Aufgaben zur Veranstaltung „Grundzüge der Spieltheorie“ von Prof. Dr. Stefan Winter, Ruhr-Universität Bochum.

Fassung vom 15. Dezember 2014

Weitere Materialien sind erhältlich unter: http://www.rub.de/spieltheorie

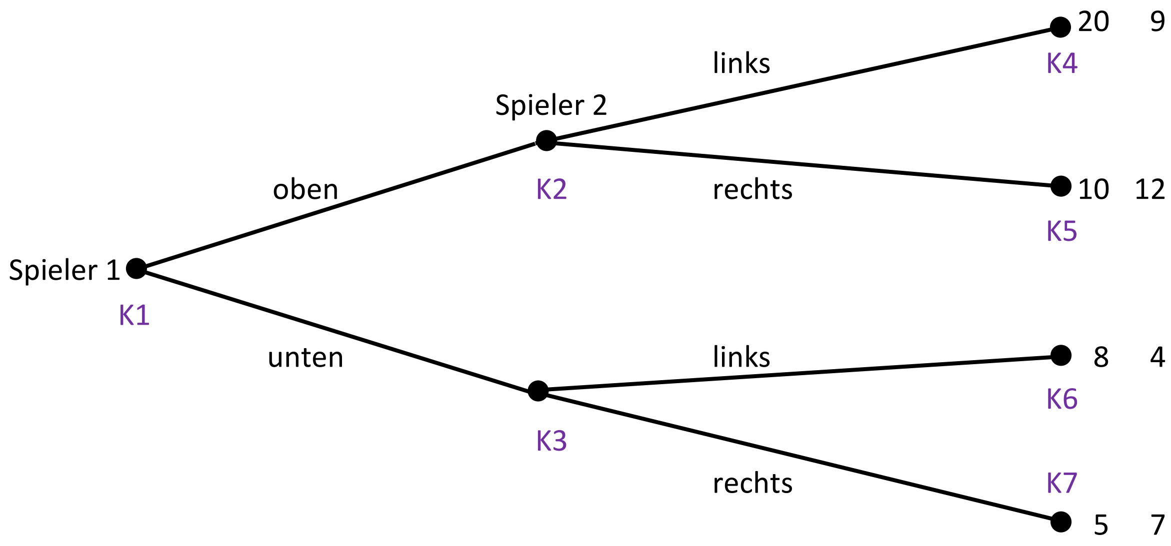
Literaturempfehlung: Winter, Stefan (2015): Grundzüge der Spieltheorie. Verlag Springer Gabler

3.9. Aufgaben

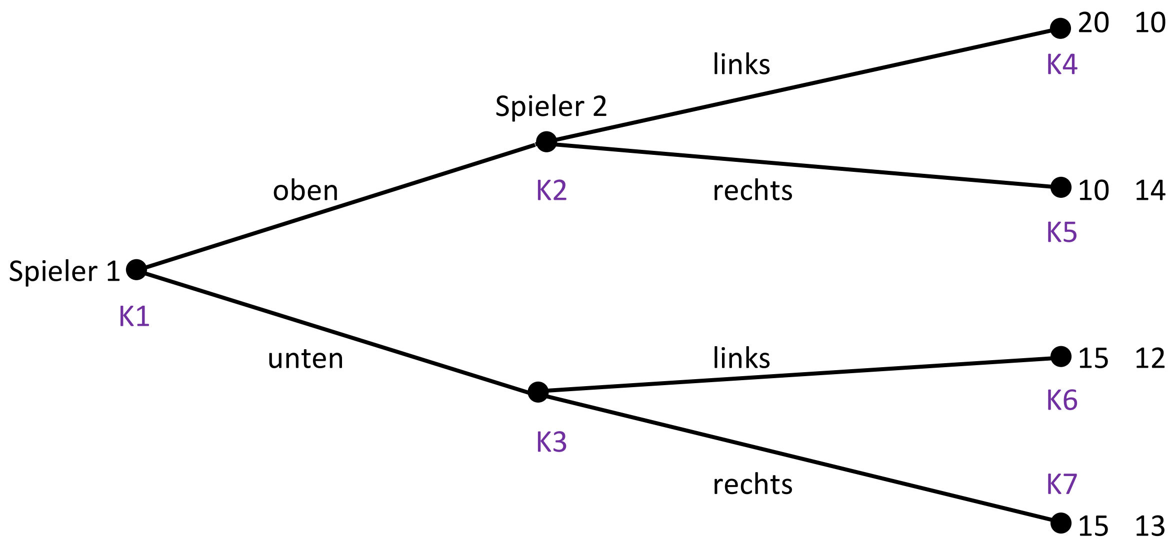
Aufgabe 3.9.1

Bestimmen Sie für die folgenden Spiele jeweils das/die Rückwärtsinduktionsergebnisse. Stellen Sie ferner jedes Spiel auch in Matrixform dar und bestimmen Sie alle Gleichgewichte und jeweils das teilspielperfekte Gleichgewicht!

