

Mathematik für Maschinenbauer, Bauingenieure und Umwelttechniker II

Vorlesungsskriptum WS 2001/02 - WS 2002/03
überarbeitet Februar 2008

R. Verfürth

Fakultät für Mathematik, Ruhr-Universität Bochum

Inhaltsverzeichnis

Kapitel VII. Potenzreihen	7
VII.1. Reihen	7
VII.1.1. Definition	7
VII.1.2. Absolute Konvergenz	8
VII.1.3. Konvergenzkriterien	8
VII.1.4. Rechenregeln	11
VII.2. Potenzreihen	12
VII.2.1. Definition	12
VII.2.2. Konvergenzradius	12
VII.2.3. Bestimmung des Konvergenzradius	13
VII.2.4. Differentiation und Integration von Potenzreihen	14
VII.2.5. Potenzreihendarstellung einiger Funktionen	15
VII.2.6. Die Binomialreihe	16
VII.2.7. Potenzreihen mit beliebigem Entwicklungspunkt	17
VII.2.8. Koeffizientenvergleich	18
VII.3. Taylorreihen	19
VII.3.1. Die Taylor-Formel	19
VII.3.2. Die Taylor-Reihe	21
VII.3.3. Methoden der Potenzreihenentwicklung	22
VII.4. Anwendungen	23
VII.4.1. Grenzwertbestimmung	23
VII.4.2. Näherungsformeln	24
VII.4.3. Integration	25
VII.4.4. Lösen von Differentialgleichungen	25
Kapitel VIII. Differentiation von Funktionen in mehreren Variablen	29
VIII.1. Kurven im \mathbb{R}^n	29
VIII.1.1. Parameterdarstellungen	29
VIII.1.2. Das begleitende Dreibein, Krümmung und Torsion	31
VIII.2. Reellwertige Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher	35
VIII.2.1. Einige topologische Grundbegriffe	35
VIII.2.2. Reelle Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher	36
VIII.2.3. Grenzwerte und Stetigkeit	37
VIII.2.4. Partielle Ableitungen, der Gradient	38
VIII.2.5. Die totale Ableitung und lineare Approximation	41
VIII.2.6. Einfache Anwendungen	42

VIII.2.7.	Die Richtungsableitung	44
VIII.2.8.	Die Kettenregel	45
VIII.3.	Anwendungen der Differentiation	47
VIII.3.1.	Richtung des stärksten Anstieges	47
VIII.3.2.	Tangenten und Tangentialebene	47
VIII.3.3.	Die Taylor-Formel	49
VIII.3.4.	Die Hesse-Matrix	51
VIII.3.5.	Implizite Funktionen	53
VIII.3.6.	Lokale Extrema	57
VIII.3.7.	Extrema unter Nebenbedingungen	59
VIII.3.8.	Extrema auf kompakten Mengen	64
VIII.4.	Vektorwertige Funktionen	66
VIII.4.1.	Die Differentiation	66
VIII.4.2.	Das Newtonverfahren	68
VIII.4.3.	Die Kettenregel	70
VIII.4.4.	Räumliche Skalaren- und Vektorfelder	71
VIII.4.5.	Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace Operator	73
Kapitel IX.	Integration von Funktionen in mehreren Variablen	77
IX.1.	Parameterintegrale	77
IX.1.1.	Übersicht	77
IX.1.2.	Eigentliche Parameterintegrale	77
IX.1.3.	Uneigentliche Parameterintegrale	80
IX.2.	Kurvenintegrale	81
IX.2.1.	Das Kurvenintegral einer skalaren Funktion	81
IX.2.2.	Anwendungen	83
IX.2.3.	Das Kurvenintegral eines Vektorfeldes	85
IX.2.4.	Das Potential eines Gradientenfeldes	87
IX.2.5.	Die praktische Bestimmung einer Stammfunktion	90
IX.3.	Integration über ebene Bereiche	93
IX.3.1.	Der Flächeninhalt	93
IX.3.2.	Das Doppelintegral	95
IX.3.3.	Praktische Berechnung des Doppelintegrals	96
IX.3.4.	Der Satz von Green	100
IX.4.	Integration über Flächen im Raum	103
IX.4.1.	Parameterdarstellungen	103
IX.4.2.	Der Flächeninhalt	107
IX.4.3.	Das Oberflächenintegral einer skalaren Funktion	108
IX.4.4.	Transformationsformel für Gebietsintegrale	112
IX.4.5.	Der Fluss eines Vektorfeldes	114
IX.4.6.	Der Satz von Stokes	115
IX.5.	Integration über dreidimensionale Bereiche	118
IX.5.1.	Das Volumen	118
IX.5.2.	Das Dreifachintegral	119
IX.5.3.	Praktische Berechnung des Dreifachintegrals	119

