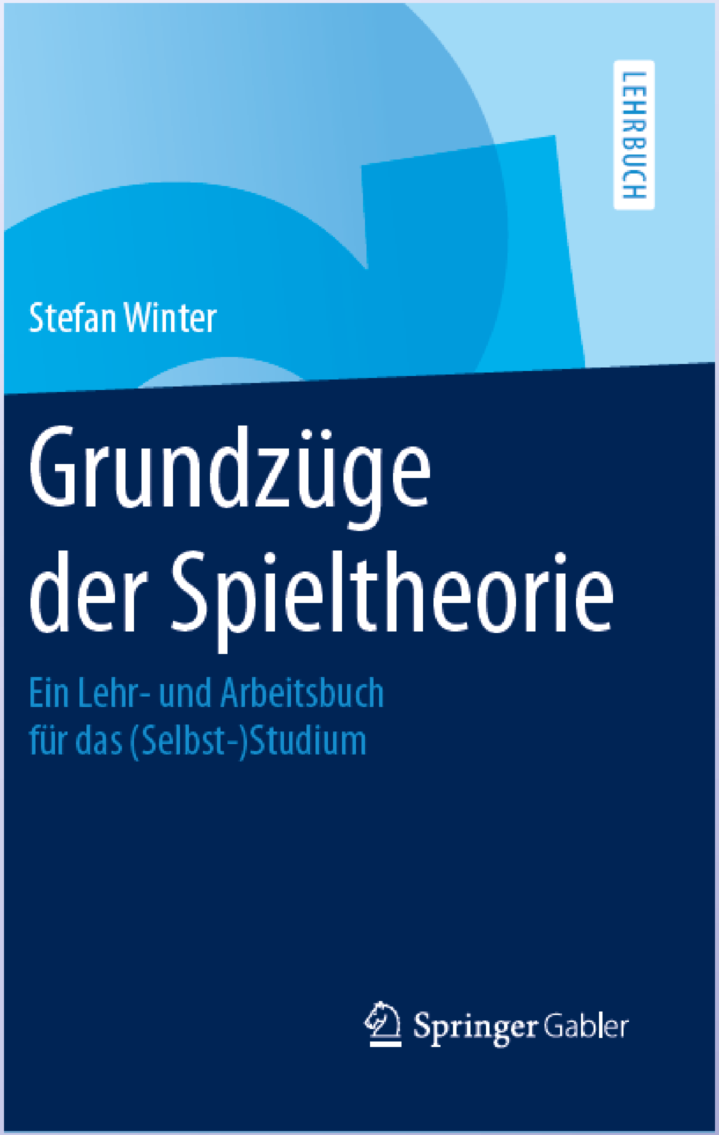
Grundzüge der Spieltheorie

Prof. Dr. Stefan Winter
Ruhr-Universität Bochum

Begleitmaterialien zur Vorlesung sind abrufbar unter:
http://www.rub.de/spieltheorie

Die folgende Vorlesungsaufzeichnung und das hier vorliegende Skript beruhen auf dem Buch:
„Grundzüge der Spieltheorie“
von **Stefan Winter**,
Springer Gabler,
Erschienen im Dezember 2014



4. Statische Spiele mit unvollständiger Information

Unvollständige Information:

Nicht jeder Spieler kennt die Auszahlungen aller Mitspieler genau.

Implikation unvollständiger Information:

Die Spieler können sich nicht exakt in die Köpfe der anderen hineinversetzen.

Einführendes Beispiel:

- Cournot-Spiel mit zwei Silberproduzenten:
  Staake Montan AG und Michels Silberwerk GmbH.

- Staake AG kennt die genauen Kosten der Michels GmbH nicht.

Lösungsvoraussetzung:

Die Spieler müssen die **möglichen** Kostenfunktionen und die jeweiligen **Wahrscheinlichkeiten** für die verschiedenen Kostenfunktionen der Mitspieler kennen.