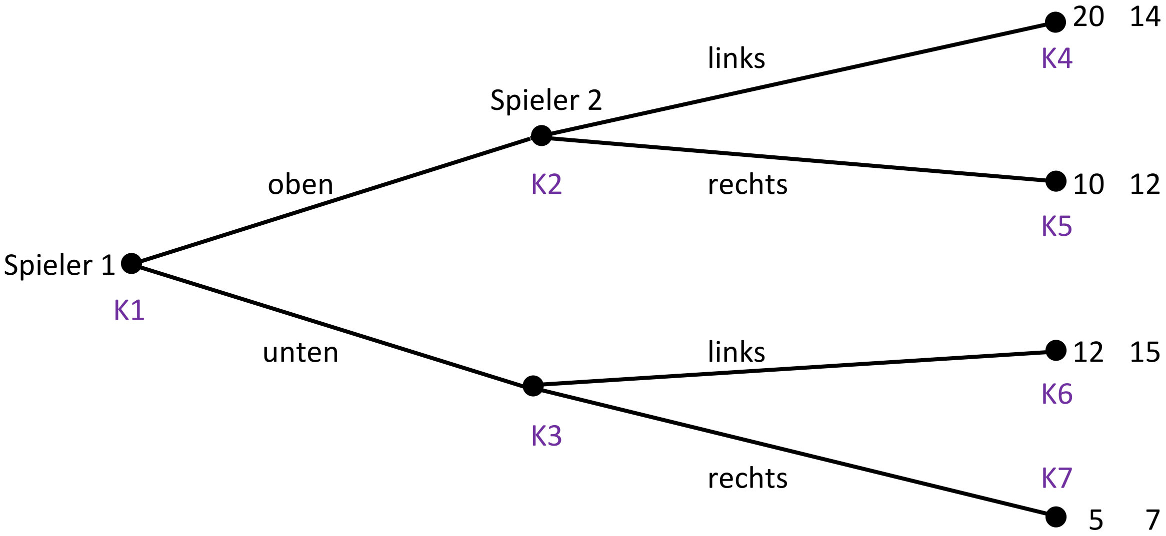
Aufgabe 3.9.1.1



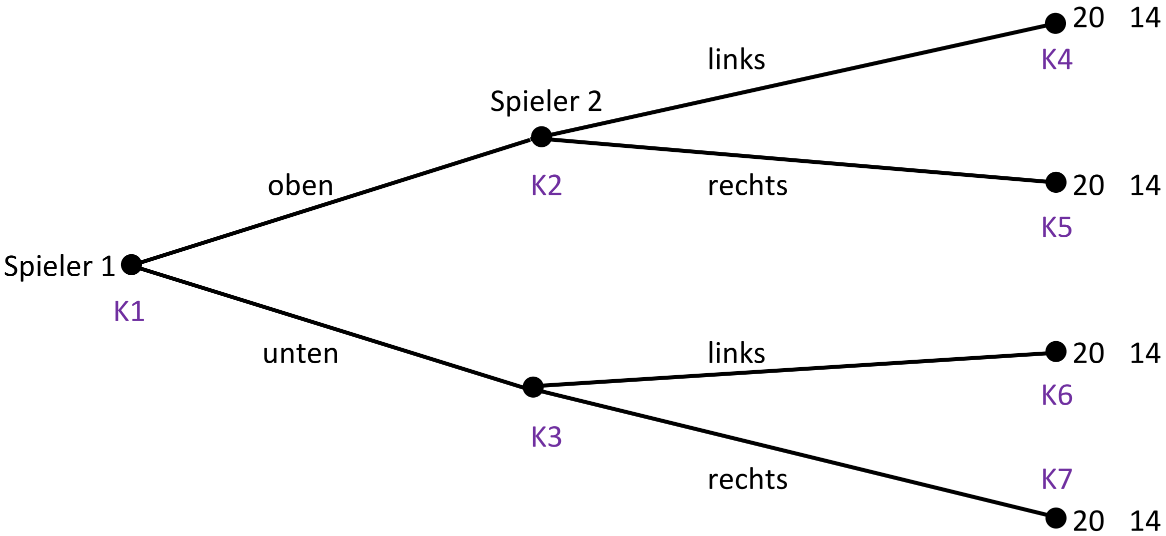
Aufgabe 3.9.1.2



Aufgabe 3.9.1.3

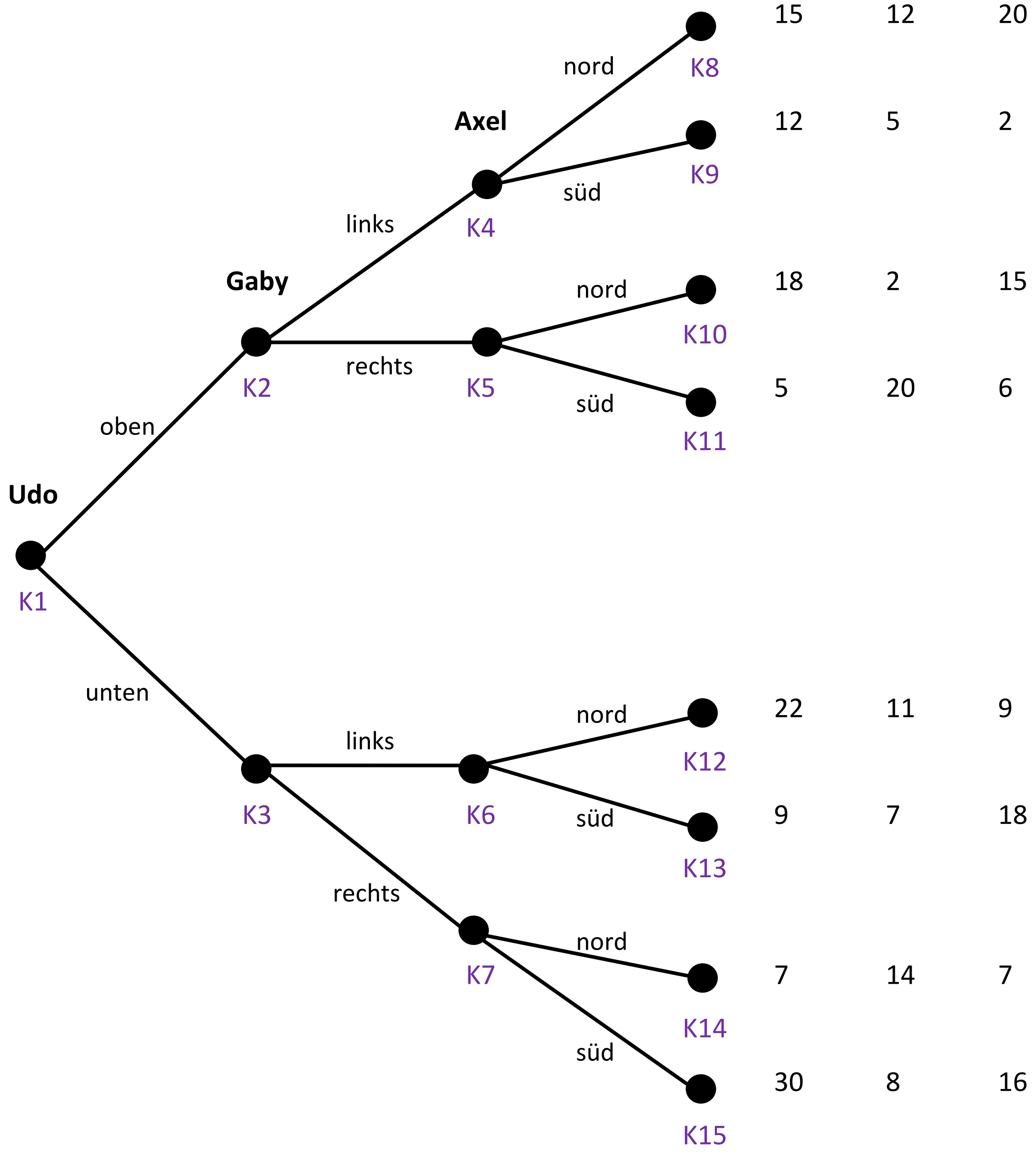


Aufgabe 3.9.1.4



Aufgabe 3.9.2

Bestimmen Sie für das folgende Spiel das teilspielperfekte Gleichgewicht des Spiels. Geben sie die Strategie von Axel in folgender Form an: Wenn K4: „nord“, wenn K5 usw. Gehen Sie analog für Gaby vor. In welchem Endknoten endet das Spiel, wenn das teilspielperfekte Gleichgewicht gespielt wird?



