Grundzüge der Spieltheorie

Prof. Dr. Stefan Winter
Ruhr-Universität Bochum

Begleitmaterialien zur Vorlesung sind abrufbar unter:
http://www.rub.de/spieltheorie

Die folgende Vorlesungsaufzeichnung und das hier vorliegende Skript beruhen auf dem Buch:
„Grundzüge der Spieltheorie“
von **Stefan Winter**,
Springer Gabler,
Erschienen im Dezember 2014

2. Statische Spiele mit vollständiger Information

Statische Spiele:

Alle Spieler handeln gleichzeitig.

Alternativ:

Spieler handeln, ohne zu wissen, ob und was andere Spieler vorher getan haben.

Vollständige Information:

Alle Spieler kennen die Auszahlungen aller anderen Spieler.

Implikation vollständiger Information:

Jeder Spieler kann sich perfekt in jeden anderen Spieler hineinversetzen.

Empfehlung der Spieltheorie:

Wähle Deine beste Antwort!

Mögliche Probleme dieser Empfehlung

Die beste Antwort ist immer noch sehr schlecht.

Es gibt mehrere beste Antworten.

Es gibt gar keine beste Antwort.

Zur Erinnerung:

Die „beste Antwort" eines Spielers ist diejenige Strategie, die seine Auszahlung gegen die Strategien der anderen Spieler maximiert.

Begriff „Eindeutigkeit“

Ein Spiel heißt „eindeutig“, wenn es nur ein Gleichgewicht hat.

Begriff „Effiziente Strategiekombination“

Eine Strategiekombination heißt „effizient“, wenn es keine andere Strategiekombination gibt, die mindestens einem Spieler eine höhere Auszahlung und keinem der Spieler eine geringere Auszahlung ermöglichen würde.

Aus Sicht der Spieltheorie unproblematisch:
Eindeutige Spiele mit effizienten Gleichgewichten!

Beispiel für ein Spiel mit eindeutigem und effizientem Gleichgewicht:

		Ulrich	
		Ins Kino gehen	Essen gehen
Nadine	Ins Kino gehen	4 ; 4	2; 1
	Essen gehen	1 ; 2	0 ; 0

Definition „dominante Strategie“:

Eine Strategie heißt „dominant“, wenn sie dem Spieler gegen jede beliebige Strategie der anderen Spieler immer die höchste Auszahlung bringt.

Dominante Strategie Nadine: Ins Kino gehen

Dominante Strategie Uli: Ins Kino gehen

		Ulrich	
		Ins Kino gehen	Essen gehen
Nadine	Ins Kino gehen	4 ; 4	2; 1
	Essen gehen	1 ; 2	0 ; 0

Gleichgewicht lautet also:

$\{Ins\ Kino\ gehen;\ Ins\ Kino\ gehen\}$

Typ des gefundenen Gleichgewichts:

Gleichgewicht dominanter Strategien.

Eigenschaften:

Gleichgewichte dominanter Strategien sind immer eindeutig.

Gleichgewichte dominanter Strategien können aber ineffizient sein.

Hier:

Gleichgewicht ist effizient.

Begriff „dominierte Strategie“:

Wenn eine Strategie S1 in jedem Fall zu geringeren Auszahlungen führt als eine andere Strategie S2, dann bezeichnet man S1 als „dominierte Strategie“.

Begriff „dominierende Strategie“:

Wenn eine Strategie S2 in jedem Fall zu höheren Auszahlungen führt als eine andere Strategie S1, dann bezeichnet man S2 gegenüber S1 als „dominierende Strategie“.

Empfehlung der Spieltheorie:

Dominierte Strategien können gestrichen werden, weil es niemals sinnvoll sein kein, sie zu wählen.

		Frischback GmbH	
		Preise erhöhen	Preise senken
Bäcker Müller	Zusätzlichen Laden eröffnen	4 ; 2	0; 1
	Verkaufsraum vergrößern	2 ; 4	3 ; 0
	Sortiment erweitern	1 ; 2	2 ; 5

Hier für Bäcker Müller:

Dominierte Strategie: Sortiment erweitern

Dominierende Strategie: Verkaufsraum vergrößern

Folgerung:

Sortiment erweitern sollte gestrichen werden, weil diese Strategie dominiert wird.

		Frischback GmbH	
		Preise erhöhen	Preise senken
Bäcker Müller	Zusätzlichen Laden eröffnen	4 ; 2	0; 1
	Verkaufsraum vergrößern	2 ; 4	3 ; 0
	~~Sortiment erweitern~~	~~1 ; 2~~	~~2 ; 5~~

Ergebnis der Streichung:

		Frischback GmbH	
		Preise erhöhen	Preise senken
Bäcker Müller	Zusätzlichen Laden eröffnen	4 ; 2	0; 1
	Verkaufsraum vergrößern	2 ; 4	3 ; 0

Jetzt aber:

Frischback GmbH kann Preise senken streichen, weil diese Strategie von Preise erhöhen dominiert wird.

Streichung:		**Frischback GmbH**	
		Preise erhöhen	~~Preise senken~~
Bäcker Müller	Zusätzlichen Laden eröffnen	4 ; 2	~~0; 1~~
	Verkaufsraum vergrößern	2 ; 4	~~3 ; 0~~

Ergebnis der Streichung:		**Frischback GmbH**
		Preise erhöhen
Bäcker Müller	Zusätzlichen Laden eröffnen	4 ; 2
	Verkaufsraum vergrößern	2 ; 4

Jetzt aber:

Bäcker Müller kann **Verkaufsraum vergrößern** streichen.

		Frischback GmbH
		Preise erhöhen
Bäcker Müller	Zusätzlichen Laden eröffnen	4 ; 2
	~~Verkaufsraum vergrößern~~	~~2 ; 4~~

Einzig verbleibende Strategiekombination:

{ Zusätzlichen Laden eröffnen; Preise erhöhen }

		Frischback GmbH
		Preise erhöhen
Bäcker Müller	Zusätzlichen Laden eröffnen	4 ; 2

Ergebnis:

Die Strategiekombination { Zusätzlichen Laden eröffnen; Preise erhöhen } ist das einzige Gleichgewicht des Spiels. Es ist auch effizient.

Typ des gefundenen Gleichgewichts:

Gleichgewicht iterativer Dominanz

(Iterativ = „wiederholend“, bezieht sich auf das wiederholte Streichen dominierter Strategien)

Eigenschaften:

Durch das Streichen dominierter Strategien gehen niemals Gleichgewichte verloren.

Ist das Steichen möglich, bis nur noch eine Strategiekombination verbleibt, ist diese Strategiekombination das einzige Gleichgewicht des Spiels.

Begriff „schwach dominierte Strategie“:

Eine Strategie S1, die niemals besser ist als eine andere Strategie S2 aber in mindestens einer Situation schlechter wäre als S2 heißt „schwach dominierte Strategie“.

Beispiel: unten und rechts sind schwach dominierte Strategien

		Spieler 2	
		links	rechts
Spieler 1	oben	1 ; 1	1; 1
	unten	1 ; 1	0 ; 0

Begriff „schwach dominierende Strategie“:

Eine Strategie S2, die niemals schlechter ist als eine andere Strategie S1 aber in mindestens einer Situation besser wäre als S1 heißt „schwach dominierende Strategie“.

Beispiel: oben und links sind schwach dominierende Strategien

		Spieler 2	
		links	rechts
Spieler 1	oben	1 ; 1	1; 1
	unten	1 ; 1	0 ; 0

Frage:

Können schwach dominierte Strategien gestrichen werden?

Gleichgewichte im obigen Spiel:

{oben ; links}, {unten; links} und {oben ; rechts}

Verbleibende Strategiekombination nach Streichung schwach dominierter Strategien:

{oben ; links}

Ergebnis:

Streichung schwach dominierter Strategien kann zum Verlust von Gleichgewichten führen.

Spiel nach Streichung:

		Spieler 2	
		links	rechts
Spieler 1	oben	1 ; 1	1; 1
	unten	1 ; 1	0 ; 0

Vorteil hier:

Es bleibt nur ein Gleichgewicht übrig.

Folge:

Die Anweisung an die Spieler „Wähle deine beste Antwort“ wäre wieder eindeutig.

Ergebnis:

Streichung schwach dominierter Strategien kann vorteilhaft sein.

Problem:

Streichung schwach dominierter Strategien kann auch nachteilig sein, siehe folgendes Spiel.

		Spieler 2	
		links	rechts
Spieler 1	oben	4 ; 1	2; 2
	mitte	4 ; 4	0 ; 0
	unten	1 ; 3	3 ; 2

Hier:

mitte wird schwach von oben dominiert

		Spieler 2	
		links	rechts
Spieler 1	oben	4 ; 1	2; 2
	mitte	4 ; 4	0 ; 0
	unten	1 ; 3	3 ; 2

Problem:

Wird mitte gestrichen, geht das einzige Gleichgewicht des Spiels verloren!

Ergebnis:

Streichung schwach dominierter Strategien kann nicht pauschal gerechtfertigt werden.

Ein Spiel ohne dominierte oder dominierende Strategien:

		Spieler 2	
		links	rechts
Spieler 1	oben	5 ; 4	1; 1
	mitte	4 ; 2	2 ; 7
	unten	3 ; 6	3 ; 1

Hier:

{oben; links} ist einziges Gleichgewicht des Spiels

Gleichgewicht ist effizient

Mögliches Problem „Mehrere Gleichgewichte“

1. Fall: Nur ein effizientes Gleichgewicht

		Spieler 2		
		links	zentral	rechts
Spieler 1	oben	5 ; 4	0; 0	0; 0
	mitte	0 ; 0	1 ; 2	0; 0
	unten	0 ; 0	0 ; 0	3; 1

Hier:

Nur {oben; links} ist effizient und wird von beiden Spielern bevorzugt.

Mögliches Problem „Mehrere Gleichgewichte“

2. Fall: Mehrere effiziente Gleichgewichte ohne Interessenkonflikte

		Sven	
		Fahre nach Blackall	Fahre nach Charleville
Konni	Fahre nach Blackall	10; 10	0; 0
	Fahre nach Charleville	0; 0	10; 10

Hier:

{Fahre nach Blackall; Fahre nach Blackall} und {Fahre nach Charleville; Fahre Charleville} sind effiziente Gleichgewichte.

Problem jetzt:

Es gibt zwei Kombinationen von besten Antworten aufeinander.

Ergebnis:

Handlungsanweisung „Wähle Deine beste Antwort“ ist nicht eindeutig und kann auch nicht durch das Effizienzkriterium gelöst werden.

Aber:

Spiel könnte durch sogar nur einseitige Kommunikation gelöst werden.

Denn:

Es gibt keine Interessenkonflikte.

Mögliches Problem „Mehrere Gleichgewichte“

3. Fall: Mehrere effiziente Gleichgewichte mit Interessenkonflikten

		Dirk	
		Oper	Boxen
Britta	Oper	1; 2	0; 0
	Boxen	0; 0	2; 1

Hier:

Nur {Oper; Oper} und {Boxen; Boxen} sind effiziente Gleichgewichte.

Problem jetzt wieder:

Es gibt zwei Kombinationen von besten Antworten aufeinander.

Ergebnis:

Handlungsanweisung „Wähle Deine beste Antwort“ ist nicht eindeutig und kann auch nicht durch das Effizienzkriterium gelöst werden.

Ferner:

Spiel kann auch nicht durch reine Kommunikation gelöst werden.

Denn:

Es gibt keinen Grund, warum einer Spieler nachgeben sollte.

Mögliches Problem „Ein ineffizientes Gleichgewicht“

Das „Gefangenendilemma“:

		Al Capone	
		Schweigen	Aussagen
Pablo Escobar	Schweigen	-1; -1	-10; 0
	Aussagen	0; -10	-9; -9

Hier:

Nur {Aussagen; Aussagen} ist ein Gleichgewicht.

Problem jetzt:

Gleichgewicht eindeutig aber ineffizient.