IX.5.4.	Die Transformationsformel für Volumenintegrale	121
IX.5.5.	Der Satz von Gauß	124
Kapitel X. Gewöhnliche Differentialgleichungen II		
	Systeme	127
X.1.	Existenz- und Eindeigkeitssätze	127
X.1.1.	Grundbegriffe	127
X.1.2.	Reduktion der Ordnung	128
X.1.3.	Lipschitz-stetige Funktionen	129
X.1.4.	Der Satz von Picard-Lindelöf	130
X.2.	Differentialgleichungen 1. Ordnung	132
X.2.1.	Exakte Differentialgleichungen	132
X.2.2.	Der integrierende Faktor	134
X.3.	Systeme linearer Differentialgleichungen	138
X.3.1.	Grundlegende Eigenschaften	138
X.3.2.	Fundamentalsysteme	138
X.3.3.	Variation der Konstanten	141
X.3.4.	Homogene Systeme mit konstanter Matrix: Der symmetrische Fall	143
X.3.5.	Homogene Systeme mit konstanter Matrix: Der allgemeine Fall	145
X.3.6.	Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	150
X.4.	Stabilität	153
X.4.1.	Motivation	153
X.4.2.	Stabilitätsbegriffe	155
X.4.3.	Stabilitätskriterien	155
X.4.4.	Autonome Systeme	157
	Zusammenfassung	161
	Index	165

KAPITEL VII

Potenzreihen

VII.1. Reihen

VII.1.1. Definition. Jeder Zahlenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ordnen wir eine neue Zahlenfolge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zu durch die Vorschrift

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + \dots + a_n.$$

Diese neue Zahlenfolge nennen wir eine REIHE und bezeichnen sie mit $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k$. Die Zahlen a_0, a_1, \dots heißen die GLIEDER der Reihe; die Zahlen s_0, s_1, \dots heißen ihre PARTIALSUMMEN.

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \text{ ist eine Abkürzung für } \left(\sum_{k=0}^n a_k \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Die Reihe $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k$ heißt KONVERGENT, wenn die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ihrer Partialsummen konvergiert. Ist $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, so schreiben wir $s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ ist eine Abkürzung für } s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k.$$

BEISPIEL VII.1.1. Die GEOMETISCHE REIHE $\sum_{k \in \mathbb{N}} q^k$ besitzt die Glieder $a_k = q^k$ und die Partialsummen (vgl. Beispiel I.2.6 (S. 18, Teil I))

$$s_n = \sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{falls } q \neq 1, \\ n+1 & \text{falls } q = 1. \end{cases}$$

Wegen der Beispiele III.2.4 (S. 114, Teil I) und III.2.9 (S. 116, Teil I) ist die geometrische Reihe genau dann konvergent, wenn $|q| < 1$ ist. In diesem Fall ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \text{falls } |q| < 1.$$

BEISPIEL VII.1.2. Die HARMONISCHE REIHE $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k}$ hat die Glieder $a_k = \frac{1}{k}$. Die harmonische Reihe ist nicht konvergent.

DENN: Da alle Glieder positiv sind, ist die Folge der Partialsummen monoton wachsend. Für $m \in \mathbb{N}^*$ ist

$$\begin{aligned} s_{2^m} &= \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} \\ &= 1 + \sum_{\ell=1}^m \left(\sum_{k=2^{\ell-1}+1}^{2^\ell} \underbrace{\frac{1}{k}}_{\geq 2^{-\ell}} \right) \\ &\geq \sum_{\ell=1}^m \left(\sum_{k=2^{\ell-1}+1}^{2^\ell} 2^{-\ell} \right) \quad \text{je } 2^\ell - 2^{\ell-1} \text{ Summanden} \\ &= \sum_{\ell=1}^m \underbrace{(2^\ell - 2^{\ell-1})}_{=\frac{1}{2}} 2^{-\ell} \\ &= \frac{m}{2}. \end{aligned}$$

Also ist die Folge der Partialsummen nicht beschränkt und damit auch nicht konvergent.

BEISPIEL VII.1.3. Die ALTERNIERENDE HARMONISCHE REIHE $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$ hat die Glieder $a_k = (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$. Wegen des Leibniz-Kriteriums (s.u.) ist sie konvergent.

VII.1.2. Absolute Konvergenz. Die Reihe $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k$ heißt ABSOLUT KONVERGENT, wenn die Reihe $\sum_{k \in \mathbb{N}} |a_k|$ konvergiert. Eine konvergente Reihe, die nicht absolut konvergiert, heißt BEDINGT KONVERGENT.

BEISPIEL VII.1.4. Die alternierende harmonische Reihe ist bedingt konvergent.

BEISPIEL VII.1.5. Die Reihe $\sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k 2^{-k}$ ist konvergent und absolut konvergent.

