1

Lösung mit Bayesregel (2) – Einsetzen der bekannten Informationen:

		Zug		Gesamt
		oben	unten	
	Typ 1		0	0,6
	Typ 2		0	0,4
	Gesamt		0	1

Lösung mit Bayesregel (3) – Ergänzen der fehlenden Felder:

		Zug		Gesamt
		oben	unten	
Typ	Typ 1	0,6 $= w(\text{Typ 1 und oben})$	0	0,6
	Typ 2	0,4	0	0,4
	Gesamt	1 $= w(\text{oben})$	0	1

Lösung mit Bayesregel (4) – Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeiten:

Wie hoch ist aus Astrids Perspektive die Wahrscheinlichkeit, dass sie es mit einem Typ 1 zu tun hat, wenn sie den Zug „oben“ beobachtet hat?

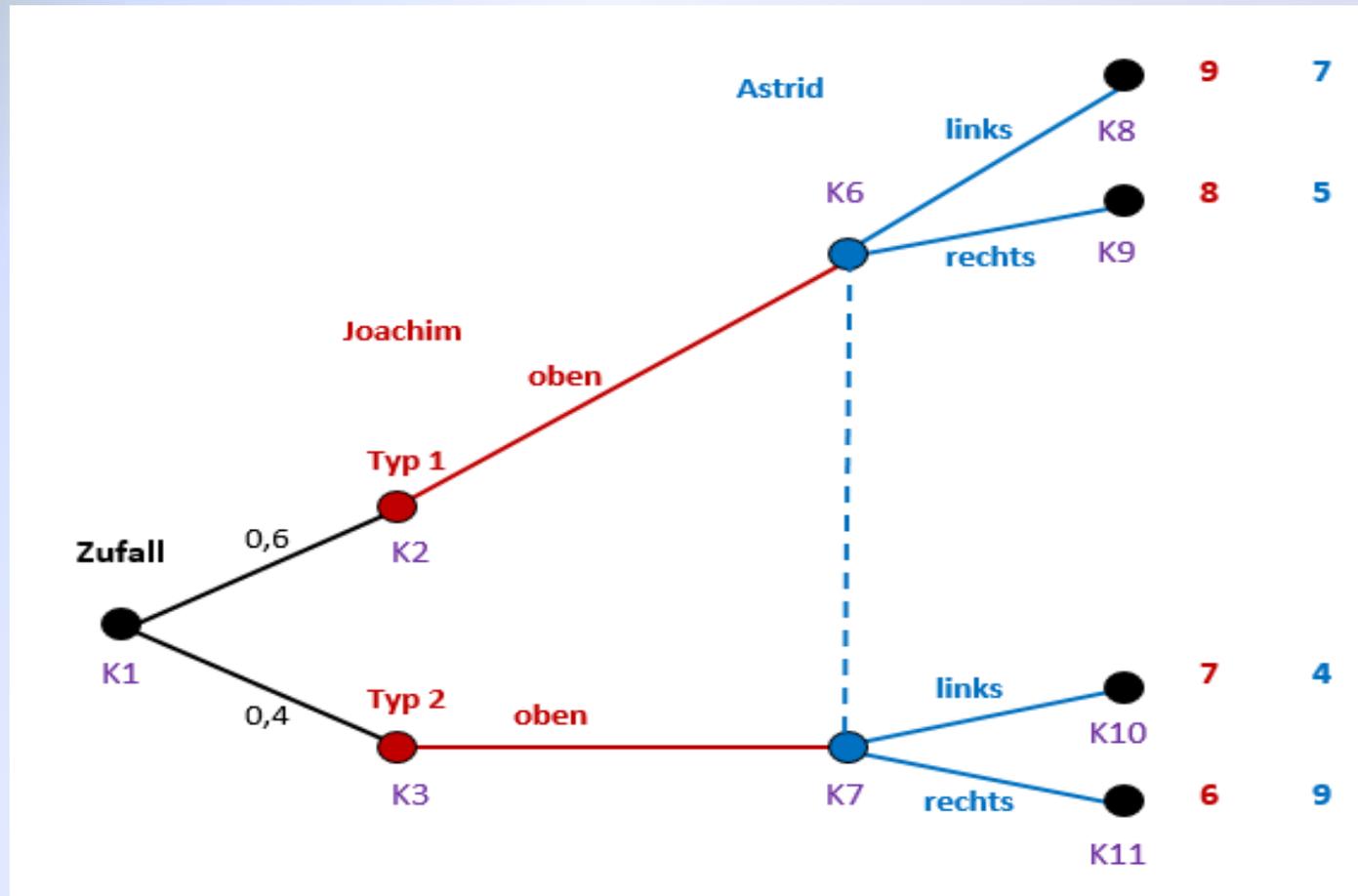
$$w(\text{Typ 1} \mid \text{oben}) = \frac{w(\text{Typ 1 und oben})}{w(\text{oben})} = \frac{0,6}{1} = 0,6$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass Astrid sich im Knoten K6 befindet, wenn Joachim „oben“ gezogen hat ist 0,6.