Denn:

Auszahlungen im Gleichgewicht {Aussagen; Aussagen} : -9; -9

Auszahlungen in Strategiekombination {Schweigen; Schweigen}: -1; -1

Ergebnis:

Individuell optimales Verhalten (beste Antwort!) kann kollektiv fatal sein.

Mögliches Problem „Kein Gleichgewicht“

Ein Spiel ohne herkömmliches Gleichgewicht:

		Caro	
		Kopf	Zahl
Mimi	Kopf	-1; + 1	+1; -1
	Zahl	+1; -1	-1; +1

Ergebnis:

Aus jeder Strategiekombination führt ein Pfeil hinaus: Kein Gleichgewicht!

Erweiterung:

Unendlich große Strategiemengen.

Beispiel:

Produktionsmengen von Stahl können beliebig unterteilt werden.

Darstellungsproblem 1:

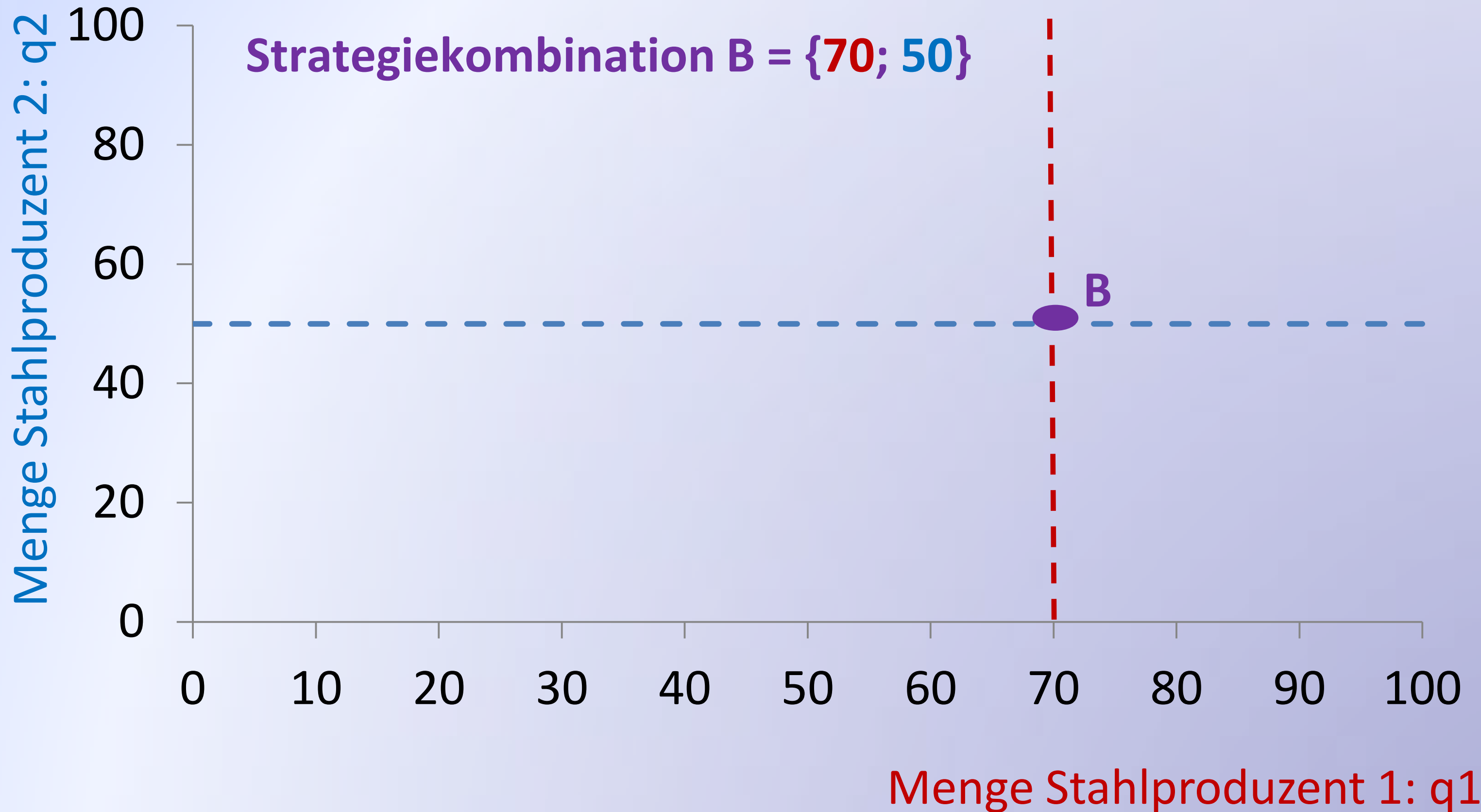
Unendlich große Strategiemengen können nicht in Matrixform dargestellt werden.

Lösung:

Darstellung in Diagrammform

Beispiel:

Zwei Stahlproduzenten.



Jetzt:

Jeder Punkt im Diagramm kennzeichnet eine Strategiekombination.

Darstellungsproblem 2:

Da es unendlich viele Punkte, also Strategiekombinationen gibt, können die zugehörigen Auszahlungen nicht in das Diagramm eingezeichnet werden.

Einziger Ausweg:

Vorläufiger Verzicht auf das Eintragen von Auszahlungen.

Frage:

Wie können dann Gleichgewichte ermittelt werden?

Zwingend notwendig:

Angaben über Auszahlungen, da sonst keine Gleichgewichte ermittelt werden können.

Problem aber weiter:

Bei unendlich vielen Strategiekombinationen kann man nicht für jede davon die zugehörigen Auszahlungen aufschreiben.

Ausweg:

Darstellung von Auszahlungen über allgemeine Formeln, in die jede Strategiekombination eingesetzt werden kann.

Beispiel:

Gewinnfunktionen von Unternehmen

Gewinn eines Unternehmens:

Gewinn G ist Umsatz U minus Kosten K, d.h. G = U – K.

Bei zwei Unternehmen:

$$G_1 = U_1 - K_1$$

$$G_2 = U_2 - K_2$$

Beispiel Kostenfunktionen in Abhängigkeit von Produktionsmengen q:

$$K_1 = 80q_1$$

$$K_2 = 80q_2$$

Erneutes Einsetzen in Gewinnfunktion:

Beide Unternehmen verkaufen zum gleichen Preis $P = 200 - q_1 - q_2$.

Umsatz der Unternehmen also:

$$G_1 = (200 - q_1 - q_2)q_1 - 80q_1$$
$$G_2 = (200 - q_1 - q_2)q_2 - 80q_2$$

Ausmultiplizieren:

$$G_1 = 120q_1 - q_1^2 - q_2 q_1$$
$$G_2 = 120q_2 - q_1 q_2 - q_2^2$$

Ergebnis:

Formelmäßige Darstellung der Auszahlungen für jede mögliche Strategiekombination $\{q_1;\ q_2\}$

Problem weiterhin:

Es gibt immer noch unendlich viele Strategiekombinationen, deren zugehörige Auszahlungen man nicht alle berechnen kann.

Aber:

Für die Bestimmung von Gleichgewichten benötigt man nur die Auszahlungen der besten Antworten!

Gewinn von Unternehmen 1:

$$G_1 = 120q_1 - q_1^2 - q_2 q_1$$

Bedingung erster Ordnung für Gewinnmaximum (=Auszahlungsmaximum!):

$$\frac{dG_1}{dq_1} = 120 - 2q_1 - q_2 = 0$$

Wiederholung Bedingung erster Ordnung:

$$\frac{dG_1}{dq_1} = 120 - 2q_1 - q_2 = 0$$

Auflösen nach q_1:

$$q_1 = 60 - 0,5q_2$$

Interpretation:

Diese Funktion gibt an, welche Produktionsmenge von Unternehmen 1 jeweils die beste Antwort auf die Produktionsmenge des Unternehmens 2 wäre.

Also:

$q_1 = 60 - 0,5q_2$ ist die Beste-Antwort-Funktion auf sämtliche möglichen Strategien von Spieler 2.

Umformung:

Um diese Beste-Antwort-Funktion in das obige q_1-q_2-Diagramm einzeichnen zu können, muss die Funktion zunächst nach q_2 aufgelöst werden.

Auflösen nach q_2:

$$q_2 = 120 - 2q_1$$

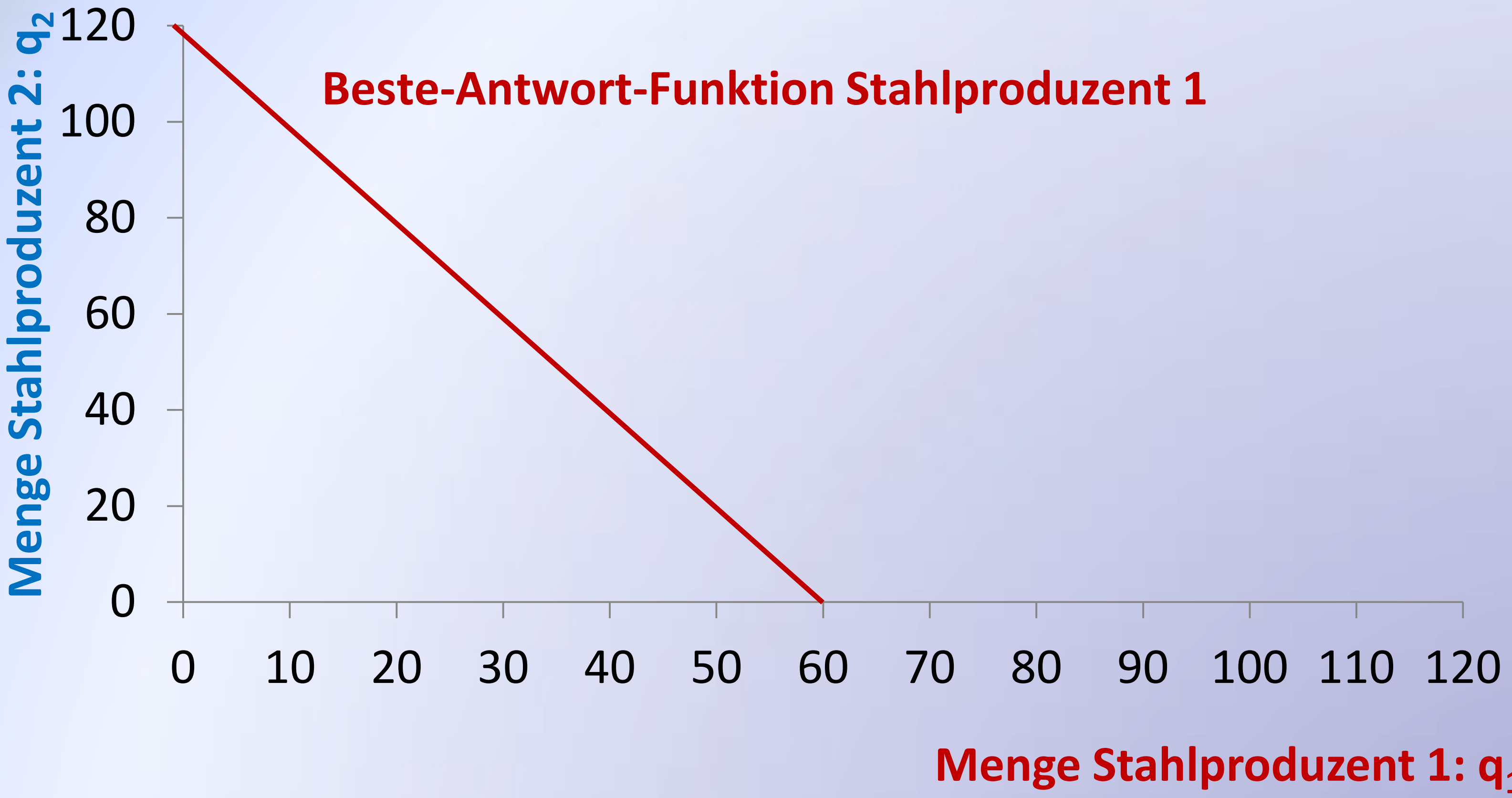
Interpretation:

Nur Punkte auf dieser Funktion können überhaupt noch Gleichgewichte sein.