Gewinnfunktion der Staake AG:

$$G_S = Pq_S - 10q_S$$

Notation:

G: Gewinn
P: Preis pro Mengeneinheit
q: Produktionsmenge

Annahme:

Marktpreis P hängt von den Produktionsmengen beider Unternehmen ab:

$$P = 1000 - q_S - q_M$$

Aber:

Produktionsmenge der Michels GmbH hängt von den Kosten der Michels GmbH ab, daher kann es zwei unterschiedliche Marktpreise geben:

$$P_n = 1000 - q_S - q_{Mn}$$

$$P_h = 1000 - q_S - q_{Mh}$$

Berechnung der Gewinne unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Kostenfunktionen:

Bei niedrigen Kosten:

$$\begin{aligned} G_{Mn} &= P_n q_{Mn} - 10q_{Mn} \\ &= (1000 - q_S - q_{Mn})q_{Mn} - 10q_{Mn} \\ &= 990q_{Mn} - q_S q_{Mn} - q_{Mn}^2 \end{aligned}$$

Analog bei hohen Kosten:

$$G_{Mh} = 950q_{Mh} - q_S q_{Mh} - q_{Mh}^2$$

Annahme:

Die Staake AG nimmt an, dass die Michels GmbH mit einer Wahrscheinlichkeit von 60% niedrige Kosten hat und mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% hohe Kosten.

Also:

$$w_n = 0,6$$

$$w_h = 0,4$$

Erwarteter Gewinn der Staake AG:

$$E(G_S) = w_n(P_n q_S - 10q_S) + w_h(P_h q_S - 10q_S)$$

$$= 0{,}6(P_n q_S - 10q_S) + 0{,}4(P_h q_S - 10q_S)$$

$$= 0{,}6P_n q_S + 0{,}4P_h q_S - 10q_S$$

Einsetzen der Preise in den erwarteten Gewinn:

$P_n = 1000 - q_S - q_{Mn}$ und $P_h = 1000 - q_S - q_{Mh}$

Man erhält:

$$E(G_S)$$

$$= 0{,}6P_n q_S + 0{,}4P_h q_S - 10q_S$$

$$= 0{,}6(1000 - q_S - q_{Mn})q_S$$
$$+ 0{,}4(1000 - q_S - q_{Mh})q_S - 10q_S$$

$$= 990q_S - q_S^2 - 0{,}6q_{Mn}q_S - 0{,}4q_{Mh}q_S$$

Mögliche Auszahlungen aller Spieler:

$$E(G_S) = 990q_S - q_S^2 - 0{,}6q_{Mn}q_S - 0{,}4q_{Mh}q_S$$

$$G_{Mn} = 990q_{Mn} - q_S q_{Mn} - q_{Mn}^2$$

$$G_{Mh} = 950q_{Mh} - q_S q_{Mh} - q_{Mh}^2$$

Maximierung der Auszahlungen – Bedingung erster Ordnung:

$$\frac{dE(G_S)}{dq_S} = 990 - 2q_S - 0{,}6q_{Mn} - 0{,}4q_{Mh} = 0$$

$$\frac{dG_{Mn}}{dq_{Mn}} = 990 - q_S - 2q_{Mn} = 0$$

$$\frac{dG_{Mh}}{dq_{Mh}} = 950 - q_S - 2q_{Mh} = 0$$

Gleichgewichtsmengen:

$$q_S = 335{,}33$$

$$q_{Mn} = 327{,}33$$

$$q_{Mh} = 307{,}33$$

Begriff „Typ“:

In Spielen mit unvollständigen Informationen können die Spieler unterschiedliche Typen annehmen. In unserem Beispiel oben könnte die Michels GmbH vom Typ „niedrige Kosten“ oder vom Typ „hohe Kosten“ sein.

Strategien in statischen Spielen mit unvollständiger Information:
In statischen Spielen mit unvollständiger Information entspricht eine Strategie eines Spielers nun der Zuordnung eines Zuges zu jedem Spielertyp.

Gleichgewichtsstrategie der Michels GmbH:
„Produziere eine Menge von 327,33, wenn du vom Typ „niedrige Kosten“ bist, produziere eine Menge von 307,33, wenn du vom Typ „hohe Kosten“ bist“.

In Kurzform:
„327,33 falls Kosten niedrig, 307,33 falls Kosten hoch“

Gleichgewicht des Spiels:

$$\{\underbrace{335{,}33}_{\text{Strategie der Staake AG}};\ \underbrace{327{,}33\ falls\ Kosten\ niedrig, 307{,}33\ falls\ Kosten\ hoch}_{\text{Strategie der Michels GmbH}}\}$$

Die Bayesregel

Beispiel:

- Sie werden auf der Straße gefragt, ob Sie einen kostenlosen Test auf eine seltene Krankheit machen wollen.
- Sie machen den Test und erhalten ein positives Testergebnis.
- Der Test zeigt mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% das richtige und mit einer Wahrscheinlichkeit von 1% das falsche Ergebnis an, egal ob man die Krankheit hat oder nicht.