Dann aber:

Die Wahrscheinlichkeit, dass Astrid sich im Knoten K7 befindet, wenn Joachim „oben“ gezogen hat ist 0,4.

Streichung aller nicht relevanten Kanten und Verknüpfungen:



Astrids erwartete Auszahlungen, wenn Joachim „oben“ spielt:

$$E(A_{links}) = 0,6 * 7 + 0,4 * 4 = 5,8$$

$$E(A_{rechts}) = 0,6 * 5 + 0,4 * 9 = 6,6$$

Ergebnis:

Astrid sollte „rechts“ spielen, wenn Joachim „oben“ wählt.

Frage:

Wie sollte Astrid handeln, falls Joachim „**unten**“ spielt, obwohl es die schlechtere Strategie ist?

Herangehensweise:

Astrid muss herausfinden, mit welcher Wahrscheinlichkeit sie sich in den Knoten **K4** oder **K5** befindet. Sie müsste also z.B. berechnen:

$$w(\text{Typ 1} \mid \text{unten}) = \frac{w(\text{Typ 1 und unten})}{w(\text{unten})}$$

Berechnung der Wahrscheinlichkeiten:

Unter der Annahme, dass Joachim vernünftig handelt und seine Gleichgewichtsstrategie spielt, ergeben sich folgende Wahrscheinlichkeiten:

		Zug		Gesamt
		oben	unten	
Typ	Typ 1	0,6	0 $= w(\text{Typ 1 und unten})$	0,6
	Typ 2	0,4	0	0,4
Gesamt		1	0 $= w(\text{unten})$	1

Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeiten mit Bayes-Regel:

Als Wahrscheinlichkeit, dass Astrid mit einem Typ 1 konfrontiert ist, wenn Joachim „**unten**“ spielt, ergibt sich:

$$w(\text{Typ 1} \mid \text{unten}) = \frac{w(\text{Typ 1 und unten})}{w(\text{unten})} = \frac{0}{0}$$

Problem:

Der Ausdruck $0/0$ ist nicht definiert, weil man nicht durch Null teilen darf. Außerdem ergäbe sich für die Gegenwahrscheinlichkeit ebenfalls $0/0$, was zusammen keinesfalls eine Summe von 1 ergibt.

Folgerung:

Astrid kann unter der Annahme, dass Joachim eine Gleichgewichtsstrategie spielt, keine sinnvollen Beliefs bilden. Das Weglassen der Annahme, dass Joachim eine Gleichgewichtsstrategie spielt, ist jedoch nicht möglich, da diese Annahme essentiell zur Bestimmung eines Gleichgewichts ist.

Lösungsansatz:

In den Fällen, in denen sie ihre Beliefs nicht mit der Bayesregel berechnen kann, darf Astrid beliebige, selbst ausgedachte Beliefs nutzen. Einzige Einschränkungen: Keine Wahrscheinlichkeit darf kleiner Null oder größer 1 sein und die Summe der Wahrscheinlichkeiten muss genau 1 ergeben.

Annahmen:

Joachim ist vom Typ 1, wenn er „**unten**“ spielt. Astrid befindet sich dann im Knoten **K4** und spielt „rechts“.

Gleichgewicht des Spiels:

Strategie Joachim: Ich spiele „oben“, wenn ich vom Typ 1 bin und „oben“, wenn ich vom Typ 2 bin.

Strategie Astrid: Ich spiele „rechts“, wenn Joachim „oben“ gespielt hat und ich spiele „rechts“, wenn Joachim „unten“ gespielt hat.

Belief Astrid: Wenn Joachim „oben“ gespielt hat, nehme ich an, dass Joachim mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,6 vom Typ 1 ist und ich mich mit dieser Wahrscheinlichkeit im Entscheidungsknoten K6 befinde. Dementsprechend nehme ich, dass ich mich mit der Gegenwahrscheinlichkeit von 0,4 im Knoten K7 befinde, wenn Joachim „oben“ gespielt hat. Wenn Joachim „unten“ gespielt hat, nehme ich an, dass Joachim vom Typ 1 ist und ich mich also im Knoten K5 befinde.

Es handelt sich um ein Pooling-Gleichgewicht, da die unterschiedlichen Typen sich nicht durch ihr Verhalten separieren.