Aufgabe 3.9.3

Nehmen Sie an, dass das folgende Spiel eventuell mehrfach gespielt wird. Nach jeder Runde, in der es gespielt wurde, beträgt die Wahrscheinlichkeit w dafür, dass es nochmals gespielt wird, jeweils 80%.

Die Triggerstrategie von Rita lautet:

> „Ich spiele in der ersten Stufe „oben“. Danach spiele ich solange „oben“, bis Hanne einmal „rechts“ gespielt hat, danach spiele ich für immer „unten“.

Die Triggerstrategie von Hanne lautet:

> „Ich spiele in der ersten Stufe „links“. Danach spiele ich solange „links“, bis Hanne einmal „unten“ gespielt hat, danach spiele ich für immer „rechts“.

Die Auszahlungen beider Spielerinnen bestehen jeweils aus der Summe der erwarteten Auszahlungen pro Stufe.

a) Bilden die oben genannten Triggerstrategien ein Gleichgewicht des Spieles, wenn die Auszahlungen pro Stufe den Werten der folgenden Matrixdarstellung entsprechen?

		Hanne	
		links	rechts
Rita	oben	50 50	5 200
	unten	200 5	20 20

b) Wie hoch ist die kritische Wiederholungswahrscheinlichkeit w, ab der die Triggerstrategien im obigen Spiel ein Gleichgewicht bilden?

c) Nehmen Sie an, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Wiederholung jeweils 75% beträgt. Nehmen Sie zusätzlich an, dass Rita in der Zugkombination „unten“/“links“ keine Auszahlung von 200 bekommt, sondern den Betrag X. Gleiches gilt für Hanne in der Zugkombination „oben“/“rechts“. Das Spiel hat also folgende Auszahlungsmatrix:

		Hanne	
		links	rechts
Rita	oben	50 50	5 X
	unten	X 5	20 20

Bestimmen Sie den kritischen Wert von X so, dass die Triggerstrategien gerade noch ein Gleichgewicht bilden.

Lösung zu Aufgabe 3.9.1.1

Das Rückwärtsinduktionsergebnis des Spiels lautet {oben; rechts}

In Matrixform hat das Spiel folgende Darstellung:

		Spieler 2			
		links wenn oben links wenn unten	links wenn oben rechts wenn unten	rechts wenn oben links wenn unten	rechts wenn oben rechts wenn unten
Spieler 1	oben	20 9	20 9	10 12	10 12
	unten	8 4	5 7	8 4	5 7

Wie zu sehen, hat das Spiel zwei Gleichgewichte, nämlich {oben; rechts wenn oben, links wenn unten} und {oben; rechts wenn oben, rechts wenn unten}. Nur das letzte dieser beiden Gleichgewichte ist teilspielperfekt.

Lösung zu Aufgabe 3.9.1.2

Das Rückwärtsinduktionsergebnis des Spiels lautet {unten; rechts}

In Matrixform hat das Spiel folgende Darstellung:

		Spieler 2			
		links wenn oben links wenn unten	links wenn oben rechts wenn unten	rechts wenn oben links wenn unten	rechts wenn oben rechts wenn unten
Spieler 1	oben	20 10	20 10	10 14	10 14
	unten	15 12	15 13	15 12	15 13

Das Spiel hat nur ein Gleichgewicht, nämlich {unten; rechts wenn oben, rechts wenn unten}. Das Gleichgewicht ist teilspielperfekt.

Lösung zu Aufgabe 3.9.1.3

Das Rückwärtsinduktionsergebnis des Spiels lautet {oben; links}

In Matrixform hat das Spiel folgende Darstellung:

		Spieler 2			
		links wenn oben links wenn unten	links wenn oben rechts wenn unten	rechts wenn oben links wenn unten	rechts wenn oben rechts wenn unten
Spieler 1	oben	20 14	20 14	10 12	10 12
	unten	12 15	5 7	12 15	5 7

Wie zu sehen, hat das Spiel drei Gleichgewichte, nämlich {oben; links wenn oben, links wenn unten} und {oben; links wenn oben, rechts wenn unten} und {unten; rechts wenn oben, links wenn unten}. Nur das erste dieser drei Gleichgewichte ist teilspielperfekt.