Grafische Darstellung:

Siehe Folgeseite

Grafische Darstellung:



Jetzt:

Völlig analoges Vorgehen für das zweite Unternehmen.

Gewinnfunktion:

$$G_2 = 120q_2 - q_1 q_2 - q_2^2$$

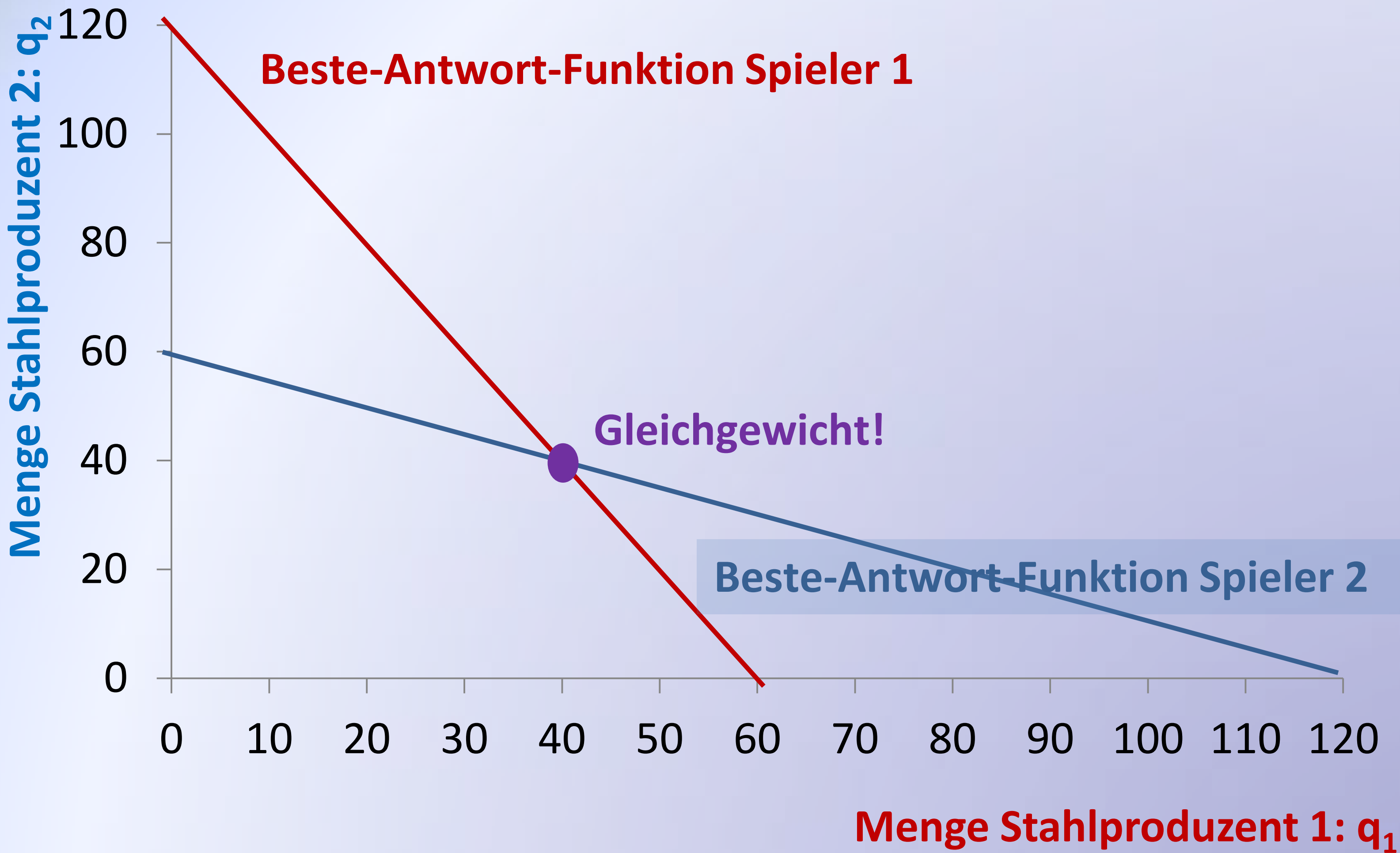
Bedingung erster Ordnung:

$$\frac{dG_2}{dq_2} = 120 - q_1 - 2q_2 = 0$$

Beste-Antwort-Funktion von Stahlproduzent 2:

$$q_2 = 60 - 0{,}5q_1$$

Grafische Darstellung:



Berechnung des Gleichgewichts über:

$$\frac{dG_1}{dq_1} = 120 - 2q_1 - q_2 = 0$$

$$\frac{dG_2}{dq_2} = 120 - q_1 - 2q_2 = 0$$

Lösung des Gleichungssystems lautet:

$$\{q_1;\ q_2\} = \{40;\ 40\}$$

Also:

Im Gleichgewicht produzieren beide Unternehmen jeweils eine Menge von 40.

Weitere Beobachtung:

Die beiden Beste-Antwort-Funktionen schneiden sich nur einmal, es gibt also auch nur ein Gleichgewicht.

Wiederholung:

Ein Spiel ohne herkömmliches Gleichgewicht:

		Caro	
		Kopf	Zahl
Mimi	Kopf	-1; + 1	+1; -1
	Zahl	+1; -1	-1; +1

Ergebnis:

Spiel hat kein (herkömmliches!) Gleichgewicht.

Annahme:

Sowohl Mimi als auch Caro werfen ihre Münzen, statt selbst zu entscheiden, welche Seite sie zeigen.

Ergebnis:

Wahrscheinlichkeit für Kopf oder Zahl bei jeweils 50% (=0,5).

Im Folgenden:

Aufnahme solcher Wahrscheinlichkeiten in die Matrixdarstellung.

Notation:

Zugehörige Wahrscheinlichkeiten werden direkt unter die jeweiligen Strategien geschrieben.

		Caro	
		Kopf **0,5**	Zahl **0,5**
Mimi	Kopf **0,5**	-1; 1	+1; -1
	Zahl **0,5**	+1; -1	-1; +1

Berechnung:

Durch das Werfen der Münzen werden Auszahlungen zufallsabhängig.

Resultierende Wahrscheinlichkeiten für:

Kopf/Zahl : 0,25 (=50% × 50% = 25%)

Kopf/Kopf : 0,25

Zahl/Zahl : 0,25

Zahl/Kopf : 0,25

Annahme:

Bei zufallsabhängigen Auszahlungen bewerten Spieler das Spiel anhand von „erwarteten Auszahlungen".

Erwartete Auszahlung Mimi:

Kombination	Wahrschein-lichkeit w	Auszahlung A von Mimi	w × A
Kopf/Kopf	0,25	-1	- 0,25
Kopf/Zahl	0,25	1	0,25
Zahl/Zahl	0,25	-1	- 0,25
Zahl/Kopf	0,25	1	0,25

Berechnung erwartete Auszahlung Mimi:

$$\boldsymbol{E(A_{Mimi}) = 0,25 \times (-1) + 0,25 \times (1) + 0,25 \times (1) + 0,25 \times (-1) = 0}$$

Analoge Berechnung für Caro:

$$E(A_{Caro}) = 0,25 \times (1) + 0,25 \times (-1) + 0,25 \times (-1) + 0,25 \times (1) = 0$$

Zielsetzung der Spieler bei zufallsabhängigen Auszahlungen:

Maximierung der erwarteten Auszahlungen.

Frage:

Wie können die Spieler ihre erwartete Auszahlung beeinflussen?

Antwort:

Durch die Wahl der Wahrscheinlichkeiten!

Begriff „Gemischte Strategie“:

Eine gemischte Strategie ist eine Strategie, bei der ein Spieler einen Zufallsmechanismus einsetzt, um seine endgültige Entscheidung zu treffen.

Beispiel:

Wenn Mimi und Caro ihre Münzen werfen, spielen sie gemischte Strategien.

Begriff „Reine Strategie“:

Eine Strategie, in der ein Spieler keinen Zufallsmechanismus einsetzt, heißt reine Strategie

Beispiel:

Wenn Mimi und Caro jeweils selbst entscheiden, mit welchem Symbol sie ihre Münzen zeigen, spielen sie reine Strategien.

Präzisierung Begriff „Gemischte Strategie“:

Eine gemischte Strategie ist eine Zuordnung von je einer Wahrscheinlichkeit pro reiner Strategie der Strategiemenge.

Beispiel:

Mimis Strategiemenge: {Kopf; Zahl}

Beispiele möglicher gemischter Strategien von Mimi:

{0,5; 0,5}

{0,2; 0,8}

{0,7; 0,3}

Interpretation:

Erste Zahl: Wahrscheinlichkeit für Kopf

Zweite Zahl: Wahrscheinlichkeit für Zahl

Anforderungen an gemischte Strategien:

- Jeder reinen Strategie muss eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden.
- Jede Wahrscheinlichkeit muss größer oder gleich Null sein.
- Jede Wahrscheinlichkeit muss kleiner oder gleich 1 sein.
- Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten muss exakt 1 sein.

Beispiele für das Münzspiel:

Zulässige gemischte Strategien	Unzulässige gemischte Strategien
{0,5; 0,5}	{0,5}
{0,2; 0,8}	{0,2; 0,3}
{0,7; 0,3}	{1,7; -0,7}

Zentrale Frage:

Welche gemischte Strategie sollten Spieler wählen?

Bezeichnungen:

k_M: Wahrscheinlichkeit, mit der Mimi „Kopf“ spielt.

k_C : Wahrscheinlichkeit, mit der Caro „Kopf“ spielt.

		Caro	
		Kopf k_C	Zahl $(1-k_C)$
Mimi	Kopf k_M	-1; 1	+1; -1
	Zahl $(1-k_M)$	+1; -1	-1; +1

Bezeichnungen:

k_M: Wahrscheinlichkeit, mit der Mimi „Kopf“ spielt.

k_C : Wahrscheinlichkeit, mit der Caro „Kopf“ spielt.

Erwartete Auszahlungen:

Mimi: $$E(A_{Mimi}) = k_M \times k_C \times (-1) + k_M \times (1 - k_C) \times (1) + (1 - k_M) \times k_C \times (1) + (1 - k_M) \times (1 - k_C) \times (-1)$$

Caro: $$E(A_{Caro}) = k_M \times k_C \times (1) + k_M \times (1 - k_C) \times (-1) + (1 - k_M) \times k_C \times (-1) + (1 - k_M) \times (1 - k_C) \times (1)$$

Ausmultiplizieren und Zusammenfassen ergibt:

$$E(A_{Mimi}) = 2k_M + 2k_C - 4k_M k_C - 1$$

$$E(A_{Caro}) = 4k_M k_C - 2k_M - 2k_C + 1$$

Mimis erwartete Auszahlung:

$$E(A_{Mimi}) = 2k_M + 2k_C - 4k_M k_C - 1$$

Frage:

Welche Wahrscheinlichkeit k_M sollte Mimi wählen, wenn Caro mit geringer Wahrscheinlichkeit „Kopf“ spielt?