Perfekte bayesianische Gleichgewichte:

Idee:

Zur Bestimmung von Gleichgewichten in dynamischen Spielen mit unvollständiger Information gehören sowohl die Strategien als auch die Beliefs der Spieler. Wenn die Bildung der Beliefs und die daraus folgende Ableitung der Strategien sinnvollen Anforderungen entsprechen, heißt das daraus bestimmte Gleichgewicht „perfektes bayesianisches Gleichgewicht“.

Anforderungen:

1. Jeder Spieler muss, wenn er am Zug ist, einen Belief darüber haben, in welchem Knoten er sich befindet.
2. Die Züge, die die Spieler ausführen, sind die bestmöglichen Züge, die sich unter Beachtung der Beliefs ergeben.
3. Die Beliefs jedes Spielers werden nach der Bayesregel gebildet unter der Annahme, die anderen Spieler würden Gleichgewichtsstrategien verfolgen.
4. Für Entscheidungsknoten, die nicht erreicht werden können, wenn alle Spieler Gleichgewichtsstrategien spielen, sind die Beliefs trotzdem nach der Bayesregel zu bilden, sofern dies möglich ist. Ist dies nicht möglich, können die Beliefs frei gewählt werden.

Rückblick auf die Spiele:

- In der *Originalversion* des Spiels sind die Anforderungen 1-4 erfüllt. Für Entscheidungsknoten, die mit Sicherheit nicht erreicht werden konnten, konnten die Beliefs trotzdem nach der Bayesregel berechnet werden. Für diese Knoten konnten mittels Bayesregel Wahrscheinlichkeiten von Null ermittelt werden. → Alle Anforderungen sind erfüllt, es handelt sich um ein perfektes bayesianisches Gleichgewicht.
- Für die *abgewandelte Form* des Spiels war es nicht möglich, alle Beliefs nach der Bayesregel zu berechnen. In dem Fall konnten gemäß Anforderung 4 die Beliefs frei gewählt werden. → Alle Anforderungen sind erfüllt, es handelt sich um ein perfektes bayesianisches Gleichgewicht.

Anwendungen:

Arbeitsmarktsignale

Beispiel:

- Die Unternehmerin Anja möchte Arbeitnehmer einstellen und diese gemäß ihrer Produktivität bezahlen.
- Die Produktivität der Bewerber ist bei der Einstellung nicht bekannt.
- Eine nachträgliche Anpassung der Löhne ist nicht möglich. Sie werden bereits zum Zeitpunkt der Einstellung vertraglich vereinbart.

Annahmen:

- Es gibt zwei Typen von Arbeitnehmern, nämlich produktive und unproduktive. Produktive Arbeitnehmer erwirtschaften einen Bruttoertrag von 10, unproduktive von 6. Die Auszahlung von Anja ergibt sich aus der Differenz zwischen Bruttoertrag und dem bezahlten Lohn.
- Bewerber können an einer nicht *kostenlosen!* Schulungsmaßnahme teilnehmen.

Frage:

Kann Anja aus der Teilnahme an der Schulungsmaßnahme schlussfolgern, ob sie es mit einem produktiven oder einen unproduktiven Bewerber zu tun hat?