Lösung zu Aufgabe 3.9.1.4

Die Rückwärtsinduktionsergebnisse des Spiels lautet {oben; links}, {oben; rechts}, {unten; links}, {unten; rechts}

In Matrixform hat das Spiel folgende Darstellung:

		Spieler 2			
		links wenn oben links wenn unten	links wenn oben rechts wenn unten	rechts wenn oben links wenn unten	rechts wenn oben rechts wenn unten
Spieler 1	oben	20 14	20 14	20 14	20 14
	unten	20 14	20 14	20 14	20 14

Wie zu sehen, sind alle 8 Strategiekombinationen Gleichgewichte, die auch alle teilspielperfekt sind.

Lösung zu Aufgabe 3.9.2

Das teilspielperfekte Gleichgewicht lautet:

Strategie Udo: „unten“

Strategie Gaby: Wenn K2: „links“, wenn K3: „rechts“

Strategie Axel: Wenn K4: „nord“, wenn K5: „nord“, wenn K6: „süd“, wenn K7: „süd“

Das Spiel endet im Endknoten K15.

Lösung zu Aufgabe 3.9.3

a) Es ist w die Wahrscheinlichkeit für die Wiederholung des Spiels. Es gilt w = 0,8. Wenn Rita die Triggerstrategie spielt und Hanne dies auch tut, dann werden beide Spielerinnen in jeder Stufe die Zugkombination „oben“/“links“ spielen und jeweils Auszahlungen in Höhe von 50 pro Stufe erzielen. Die Summe der erwarteten Auszahlungen aller Stufen ist dann:

$$A_{Trigger} = \frac{50}{1-w} = 250$$

Wenn Rita gegen die Triggerstrategie von Hanne hingegen von ihrer eigenen Triggerstrategie abweicht, dann kann sie zunächst eine Auszahlung von 200 erzielen, indem sie „unten“ spielt. Danach wird Hanne dann allerdings immer „rechts“ spielen, worauf Rita sinnvollerweise dann immer weiter „unten“ spielen wird. Rita bekäme also in der ersten Stufe eine Auszahlung von 200, in allen weiteren Stufen dann jeweils 20. Ihre Auszahlung würde dann insgesamt betragen:

$$A_{Abweichung} = 200 + \frac{20}{1-w} - 20 = 280$$

Wie zu sehen ist, würde es sich für Rita lohnen, von ihrer Triggerstrategie gegen die Triggerstrategie von Hanne abzuweichen, da sie durch die Abweichung ihre Auszahlung von 250 auf 280 erhöhen kann. Die Triggerstrategien bilden in diesem Spiel also kein Gleichgewicht.

b) Die Triggerstrategien bilden dann ein Gleichgewicht, wenn deren Auszahlungen mindestens so hoch sind, wie die Auszahlungen bei Abweichung. Es muss also gelten:

$$A_{Trigger} \geq A_{Abweichung}$$

Oder nach Einsetzen:

$$\frac{50}{1-w} \geq 200 + \frac{20}{1-w} - 20$$

Nach wenigen algebraischen Umformungen erhält man einen kritischen Wert von $w = 0{,}8333$, d.h. die Wahrscheinlichkeit für eine Wiederholung des Spiels muss mindestens 83,33% betragen, damit die Triggerstrategien ein Gleichgewicht des Spiels bilden.

c) Damit die Triggerstrategien gerade noch ein Gleichgewicht bilden, muss gelten

$$\frac{50}{1-w} = X + \frac{20}{1-w} - 20$$

Zusätzlich ist die Vorgabe zu berücksichtigen, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Wiederholung $w = 0{,}75$ betragen soll. Es muss daher gelten

$$\frac{50}{1-0{,}75} = X + \frac{20}{1-0{,}75} - 20$$

Hieraus errechnet sich ein kritischer Wert für X in Höhe von 140. Inhaltlich lässt sich X in diesem Spiel als Maß für den kurzfristigen eigenen Vorteil beim Abweichen von der Triggerstrategie interpretieren. Wenn dieser kurzfristige Vorteil zu groß wird, hier also größer als 140, dann lohnen sich die Triggerstrategien nicht mehr und es wird abgewichen. Die Triggerstrategien würden dann kein Gleichgewicht mehr bilden.