Frage:

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie die Krankheit tatsächlich haben, nachdem der Test positiv ausgefallen ist?

Intuitive, *falsche(!)* Antwort:
Die Wahrscheinlichkeit beträgt 99%! ???

Annahme:

Pro eine Million Menschen haben 10.000 Menschen die Krankheit und dementsprechend 990.000 Menschen nicht.

Ergebnis, wenn eine Million Menschen getestet werden:

		Krankheit		
		ja	nein	Gesamt
Testergebnis	positiv	9.900	9.900	19.800
	negativ	100	980.100	980.200
	Gesamt	10.000	990.000	1.000.000

Relative Anteile:

		Krankheit		
		ja	nein	Gesamt
Testergebnis	positiv	0,0099	0,0099	0,0198
	negativ	0,0001	0,9801	0,9802
	Gesamt	0,01	0,99	1

Begriff „Randwahrscheinlichkeiten“:
Als Randwahrscheinlichkeit bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit für eines der beiden Merkmale gesund/krank oder Test positiv/Test negativ.
Diese Wahrscheinlichkeiten bezeichnen wir formal z.B. einfach als

$$w(gesund)$$

oder

$$w(negativ)$$

Diese Randwahrscheinlichkeiten sind einfach die Summen der Zeilen- bzw. Spalteneinträge in der obigen Tabelle.

Bedeutung Zelleneinträge innerhalb der Tabelle:
Wahrscheinlichkeiten dafür, dass die betreffende Kombination von Merkmalen auftritt.

Beispiel:
Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass jemand nicht krank ist und negativ getestet würde?

Antwort:
0,9801 bzw. 98,01%.

In der Notation würden wir eine solche Wahrscheinlichkeit schreiben als:
$w(gesund\ und\ negativ)$

„Bedingte Wahrscheinlichkeiten“:
Wahrscheinlichkeiten, die unter Berücksichtigung einer Bedingung berechnet werden.

Beispiel:
Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit dafür krank zu sein, wenn das Testergebnis positiv war?

Notation:
$\boldsymbol{w(krank \,|positiv\,)}$

Berechnung:

$$w(krank \mid positiv\,) = \frac{w(krank\ und\ positiv)}{w(positiv)}$$

$$= \frac{0{,}0099}{0{,}0198} = 0{,}5$$

Tabellarische Darstellung des Ergebnisses:

		Krankheit		
		ja	nein	Gesamt
Testergebnis	positiv	0,0099 =w(krank und positiv)	0,0099	0,0198 =w(positiv)
	~~negativ~~	~~0,0001~~	~~0,9801~~	~~0,9802~~
	~~Gesamt~~	~~0,01~~	~~0,99~~	~~1~~

Allgemeine Formel zur Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeiten:

$$w(Merkmal\ A \mid Bedingung\ B) = \frac{w(Merkmal\ A\ \ und\ Bedingung\ B)}{w(Bedingung\ B)}$$

Diese Regel zur Berechnung von bedingten Wahrscheinlichkeiten wird als „Bayes-Regel“ bezeichnet.

Ein weiterführendes Beispiel:

Ausgangspunkt ist das Cournot-Spiel der Silberproduzenten Staake AG und Michels GmbH:

Gewinnfunktionen:

Michels GmbH:

$$G_{Mn} = 990q_{Mn} - q_S q_{Mn} - q_{Mn}^2$$

bzw.

$$G_{Mh} = 950q_{Mh} - q_S q_{Mh} - q_{Mh}^2$$

Staake AG:

$$E(G_S) = 990q_S - q_S^2 - 0{,}6q_{Mn}q_S - 0{,}4q_{Mh}q_S$$

Annahme jetzt:
Auch die Staake AG kann unterschiedliche Kosten haben.