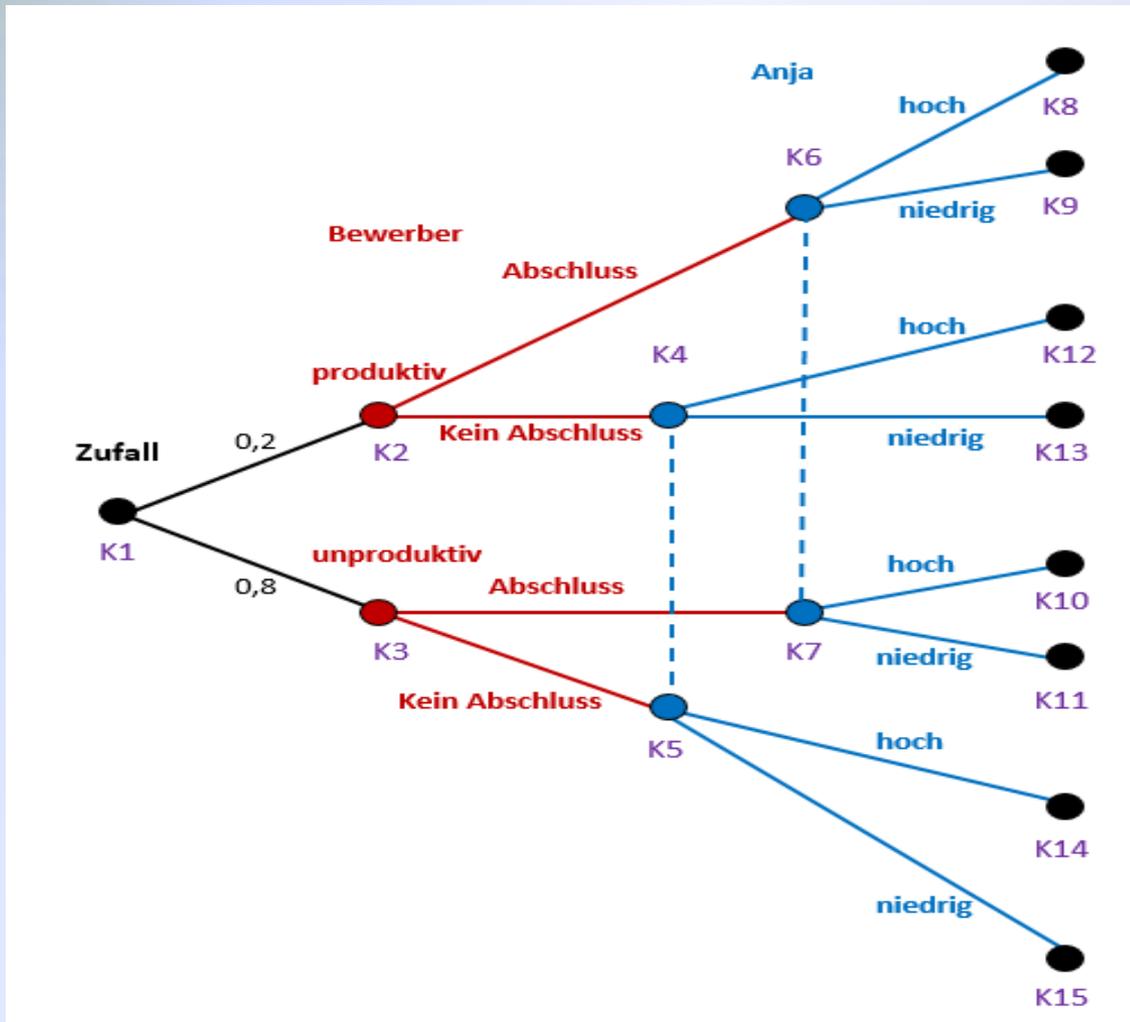
Lösungsidee:

Prinzipiell sind nur zwei Arten von separierenden und zwei Arten von Pooling-Gleichgewichten denkbar:

- Bei den separierenden würden entweder die produktiven den Abschluss erwerben und die unproduktiven nicht, oder umgekehrt.
- In den Pooling-Gleichgewichten hingegen würden entweder alle die Schulungsmaßnahme besuchen oder keiner.

→ **Das Ergebnis hängt von dem Preis der Schulungsmaßnahme für die jeweiligen Arbeitnehmer und Anjas Lohnsetzungsstrategie ab.**

Darstellung des Spiels ohne Auszahlungen



Lösungsweg:

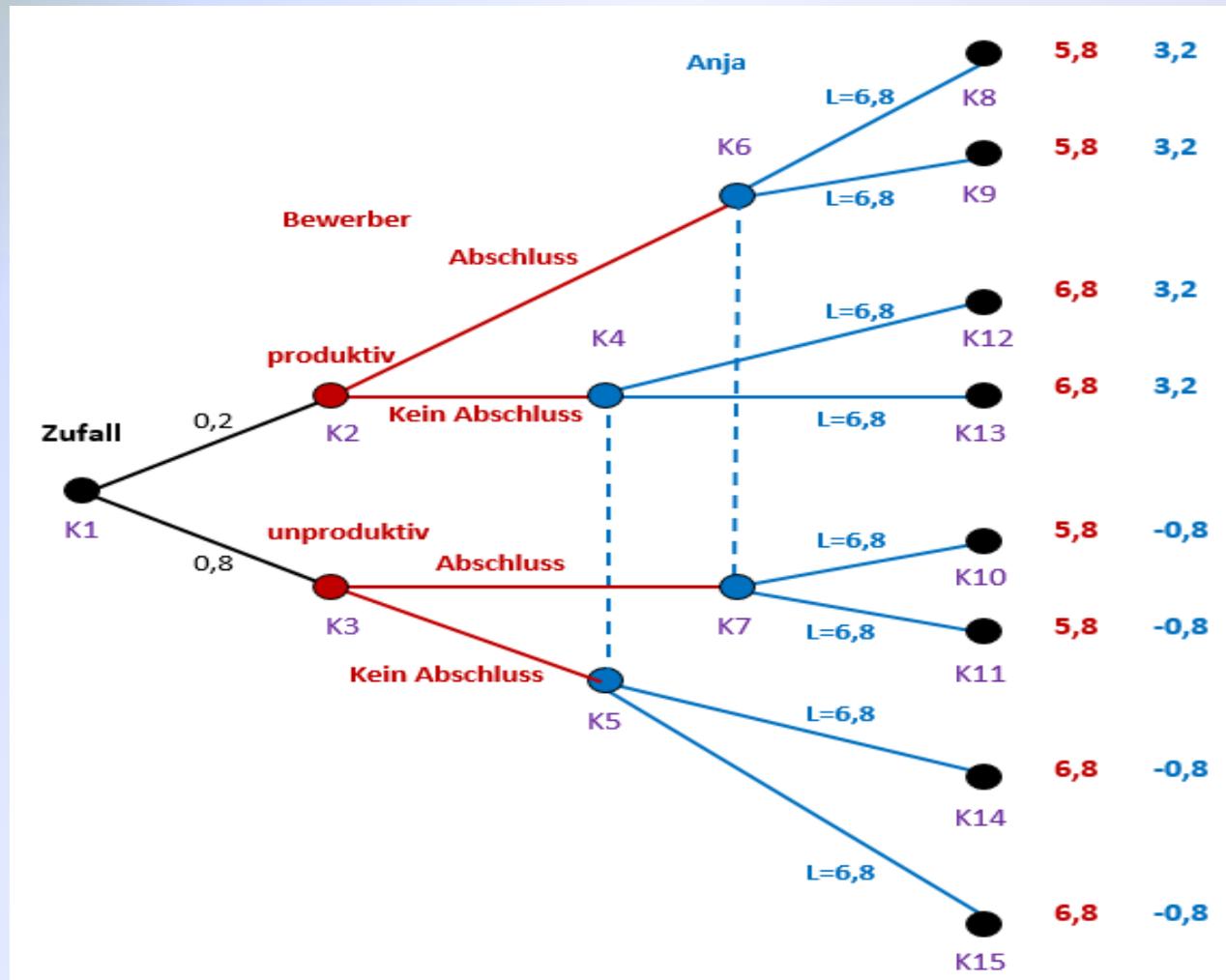
- Wenn Anja die produktiven und die unproduktiven Arbeitnehmer nicht unterscheiden kann, muss sie beiden den gleichen Lohn bezahlen.
- In diesem Fall entspricht der Lohn dem *erwarteten Bruttoertrag* aller Arbeitnehmer. Mit einem Anteil von 20% Produktiven, deren Bruttoertrag bei 10 liegt und 80% Unproduktiven, deren Bruttoertrag 6 beträgt, ergibt sich:

$$E(B) = 0,2 * 10 + 0,8 * 6 = 6,8$$

- Anjas Auszahlung beträgt:
 - bei Einstellung eines Produktiven: $10 - 6,8 = 3,2$
 - bei Einstellung eines Unproduktiven: $6 - 6,8 = -0,8$

→ Da sich die Löhne nicht unterscheiden, gilt hoher Lohn = niedriger Lohn.
Anja zahlt immer $L = 6,8$

Spielbaum mit $L = 6,8$ und Kosten für den Abschluss = 1,0:



Pooling-Gleichgewicht:

Strategie Bewerber: Ich spiele „**Kein Abschluss**“, wenn ich vom Typ „produktiv“ bin und „**Kein Abschluss**“, wenn ich vom Typ „unproduktiv“ bin.

Strategie Anja: Ich spiele „L= 6,8“, wenn Bewerber „**Kein Abschluss**“ gespielt hat und ich spiele „L = 6,8“, wenn Bewerber „**Abschluss**“ gespielt hat.

Belief Anja: Wenn Bewerber „**Kein Abschluss**“ gespielt hat, nehme ich an, dass Bewerber mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,2 vom Typ „produktiv“ ist und ich mich mit dieser Wahrscheinlichkeit im Entscheidungsknoten **K4** befinde. Dementsprechend nehme ich, dass ich mich mit der Gegenwahrscheinlichkeit von 0,8 im Knoten **K5** befinde, wenn Bewerber „**Kein Abschluss**“ gespielt hat. Wenn Bewerber „**Abschluss**“ gespielt hat, nehme ich mit Sicherheit an, dass Bewerber vom Typ unproduktiv ist und ich mich also im Knoten **K7** befinde (frei gewählter Belief!).