Annahme:

Caro spielt mit einer Wahrscheinlichkeit von $k_C = 0,2$

Erwartete Auszahlung Mimi dann:

$$\begin{aligned} E(A_{Mimi}) &= 2k_M + 2k_C - 4k_M k_C - 1 \\ &= 2k_M + 0,4 - 0,8k_M - 1 \\ &= 1,2k_M - 0,6 \end{aligned}$$

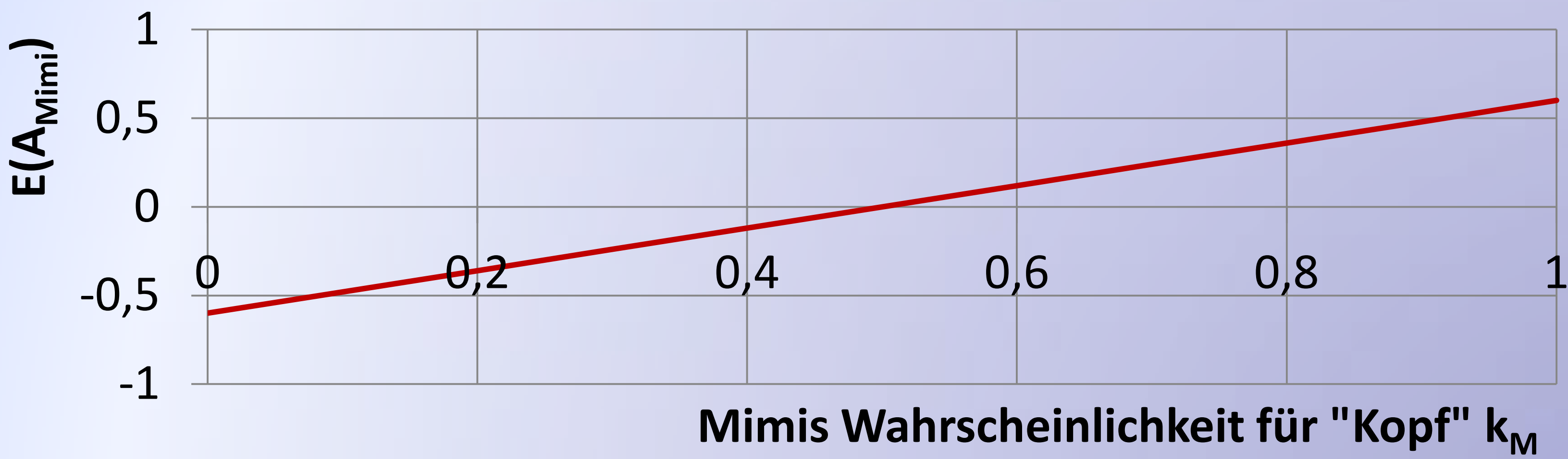
Mimis erwartete Auszahlung also:

$$E(A_{Mimi}) = 1,2k_M - 0,6$$

Wiederholung Frage:

Welche Wahrscheinlichkeit k_M sollte Mimi wählen, wenn Caro mit geringer Wahrscheinlichkeit „Kopf“ spielt?

Mimis erwartete Auszahlung:



Ergebnis:

Mimis erwartete Auszahlung steigt immer weiter an, je weiter sie ihre Wahrscheinlichkeit für Kopf erhöht.

Empfehlung daher:

Mimi sollte mit der maximalen Wahrscheinlichkeit von 100% „Kopf“ spielen, da sie damit ihre erwartete Auszahlung maximiert.

Also:

$k_M = 1$ ist Mimis beste Antwort auf $k_C = 0{,}2$!

Frage:

Was sollte Mimi tun, wenn Caro mit einer Wahrscheinlichkeit von $k_C = 0{,}5$ „Kopf" spielt, also ihre Münze z.B. tatsächlich einfach wirft?

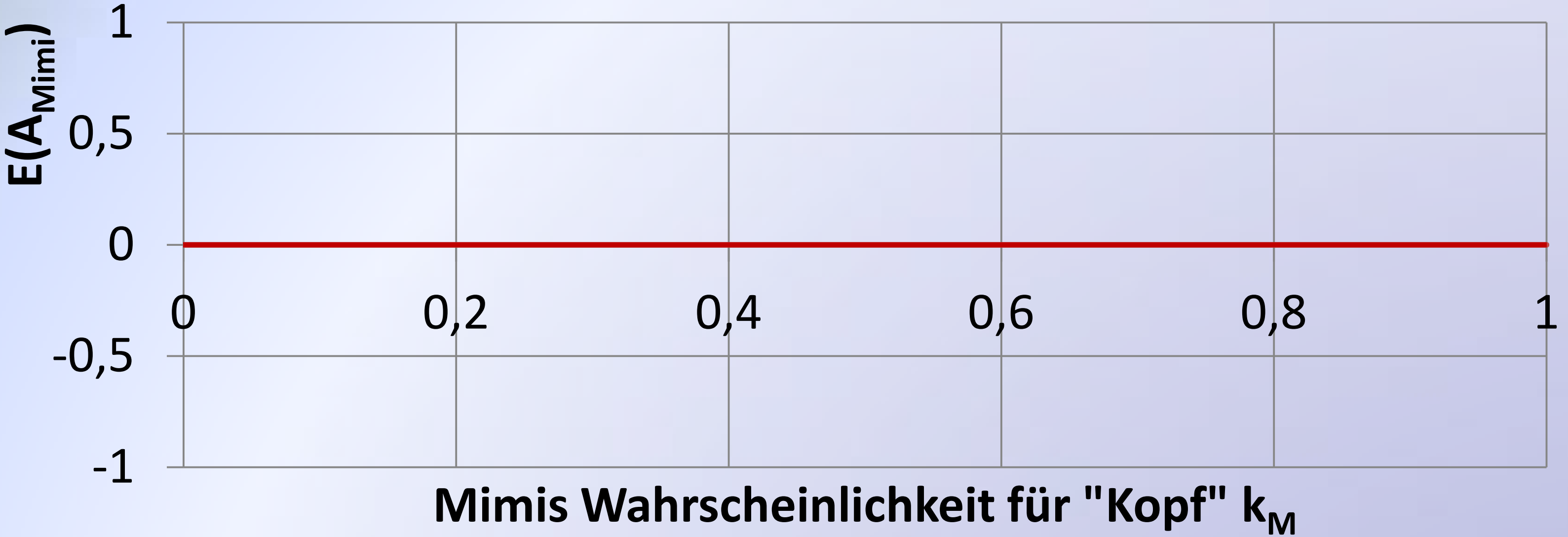
Mimis erwartete Auszahlung dann:

$$\begin{aligned} E(A_{Mimi}) &= 2k_M + 2k_C - 4k_M k_C - 1 \\ &= 2k_M + 1 - 2k_M - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ergebnis:

Wenn Caro mit der Wahrscheinlichkeit von $k_C = 0{,}5$ „Kopf" spielt, ist Mimis erwartete Auszahlung immer Null, egal mit welcher Wahrscheinlichkeit k_M Mimi selbst „Kopf" spielt.

Mimis erwartete Auszahlung für $k_C = 0{,}5$:



Ergebnis:

Mimi kann ihre erwartete Auszahlung nicht beeinflussen!

Jede von Mimis Wahrscheinlichkeiten k_M zwischen Null und 1 ist eine beste Antwort auf $k_C = 0{,}5$!

Frage:

Was sollte Mimi tun, wenn Caro mit einer Wahrscheinlichkeit von k_C = 0,8 „Kopf" spielt?

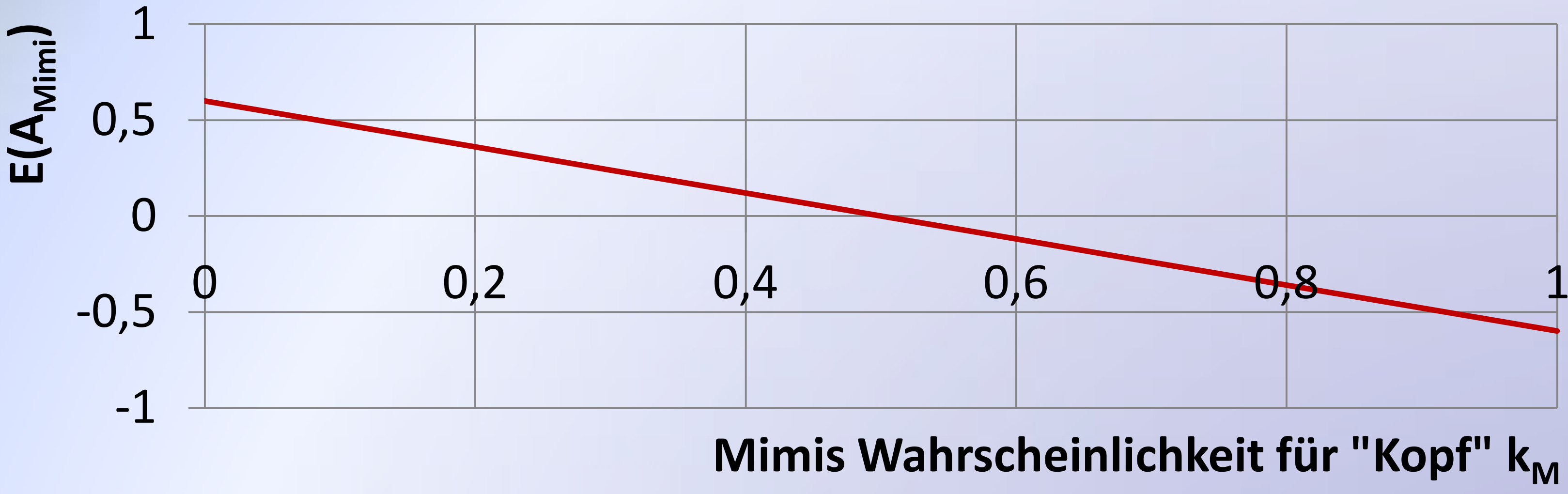
Mimis erwartete Auszahlung dann:

$$\begin{aligned} E(A_{Mimi}) &= 2k_M + 2k_C - 4k_M k_C - 1 \\ &= 2k_M + 1{,}6 - 3{,}2k_M - 1 \\ &= -1{,}2k_M + 0{,}6 \end{aligned}$$

Grafischer Verlauf von Mimis erwarteter Auszahlung:

Siehe Folgeseite

Mimis erwartete Auszahlung für k_C = 0,8:



Ergebnis:

Mimis erwartete Auszahlung sinkt immer weiter, je weiter sie ihre Wahrscheinlichkeit k_M für „Kopf" erhöht.

Mimi sollte mit der minimal möglichen Wahrscheinlichkeit von k_M = 0 „Kopf" spielen.

Zusammenfassung der drei Fälle:

Caros Wahrscheinlichkeit k_C	Mimis beste Antwort k_M
$k_C = 0{,}2$	$k_M = 1$
$k_C = 0{,}5$	Jede beliebige Wahrscheinlichkeit k_M
$k_C = 0{,}8$	$k_M = 0$

Frage:

Was wären Mimis beste Antworten auf andere Wahrscheinlichkeiten k_C für „Kopf“ von Caro?

Allgemeine Betrachtung von Mimis erwarteter Auszahlung:

$$E(A_{Mimi}) = 2k_M + 2k_C - 4k_M k_C - 1$$

Frage:

Wie verändert sich Mimis erwartete Auszahlung, wenn sie ihre Wahrscheinlichkeit k_M erhöht?

Antwort:

Die Veränderung der erwarteten Auszahlung lässt sich an der Ableitung von Mimis erwarteter Auszahlung ablesen.