Mögliche Kosten sind:

$c_{Sn} = 10$
$c_{Sh} = 50$

Wahrscheinlichkeiten:

		Michels GmbH		
		Niedrige Kosten c_{Mn}	Hohe Kosten c_{Mh}	Gesamt
Staake AG	Niedrige Kosten c_{Sn}			0,3
	Hohe Kosten c_{Sh}			0,7
	Gesamt	0,6	0,4	1

Zusammenhang zwischen den Kosten der Unternehmen:

		Michels GmbH		
		Niedrige Kosten c_{Mn}	Hohe Kosten c_{Mh}	Gesamt
Staake AG	Niedrige Kosten c_{Sn}	0,27 $= w(c_{Mn} \ und \ c_{Sn})$	0,03 $= w(c_{Mh} \ und \ c_{Sn})$	0,3 $w(c_{Sn})$
	Hohe Kosten c_{Sh}	0,33	0,37	0,7
	Gesamt	0,6	0,4	1

Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeiten:

Wenn die Staake AG niedrige Kosten hat, dann hat die Michels AG mit der folgenden Wahrscheinlichkeit auch niedrige Kosten.

$$w(c_{Mn} \mid c_{Sn}) = \frac{w(c_{Mn} \; und \; c_{Sn})}{w(c_{Sn})} = \frac{0{,}27}{0{,}3} = 0{,}9$$

Mit der Gegenwahrscheinlichkeit von 0,1 bzw. 10% trifft sie auf eine Michels GmbH mit hohen Kosten.

$$w(c_{Mh} \mid c_{Sn}) = \frac{w(c_{Mh} \; und \; c_{Sn})}{w(c_{Sn})} = \frac{0{,}03}{0{,}3} = 0{,}1$$

Bei hohen Kosten

Wenn die Staake AG hohe Kosten hat, dann hat die Michels AG mit der folgenden Wahrscheinlichkeit niedrige Kosten.

$$w(c_{Mn} \mid c_{Sh}) = \frac{w(c_{Mn} \ und \ c_{Sh})}{w(c_{Sh})} = \frac{0,33}{0,7} = 0,417$$

Mit der Gegenwahrscheinlichkeit von 0,583 bzw. 58,3% trifft sie auf eine Michels GmbH mit hohen Kosten.

$$w(c_{Mh} \mid c_{Sh}) = \frac{w(c_{Mh} \ und \ c_{Sh})}{w(c_{Sh})} = \frac{0,37}{0,7} = 0,583$$

Erwartete Auszahlungen

Erwartete Auszahlungen der Staake AG:

Bei niedrigen Kosten:

$$E(G_{Sn}) = 0{,}9(1000 - q_{Sn} - q_{Mn})q_{Sn} + 0{,}1(1000 - q_{Sn} - q_{Mh})q_{Sn} - 10q_{Sn}$$

Bei hohen Kosten:

$$E(G_{Sh}) = 0{,}417(1000 - q_{Sh} - q_{Mn})q_{Sh} + 0{,}583(1000 - q_{Sh} - q_{Mh})q_{Sh} - 50q_{Sh}$$

Erwartete Auszahlungen der Michels GmbH:

Bei niedrigen Kosten:

$$E(G_{Mn}) = 0{,}45(1000 - q_{Sn} - q_{Mn})q_{Mn} + 0{,}55(1000 - q_{Sh} - q_{Mn})q_{Mn} - 10q_{Mn}$$

Bei hohen Kosten

$$E(G_{Mh}) = 0{,}075(1000 - q_{Sn} - q_{Mh})q_{Mh} + 0{,}925(1000 - q_{Sh} - q_{Mh})q_{Mh} - 50q_{Mh}$$

Bestimmung des Gleichgewichts:
Aufstellen der Bedingungen erster Ordnung, Ermittlung der optimalen Produktionsmengen für jeden Spielertyp.

Gleichgewicht lautet:

$$\begin{Bmatrix} 329{,}22\ falls\ c = c_{Sn}\ und\ 315{,}52\ falls\ c = c_{Sh}; \\ 334{,}16\ falls\ c = c_{Mn}\ und\ 308{,}11\ falls\ c = c_{Mh} \end{Bmatrix}$$

Anwendung: Vickrey-Auktionen

Ablauf:

- Bieter geben nur einmalig ein verdecktes Gebot ab
- Gewinner ist derjenige, der das höchste Gebot abgegeben hat.
- Er bezahlt aber nur den Preis des zweithöchsten Gebotes.
- Andere Bezeichnung: Verdeckte Zweitpreisauktion

Eigenschaften:

- Es handelt sich um ein statisches Spiel, da alle Spieler ihre Gebote abgeben, bevor bekannt wird, wer wie viel geboten hat.
- Die Typen der Spieler ergeben sich aus den subjektiven Wertschätzungen für das Bietgut: Spieler mit höheren Werteinschätzungen werden vermutlich höhere Gebote abgeben.