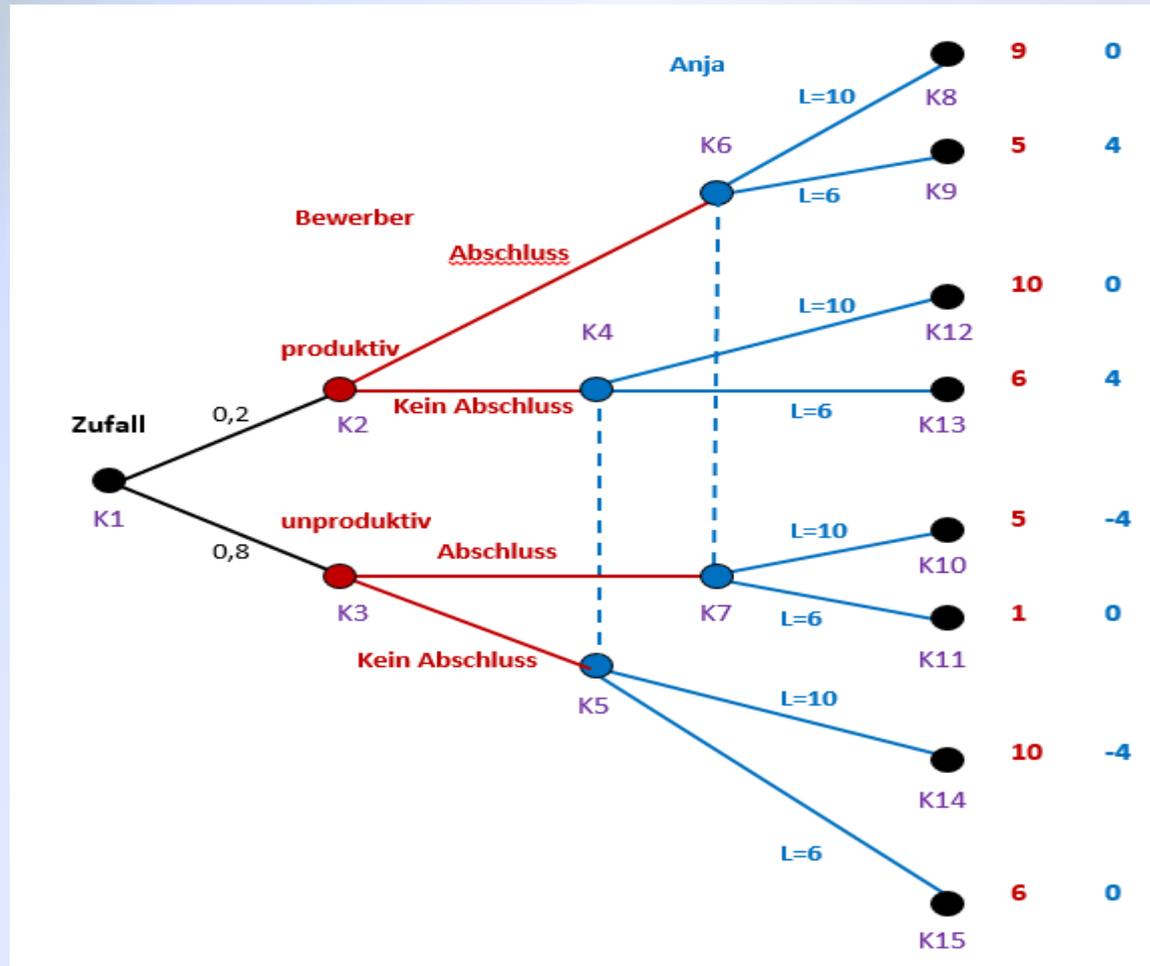
Fazit:

Der Abschluss wird nicht erworben, wenn er nicht durch höhere Löhne abgegolten wird.