Ableitung ist:

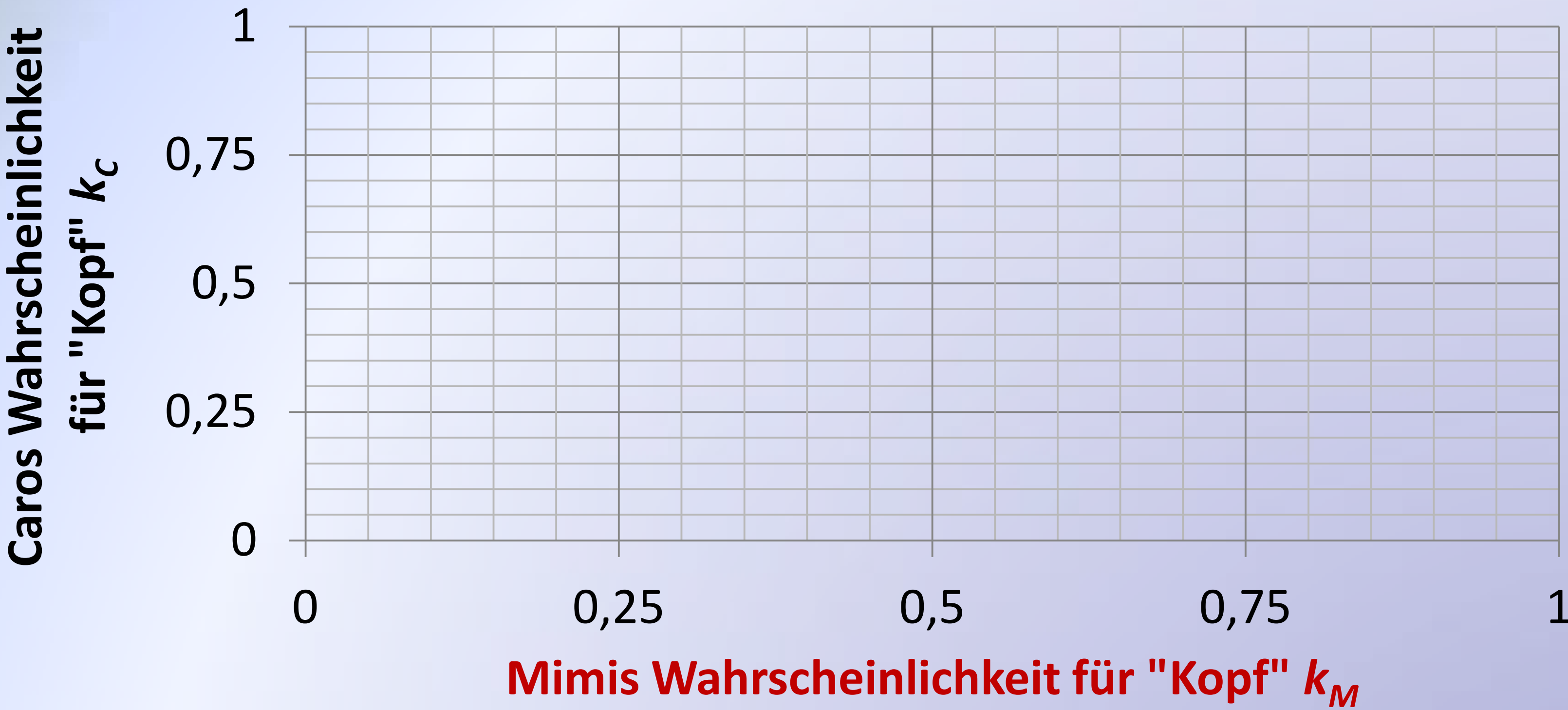
$$\frac{dE(A_{Mimi})}{dk_M} = 2 - 4k_C$$

Ableitung ist:

$$\frac{dE(A_{Mimi})}{dk_M} = 2 - 4k_C$$

Caros Wahrscheinlichkeit k_C	Wert von Mimis Ableitung:	Folgerung
$0 \leq k_C < 0{,}5$	$2 - 4k_C > 0$	Mimis Ableitung ist größer als Null, sie sollte das Maximum k_M = 1 spielen.
$k_C = 0,5$	$2 - 4k_C = 0$	Mimis Ableitung ist Null, es ist egal, was sie spielt.
$0,5 < k_C \leq 1$	$2 - 4k_C < 0$	Mimis Ableitung ist kleiner als Null, sie sollte das Minimum k_M = 0 spielen.

Grafische Darstellung von gemischten Strategien:

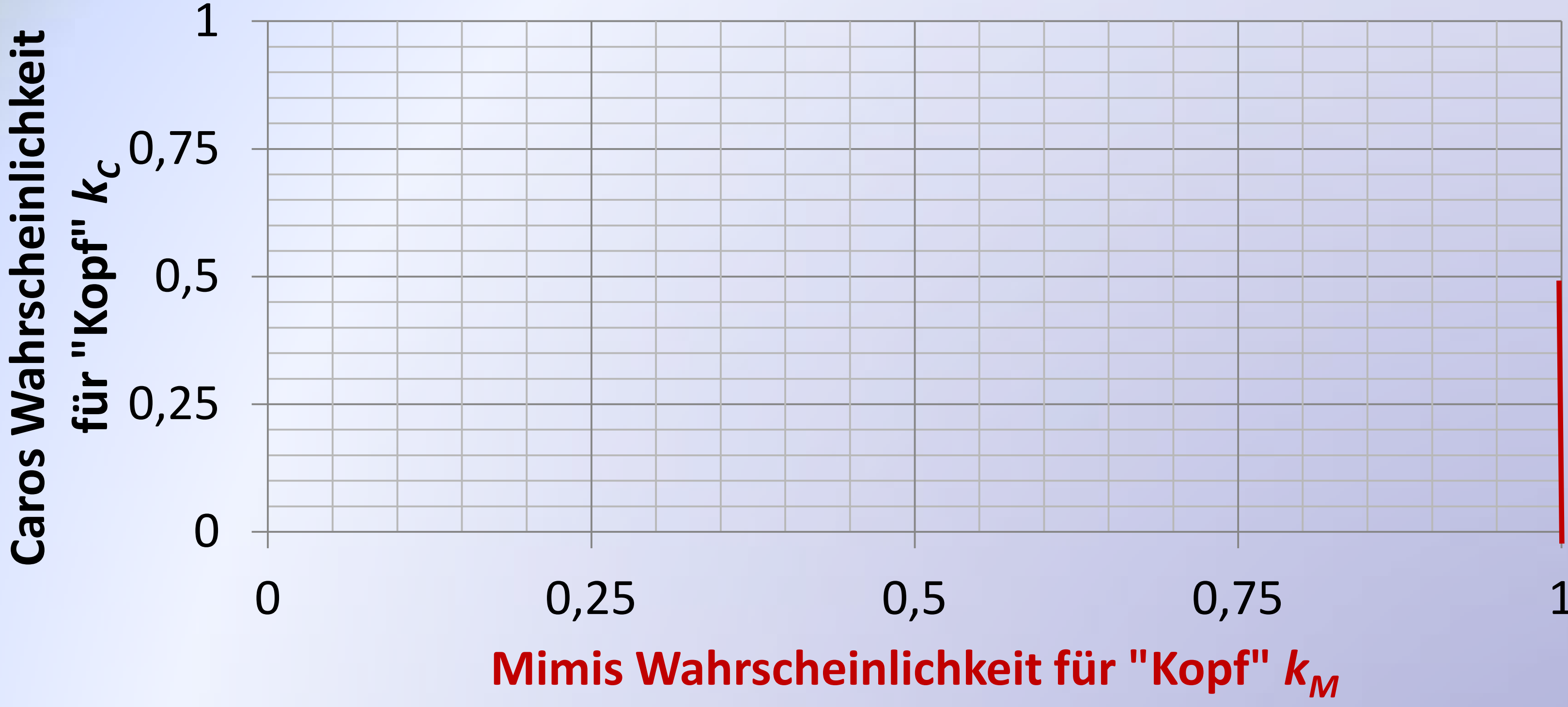


Interpretation:

Jeder Punkt im Diagramm entspricht einer Kombination gemischter Strategien.

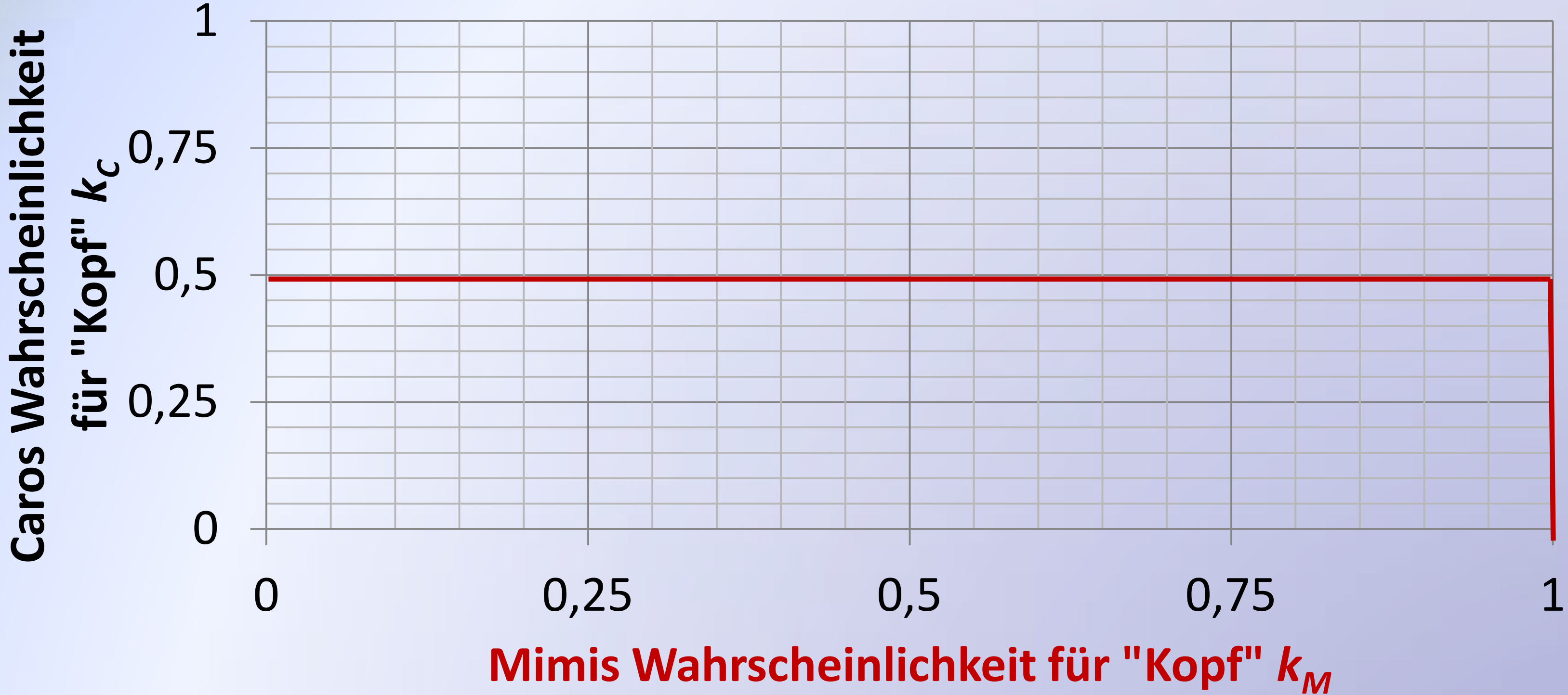
Mimis beste Antwort auf $0 \leq k_C < 0{,}5$:

$k_M = 1$



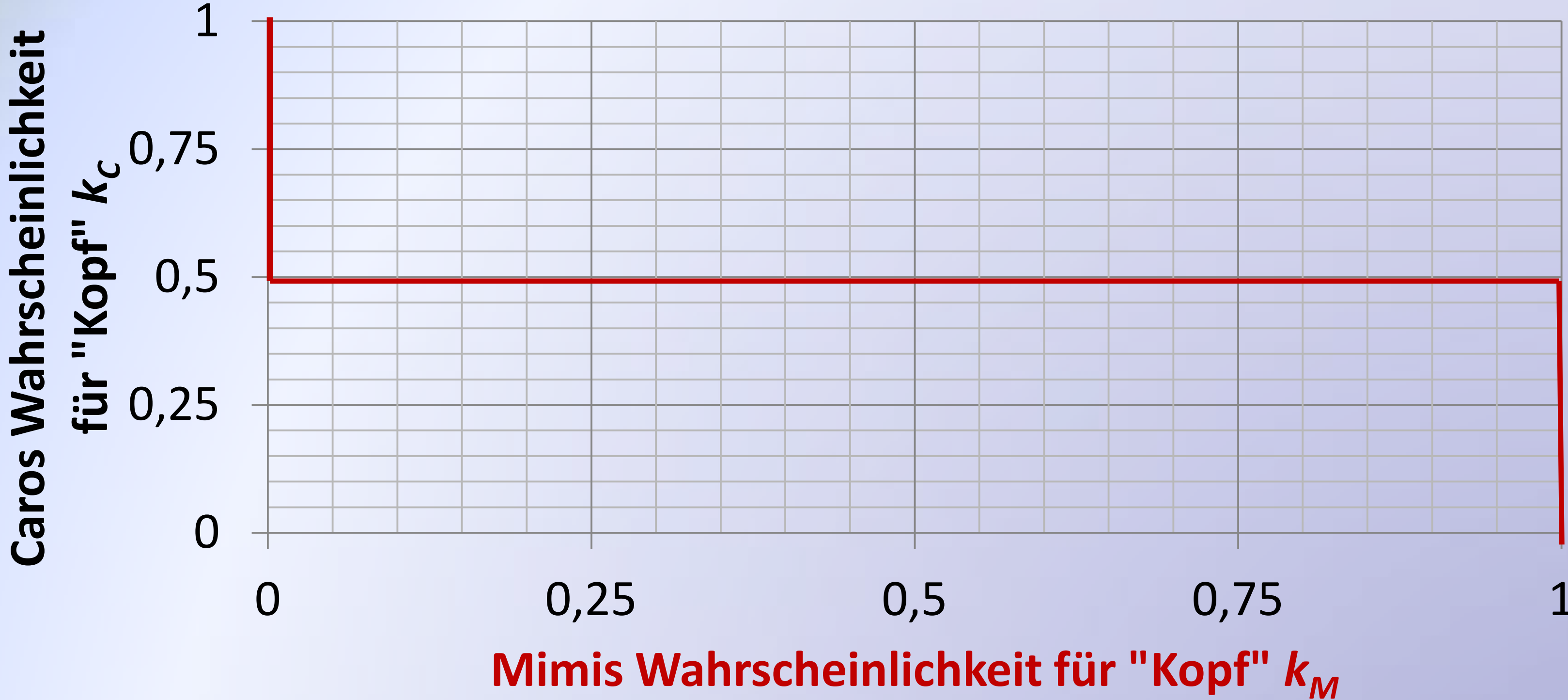
Mimis beste Antwort auf $k_C = 0,5$:

k_M beliebig

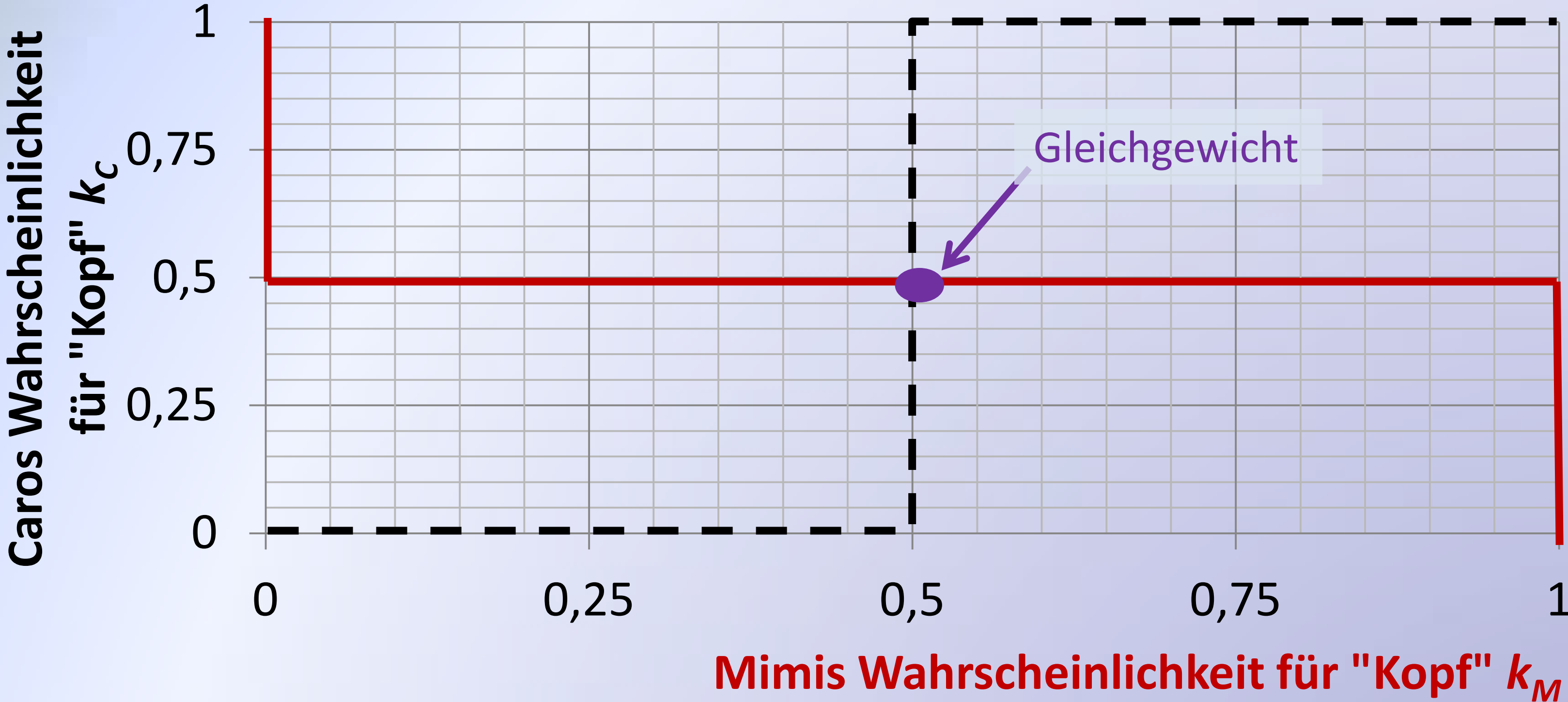


Mimis beste Antwort auf $0,5 < k_C \leq 1$:

$k_M = 0$



Völlig analoge Überlegungen für Caro (schwarz gestrichelte Linie):



Gleichgewicht:

Schnittpunkt der Beste-Antwort-Funktionen!

Beste Antworten der beiden Spielerinnen im Gleichgewicht:

$$P_{Mimi} = \{0,5; 0,5\}$$

$$P_{Caro} = \{0,5; 0,5\}$$

Bedeutung:

Erste Zahl in geschweifter Klammer: Wahrscheinlichkeit für Kopf

Zweite Zahl in geschweifter Klammer: Wahrscheinlichkeit für Zahl

Gleichgewicht GG lautet also:

$$GG = \{P_{Mimi}; P_{Caro}\} = \{\{0,5; 0,5\}; \{0,5; 0,5\}\}$$

Direkte Berechnung des Gleichgewichts

Erwartete Auszahlungen der Spielerinnen:

$$E(A_{Mimi}) = 2k_M + 2k_C - 4k_M k_C - 1$$

$$E(A_{Caro}) = 4k_M k_C - 2k_M - 2k_C + 1$$

Ableitungen der erwarteten Auszahlungen:

$$\frac{dE(A_{Mimi})}{dk_M} = 2 - 4k_C$$

$$\frac{dE(A_{Caro})}{dk_C} = 4k_M - 2$$

Wiederholung Mimis Ableitung:

$$\frac{dE(A_{Mimi})}{dk_M} = 2 - 4k_C$$

Interpretation:

Wenn Mimis Ableitung ungleich Null wäre, könnte Mimi ihre erwartete Auszahlung erhöhen.

Im Gleichgewicht:

Keine Spielerin darf in der Lage sein, ihre erwartete Auszahlung noch zu erhöhen.

Es muss also gelten:

$$\frac{dE(A_{Mimi})}{dk_M} = 2 - 4k_C = 0$$

Wiederholung:

$$\frac{dE(A_{Mimi})}{dk_M} = 2 - 4k_C = 0$$

Lösung der Gleichung:

$$k_C = 0,5$$

Interpretation:

Caro muss „Kopf“ mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 spielen, damit Mimi keine Möglichkeit mehr hat, ihre erwartete Auszahlung zu beeinflussen.

Caros optimale gemischte Strategie daher:

$$P_{Caro} = \{k_C; 1 - k_C\} = \{0,5; 0,5\}$$

Analog muss für Caros Ableitung gelten:

$$\frac{dE(A_{Caro})}{dk_C} = 4k_M - 2 = 0$$

Lösung der Gleichung:

$$k_M = 0,5$$

Interpretation:

Mimi muss „Kopf" mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 spielen, damit Caro keine Möglichkeit mehr hat, ihre erwartete Auszahlung zu beeinflussen.

Mimis optimale gemischte Strategie daher:

$$P_{Mimi} = \{k_M; 1 - k_M\} = \{0,5; 0,5\}$$

Gleichgewicht lautet also:

$$GG = \{P_{Mimi}; P_{Caro}\} = \{\{0,5; 0,5\}; \{0,5; 0,5\}\}$$

Interpretation:

Wenn beide Spielerinnen ihre Wahrscheinlichkeiten so wählen, kann die jeweils andere ihre erwartete Auszahlung nicht mehr beeinflussen.

Ergebnis:

Wenn es keine Möglichkeit gibt, die eigene Auszahlung zu beeinflussen, gibt es auch keinen Grund mehr, die eigene gemischte Strategie nachträglich zu ändern.

Dann aber:

Die gefundenen gemischten Strategien sind beste Antworten aufeinander!

Ein alternativer Berechnungsweg

Ergebnis von oben:

Wenn Caro ihre optimale gemischte Strategie wählt, ist es für Mimi gleichgültig, ob sie dagegen „Kopf“, „Zahl“ oder eine beliebige gemischte Strategie spielt.

Folgerung:

Wenn Caro ihre Wahrscheinlichkeit für „Kopf“ optimal wählt, ist Mimis erwartete Auszahlung für „Kopf“ genauso hoch wie ihre erwartete Auszahlung für Zahl.

Formal muss also gelten:

$$\boldsymbol{E(A_{Mimi}(Kopf)) = E(A_{Mimi}(Zahl))}$$

Betrachtung der Auszahlungsmatrix aus Mimis Perspektive:

		Caro	
		Kopf k_C	Zahl $(1-k_C)$
Mimi	Kopf	-1	+1
	Zahl	+1	-1

Erwartete Auszahlungen:

$$E(A_{Mimi}(Kopf)) = k_C(-1) + (1-k_C)(+1) = 1 - 2k_C$$

$$E(A_{Mimi}(Zahl)) = k_C(+1) + (1-k_C)(-1) = 2k_C - 1$$

Im Gleichgewicht gemischter Strategien muss gelten:

$$E(A_{Mimi}(Kopf)) = E(A_{Mimi}(Zahl))$$

Also:

$$1 - 2k_C = 2k_C - 1$$

Lösung daher:

$$k_C = 0,5$$

Analoges Ergebnis für Caros erwartete Auszahlungen:

$$k_M = 0,5$$

Gleichgewicht also auch bei dieser Berechnungsmethode:

$$GG = \{P_{Mimi};\ P_{Caro}\} = \{\{0,5; 0,5\}; \{0,5; 0,5\}\}$$

Ein altbekanntes Spiel:

		Dirk	
		Oper	Boxen
Britta	Oper	1; 2	0; 0
	Boxen	0; 0	2; 1

Gleichgewichte in reinen Strategien:

{Oper; Oper} und {Boxen; Boxen}

		Dirk	
		Oper o_D	Boxen $(1 - o_D)$
Britta	Oper	1; 2	0; 0
	Boxen	0; 0	2; 1

Brittas erwartete Auszahlungen, wenn Dirk eine gemischte Strategie spielt:

$$E(A_{Britta}(Oper)) = o_D(1) + (1 - o_D)(0) = o_D$$

$$E(A_{Britta}(Boxen)) = o_D(0) + (1 - o_D)(2) = 2 - 2o_D$$

Im Gleichgewicht gemischter Strategien muss gelten:

$$E(A_{Britta}(Oper)) = E(A_{Britta}(Boxen))$$

Gleichheit der beiden erwarteten Auszahlungen impliziert:

$$o_D = 2 - 2o_D$$

Lösung:

$$o_D = 2/3$$

Dirks optimale gemischte Strategie lautet also:

$$P_{Dirk} = \{o_D; 1 - o_D\} = \{2/3; 1/3\}$$

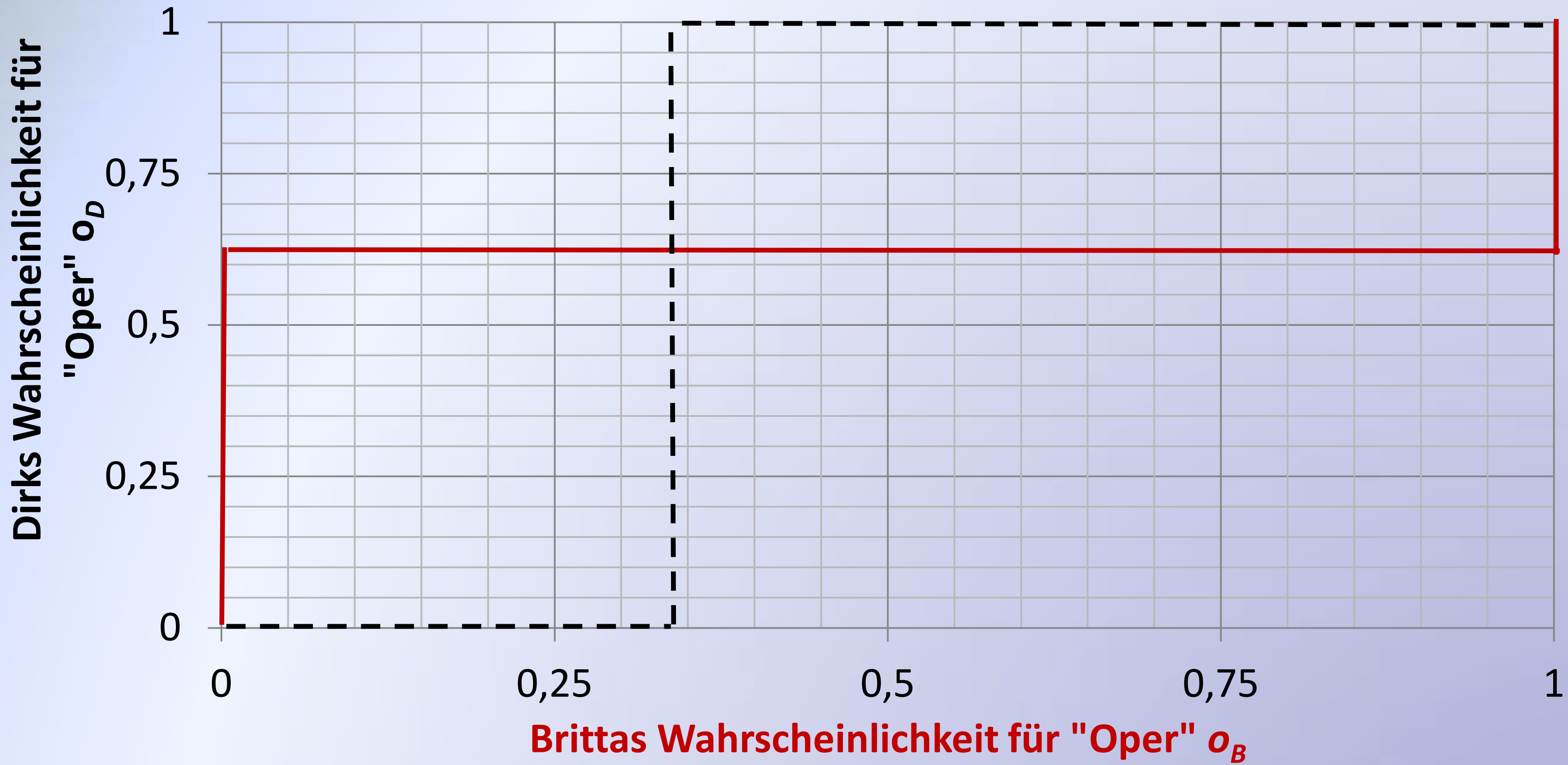
Analog für Britta:

$$P_{Britta} = \{o_B; 1 - o_B\} = \{1/3; 2/3\}$$

Gleichgewicht gemischter Strategien:

$$GG = \{P_{Britta}; P_{Dirk}\} = \{\{1/3; 2/3\}; \{2/3; 1/3\}\}$$

Grafische Darstellung der besten Antworten:



Hier:

Beste Antworten schneiden sich in drei Punkten: Drei Gleichgewichte!

Gleichgewichte lauten also:

{Oper; Oper}

{Boxen; Boxen}

$\{\{1/3; 2/3\}; \{2/3; 1/3\}\}$

Bisherige Beobachtung:

Alle bisher behandelten Spiele hatten mindestens ein Gleichgewicht.

Frage:

Haben alle Spiele ein Gleichgewicht?

Einschränkung:

Zunächst nur Betrachtung von Spielen mit 2 Spielern und jeweils zwei reinen Strategien pro Spieler.

Zur Vereinfachung:

Zunächst nur Betrachtung von Spieler 1

Vier mögliche Fälle:

1. Fall: Strategie „oben" ist dominant.

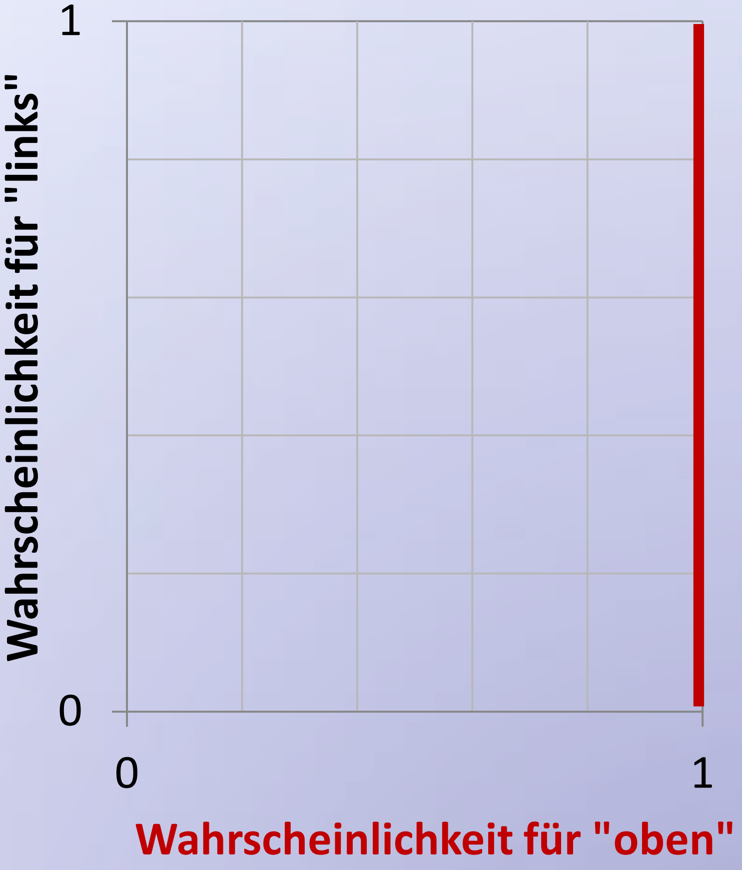
2. Fall: Strategie „unten" ist dominant.

3. Fall: Strategie „oben" ist beste Antwort, falls Spieler 2 „links" spielt, sonst ist „unten" die beste Antwort.

4. Fall: Strategie „unten" ist beste Antwort, falls Spieler 2 „links" spielt, sonst ist „oben" die beste Antwort.

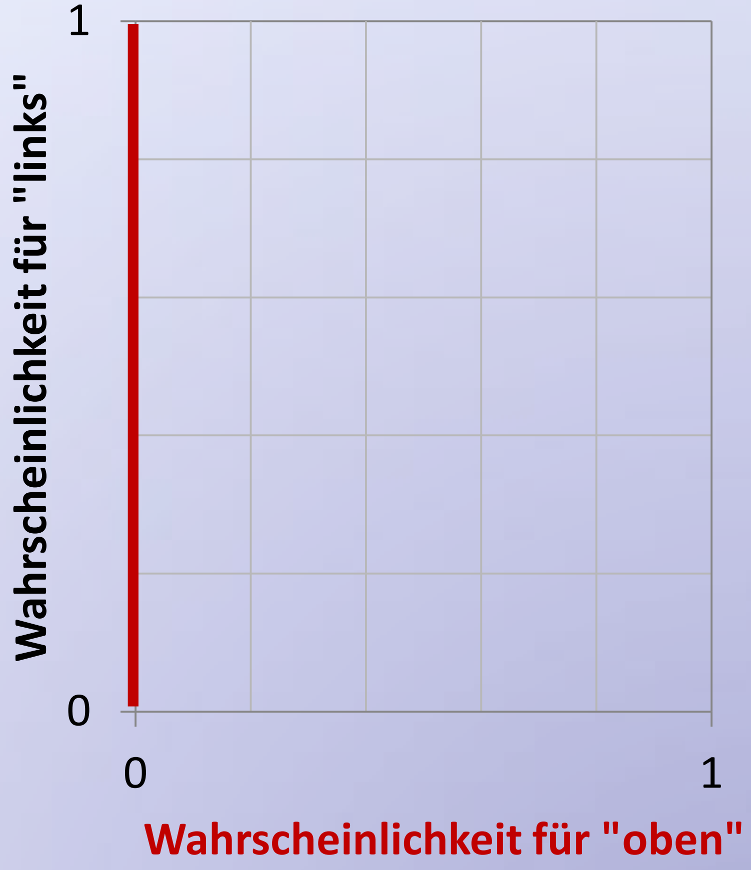
1. Fall:

		Spieler 2	
		links *l*	rechts *(1-l)*
Spieler 1	oben	4	3
	unten	1	1



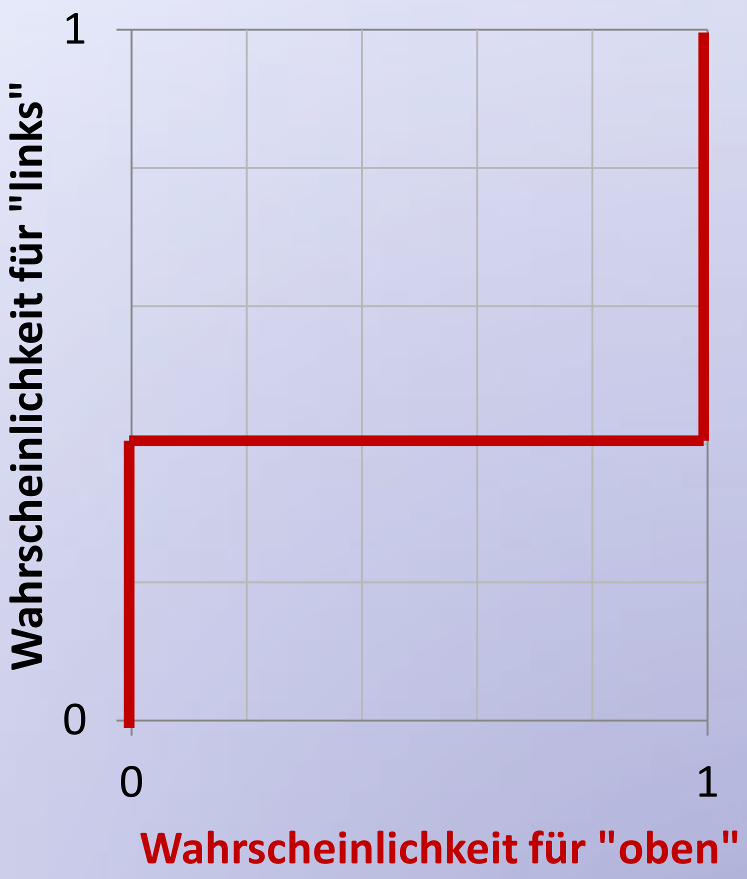
2. Fall:

		Spieler 2	
		links l	rechts $(1-l)$
Spieler 1	oben	1	1
	unten	4	3



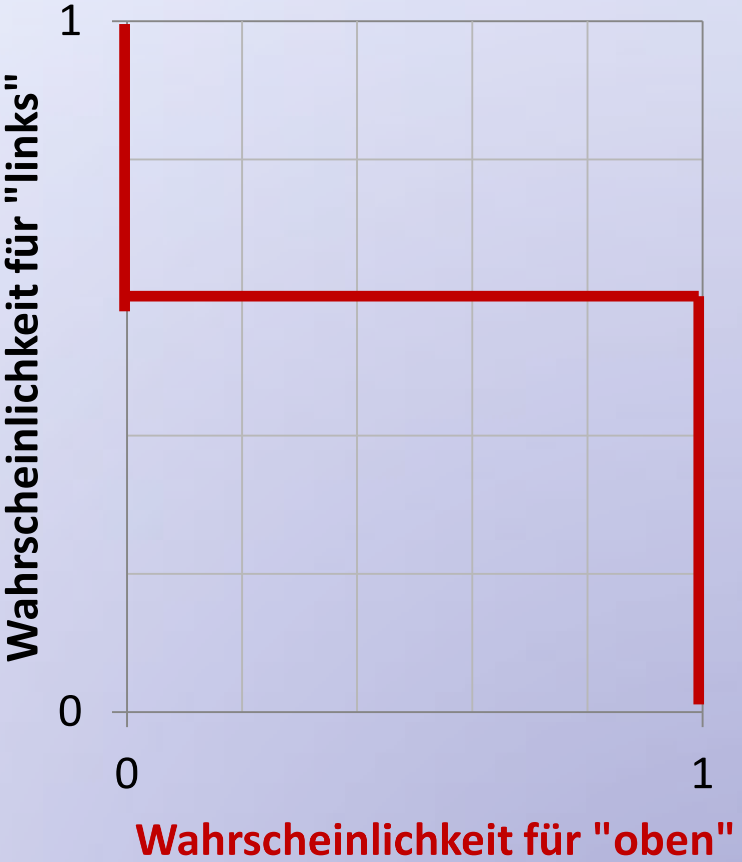
3. Fall:

		Spieler 2	
		links *l*	rechts *(1-l)*
Spieler 1	oben	4	1
	unten	1	3



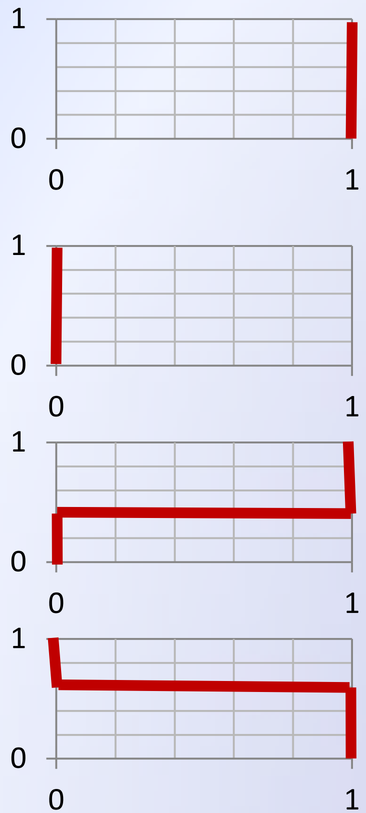
4. Fall:

		Spieler 2	
		links *l*	rechts *(1-l)*
Spieler 1	oben	1	4
	unten	3	1

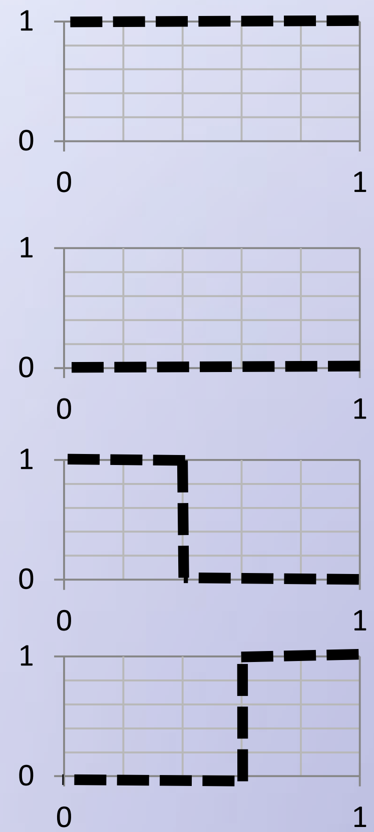


Mögliche Verläufe bester Antworten

Spieler 1:



Spieler 2:



Ergebnis:

Vier mögliche Verläufe bester Antworten pro Spieler.

Folge:

16 Kombinationsmöglichkeiten bester Antworten beider Spieler.

Aber:

In jeder der 16 Möglichkeiten gibt es immer mindestens einen Berühr- oder Schnittpunkt!

Folge:

Jedes Spiel mit 2 Spielern mit je zwei reinen Strategien besitzt ein Gleichgewicht!

Verallgemeinerung:

Jedes Spiel mit einer endlichen Anzahl von Spielern und eine endlichen Anzahl reiner Strategien pro Spieler besitzt ein Gleichgewicht.

Eine Anwendung: Verkäuferwettbewerb

Spieler:

Christian

Benny

Strategien:

Wahl der Arbeitszeiten h_C bzw. h_B

Verkaufserfolge X_C bzw. X_B:

$$X_C = 1000\ h_C$$

$$X_B = 1000\ h_B$$

Vergütung V der Spieler:

$$V_C = 100.000 + 0,1(X_C - X_B)$$

$$V_B = 100.000 + 0,1(X_B - X_C)$$

Arbeitsbelastung:

$$K(h_C) = h_C^2$$

$$K(h_B) = h_B^2$$

Auszahlungen:

$$A_C = V_C - K(h_C) = 100.000 + 0,1(X_C - X_B) - h_C^2$$

$$A_B = V_B - K(h_B) = 100.000 + 0,1(X_B - X_C) - h_B^2$$

Einsetzen von $X_C = 1000\,h_C$ und $X_B = 1000\,h_B$:

$$A_C = 100.000 + 0,1(\,1000h_C - 1000h_B) - h_C^2$$
$$A_B = 100.000 + 0,1(\,1000h_B - 1000h_C) - h_B^2$$

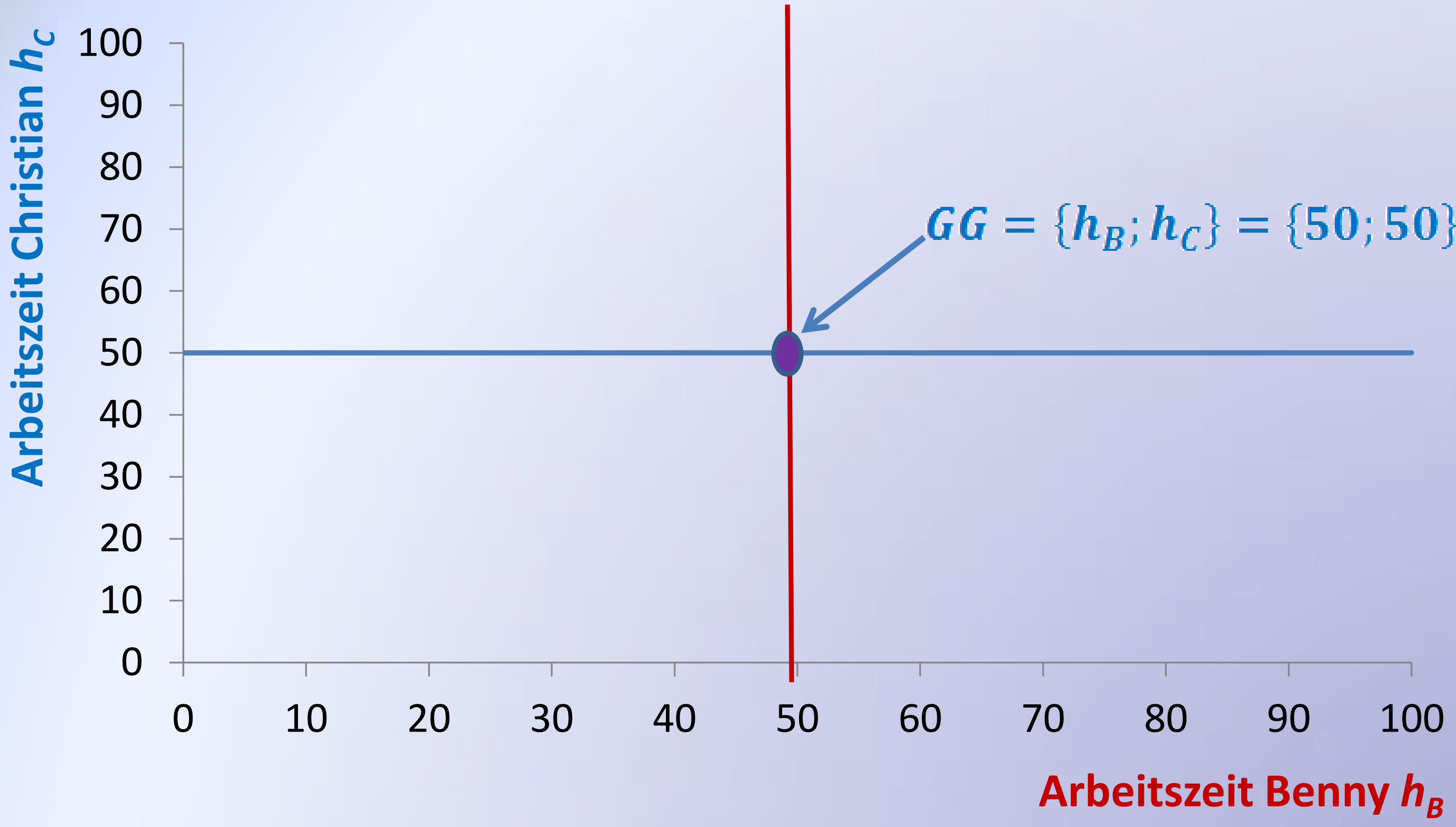
Bedingungen erster Ordnung für die Maxima der Auszahlungen:

$$\frac{dA_C}{d\,h_C} = 100 - 2h_C = 0$$
$$\frac{dA_B}{d\,h_B} = 100 - 2h_B = 0$$

Beste Antworten daher:

$$h_C = 50$$
$$h_B = 50$$

Grafisch:


Arbeitszeit Christian h_C
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
$GG = \{h_B; h_C\} = \{50; 50\}$
Arbeitszeit Benny h_B

Ende des Abschnitts „Statische Spiele mit vollständiger Information“

Nutzungshinweise:

Das hier vorliegende Vorlesungsskript darf ausschließlich im Rahmen gebührenfreier Bildungsangebote ohne weitere Genehmigung genutzt werden. Im Fall von gebührenpflichtigen Bildungsangeboten wenden Sie sich zur Klärung der Nutzungsbedingungen bitte vorab an Prof. Dr. Stefan Winter. Die Weitergabe der hier verwendeten Materialien ist nicht gestattet, alle Unterlagen dienen ausschließlich dem persönlichen Gebrauch. Mit der Nutzung der hier bereitgestellten Materialien erklären Sie sich mit diesen Bedingungen einverstanden.