Gleichgewichtsstrategie:

Es gibt eine schwach dominante Gleichgewichtsstrategie für jeden Spieler. Die eigene Bietstrategie hängt also nicht davon ab, was die anderen Bieter tun.

Die schwach dominante Gleichgewichtsstrategie lautet:

Biete exakt den Betrag deiner subjektiven Wertschätzung

Beispiel:
Auf einer Versteigerung wird ein Bild versteigert.

Irenes subjektive Wertschätzung V für das Bild beträgt:

$$V = 1.000$$

Bezeichnung:
P: Preis der am Ende der Auktion bezahlt werden muss.

Irenes Auszahlung, wenn sie die Auktion gewinnt:

$$A = V - P$$

Irenes Gebot:
B_I

Annahme:

Das höchste Gebot aller anderen Bieter stammt von Uli und beträgt:

B_U

Weitere Annahme:

Irene gibt ein Gebot in Höhe ihrer Wertschätzung ab, d.h.:

$B_I = V = 1000.$

1. Fall: $B_U > 1.000$

- Uli bietet 1.200, d.h. $B_U = 1.200$
- $B_I = 1.000$: Irene bekommt das Bild nicht und ihre Auszahlung ist gleich Null
- $B_I < 1.000$: Irene bekommt das Bild nicht und ihre Auszahlung ist gleich Null
- $1000 < B_I < 1200$: Irene bekommt das Bild nicht und ihre Auszahlung ist gleich Null.
- $B_I > 1.200$: Irene erhält das Bild, ihre Auszahlung beträgt $A = V - B_U = 1000 - 1200 = -200$

→ **Irene sollte bei einem Gebot in Höhe ihrer Wertschätzung bleiben**

2. Fall: $\boldsymbol{B_U < 1.000}$

- Uli bietet 800, d.h. $B_U = 800$
- $B_I = 1.000$: Irene gewinn die Auktion, ihre Auszahlung beträgt $A = V - B_U = 1000 - 800 = 200$
- $B_I > 1.000$: Lohnt sich nicht, da Irene die Auktion sowieso gewinnt.
- $800 < B_I < 1000$: Irene bekommt das Bild und ihre Auszahlung beträgt weiterhin 200
- $B_I < 800$: Irene bekommt das Bild nicht, ihre Auszahlungen sinken auf 0

→ **Ein Gebot in Höhe von Irenes Wertschätzung ist niemals schlechter als ein anderes Gebot.**

3. Fall: $B_U = 1.000$

- Uli bietet 1000, d.h. $B_U = 1000$

- $B_I = 1.000$: Es wird ausgelost, wer von den beiden das Bild bekommt. Erhält Irene das Bild, ist ihre Auszahlung Null, da sie 1000 bezahlen muss. Bekommt Uli den Zuschlag, ist Irenes Auszahlung ebenfalls Null.

→ Irene sollte in Höhe ihrer Wertschätzung bieten

Auswertung:

Es bringt für Irene niemals eine Verbesserung, ein Gebot abzugeben, das höher oder niedriger als ihre tatsächliche Wertschätzung ist.

→ Die Anweisung: *„Gib ein Gebot in Höhe deiner Wertschätzung ab"* ist die schwach dominante Strategie

→ Gleichgewicht: jeder Spielertyp gibt ein Gebot in Höhe seiner Wertschätzung ab.

Anmerkung:

Bei Erstpreisauktionen, bei denen die Spieler genau das bezahlen müssten, was sie bieten, sollte unter der Wertschätzung geboten werden, um überhaupt positive Auszahlungen erreichen zu können.

Nutzungshinweise:

Das hier vorliegende Vorlesungsskript darf ausschließlich im Rahmen gebührenfreier Bildungsangebote ohne weitere Genehmigung genutzt werden. Im Fall von gebührenpflichtigen Bildungsangeboten wenden Sie sich zur Klärung der Nutzungsbedingungen bitte vorab an Prof. Dr. Stefan Winter. Die Weitergabe der hier verwendeten Materialien ist nicht gestattet, alle Unterlagen dienen ausschließlich dem persönlichen Gebrauch. Mit der Nutzung der hier bereitgestellten Materialien erklären Sie sich mit diesen Bedingungen einverstanden.