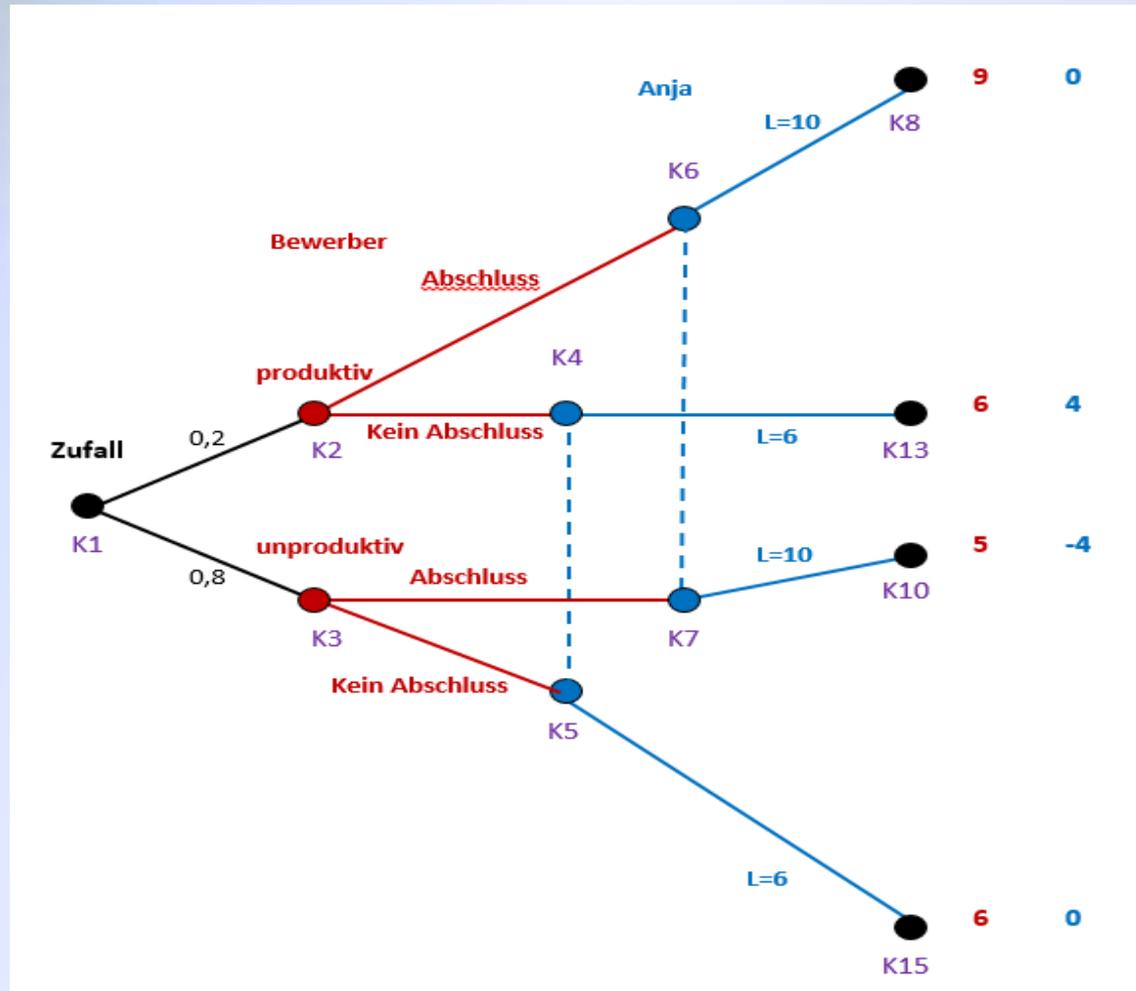
Zusätzliche Annahmen:

- Anja will ihre Lohnsetzung ändern. Bewerbern mit Abschluss sollen einen Lohn in Höhe von 10 und Bewerber ohne Abschluss nur einen Lohn von 6 erhalten.
- Der Erwerb des Abschluss für einen unproduktiven Typen kostet nun 5, für einen produktiven Spielertyp weiterhin nur 1.

Spielbaum mit differenzierter Lohnsetzung



Streichung der nichterreichbaren Züge und Endknoten:



Separierendes Gleichgewicht

Strategie Bewerber: Ich spiele „Abschluss“, wenn ich vom Typ „produktiv“ bin und „Kein Abschluss“, wenn ich vom Typ „unproduktiv“ bin.

Strategie Anja: Ich spiele „L= 10“, wenn Bewerber „Abschluss“ gespielt hat und ich spiele „L = 6“, wenn Bewerber „Kein Abschluss“ gespielt hat.

Belief Anja: Wenn Bewerber „Kein Abschluss“ gespielt hat, nehme ich an, dass Bewerber vom Typ „unproduktiv“ ist und ich mich mit Sicherheit im Knoten K5 befinde. Wenn Bewerber „Abschluss“ gespielt hat, nehme ich mit Sicherheit an, dass Bewerber vom Typ „produktiv“ ist und ich mich also im Knoten K6 befinde.

Begriff „Signalisierungsspiel“:

Durch ein „Signal“ wird der Typ eines Spielers bekannt. So dient in diesem Spiel der Erwerb des Abschluss als Signal für einen produktiven Bewerber. Die Glaubwürdigkeit des Signals ergibt sich aus den hohen Kosten, die unproduktive Bewerber hätten, um das Signal ebenfalls zu erwerben.

Begriff „Selbstselektion“:

Eine Strategie bei der Verträge so gestaltet sind, dass sich die Bewerber auf eine Art und Weise selbst selektieren, die für den Vertragsteller gut ist.

Selbstselektion im Beispiel:

Anja bietet den Bewerbern zwei unterschiedliche Verträge an, von denen jeder Bewerber sich faktisch selbst einen aussuchen kann: 1. hoher Lohn bei Vorlage eines Abschlusses, 2. niedriger Lohn ohne Abschluss. Anja muss nun nur die Verträge so gestalten, dass die Bewerber den für sie am besten Vertrag wählen.

Techniken der Selbstselektion im Unternehmenskontext – Preisdifferenzierung

Idee:

Idealsituation für jedes Unternehmen wäre, wenn es von jedem Kunden einen individuellen Preis bekäme, der genau so hoch ist, wie der Kunde für das Produkt maximal bereit wäre zu bezahlen.

Beispiel:

Wenn es einem Multimillionär gleichgültig wäre, 10€ für ein Brötchen zu bezahlen, dann würde der Bäcker das natürlich gerne ausnutzen.

Problem:

Den Unternehmen ist in der Regel der Typ des Konsumenten nicht bekannt.

Beispiel für Lösungsansätze durch Selbstselektion - Der Büchermarkt

- Bücher werden oft erst als Hardcover relativ teuer und einige Monate später als Taschenbuchausgaben verbilligt auf den Markt gebracht. Verlage bekommen so von den echten Fans relativ viel Geld für die Hardcover-Ausgabe, da diese bereit sind einen hohen Preis zu bezahlen, um das Buch sofort zu bekommen. Kunden mit geringerer Zahlungsbereitschaft warten auf die Taschenbuchausgabe
→ **Separierendes Gleichgewicht nach Zahlungsbereitschaften**
- Brächte man alternativ nur noch Hardcover auf den Markt, würde man die Leser mit der niedrigen Zahlungsbereitschaft verlieren
→ es gäbe immer noch eine Separierung, aber kein Gleichgewicht mehr.
- Das sofortige Herausbringen von Taschenbüchern wäre für die Verlage auch nicht optimal, da es zu einem Pooling der Leser führen würde und so die hohe Zahlungsbereitschaft der Fans nicht genutzt werden könnte.

Screening:

Idee:

Bei dynamische Spielen mit unvollständigen Informationen wirft vor allem die Tatsache, das dem Spieler oft nicht bekannt ist, in welchem Knoten er sich befindet, Probleme auf. Diese Unsicherheit lässt die Spieler ggf. Entscheidungen treffen, die sie bei vollständigen Informationen nicht getroffen hätten.

→ Es könnte für den unvollständig informierten Spieler sinnvoll sein, zu versuchen, die Informationsmängel zu beseitigen („Screening“)

Beispiel:

Käufer von Gebrauchtwagen machen vor dem Kauf eine Probefahrt, um zumindest offensichtliche Mängel auszuschließen. Unerfahrene Käufer bringen evtl. Berater zum Kauf mit o.ä. („Screeningmaßnahmen“)

Anmerkung:

Screening-Maßnahmen dürfen nicht zu teuer sein!

Im Arbeitsmarkt-Beispiel (1):

- Spieler erwerben keine Abschlüsse, wenn die Abschlüsse als Signale entweder zu teuer sind oder für beide Spielertypen gleich viel kosten.
→ Es existiert kein separierendes Gleichgewicht und sie muss beiden Typen den gleichen Lohn bezahlen.
- Wenn Anja die unproduktiven Bewerber aber durch einen Einstellungstest zweifelsfrei erkennen könnte, und der Test z.B. nur 0,1 kosten würde, dann könnte sich Anja durch den Test besserstellen.

Im Arbeitsmarkt-Beispiel (2):

- Nach dem Test wird sie nur noch die produktiven Bewerber einstellen. Diese können am Arbeitsmarkt auch nur 6,8 verdienen, also kann Anja den produktiven Bewerbern ebenfalls einen Lohn von 6,8 anbieten. Ihr Überschuss beträgt dann: $10 - 6,8 = 3,2$. Unter der Annahme, dass 80% der Bewerber unproduktiv und 20% produktiv sind, ergibt sich, dass sie 5 Bewerber testen muss, um einen produktiven zu finden. Der Test pro Bewerber darf daher höchstens $3,2/5 = 0,64$ kosten.

Nutzungshinweise:

Das hier vorliegende Vorlesungsskript darf ausschließlich im Rahmen gebührenfreier Bildungsangebote ohne weitere Genehmigung genutzt werden. Im Fall von gebührenpflichtigen Bildungsangeboten wenden Sie sich zur Klärung der Nutzungsbedingungen bitte vorab an Prof. Dr. Stefan Winter. Die Weitergabe der hier verwendeten Materialien ist nicht gestattet, alle Unterlagen dienen ausschließlich dem persönlichen Gebrauch. Mit der Nutzung der hier bereitgestellten Materialien erklären Sie sich mit diesen Bedingungen einverstanden.