Es gilt folgender Zusammenhang zwischen Konvergenz und absoluter Konvergenz:

Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.

VII.1.3. Konvergenzkriterien. Wir stellen im Folgenden einige Kriterien für die Konvergenz von Reihen zusammen.

Die Glieder einer konvergenten Reihe bilden eine Nullfolge:

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \text{ konvergent} \implies (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist Nullfolge.}$$

BEMERKUNG VII.1.6. Die harmonische Reihe zeigt, dass die Umkehrung dieser Folgerung nicht gilt.

BEISPIEL VII.1.7. $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{k^k}{k!}$ ist nicht konvergent, denn für alle $k \in \mathbb{N}^*$ ist $\frac{k^k}{k!} \geq 1$.

Ein wichtiges Konvergenzkriterium für alternierende Reihen ist:

LEIBNIZ-KRITERIUM: Für jede monoton fallende Nullfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert die zugehörige alternierende Reihe

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k a_k.$$

Ein wichtiges Vergleichskriterium für Reihen ist:

MAJORANTENKRITERIUM: Besteht für die Reihenglieder die Abschätzung

$$0 \leq |a_k| \leq b_k \text{ für alle } k \geq k_0,$$

dann gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} b_k \text{ konvergent} \implies \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \text{ absolut konvergent}$$

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |a_k| \text{ nicht konvergent} \implies \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k \text{ nicht konvergent.}$$

BEISPIEL VII.1.8. Die Reihe $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k^\alpha}$ ist genau dann konvergent, wenn $\alpha > 1$ ist.

DENN: Ist $\alpha \leq 1$, gilt $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{k^\alpha}$ für alle $k \in \mathbb{N}^*$, und aus dem Majorantenkriterium und Beispiel VII.1.2 folgt, dass $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k^\alpha}$ nicht konvergiert. Sei nun $\alpha > 1$. Die Folge der Partialsummen ist monoton wachsend, da die Glieder der Reihe allesamt positiv sind. Wir müssen daher nur zeigen, dass die Folge der Partialsummen beschränkt ist. Dazu gehen wir ähnlich wie in Beispiel VII.1.2 vor. Für jedes $m \in \mathbb{N}^*$ erhalten wir

$$s_{2^m} = \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k^\alpha}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \sum_{\ell=1}^m \left(\sum_{k=2^{\ell-1}+1}^{2^{\ell}} \underbrace{\frac{1}{k^{\alpha}}}_{\leq 2^{-\alpha\ell+\alpha}} \right) \\
&\leq 1 + \sum_{\ell=1}^m \left(\sum_{k=2^{\ell-1}+1}^{2^{\ell}} 2^{-\alpha\ell+\alpha} \right) \quad \text{je } 2^{\ell} - 2^{\ell-1} \text{ Summanden} \\
&= 1 + \sum_{\ell=1}^m (2^{\ell} - 2^{\ell-1}) 2^{-\alpha\ell+\alpha} \quad 2^{\ell} - 2^{\ell-1} = \frac{1}{2} \cdot 2^{\ell} \\
&= 1 + \sum_{\ell=1}^m \frac{1}{2} 2^{-(\alpha-1)\ell+\alpha} \\
&= 1 + 2^{\alpha-1} \sum_{\ell=0}^m (2^{-(\alpha-1)})^{\ell} \quad \text{Beispiel VII.1.1 mit } q = 2^{-(\alpha-1)} \\
&= 1 + \frac{2^{\alpha-1}}{1 - 2^{-(\alpha-1)}}.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung.

Ein anderes wichtiges Konvergenzkriterium ist:

QUOTIENTENKRITERIUM: Ist $a_k \neq 0$ für alle $k \geq k_0$ und konvergiert die Folge $(\frac{a_{k+1}}{a_k})_{k \geq k_0}$, so gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1 \implies \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \text{ konvergiert absolut.}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1 \implies \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \text{ konvergiert nicht.}$$

BEMERKUNG VII.1.9. An den Beispielen der harmonischen Reihe und der alternierenden harmonischen Reihe erkennt man, dass im Fall $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = 1$ keine Aussage möglich ist.

BEISPIEL VII.1.10. Die Reihen

$$\begin{aligned}
&\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{x^k}{k!}, \\
&\sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \\
&\sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}
\end{aligned}$$

konvergieren für jedes $x \in \mathbb{R}$ absolut.

DENN: Für $x = 0$ sind die Glieder bis auf dasjenige zu $k = 0$ alle gleich Null, und die Behauptung ist offensichtlich. Für $x \neq 0$ gilt jeweils

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{x^k}{k!}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x|}{k+1} = 0,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{k+1} \frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!}}{(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x|^2}{(2k+2)(2k+3)} = 0,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{k+1} \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}}{(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x|^2}{(2k+1)(2k+2)} = 0,$$

und die Behauptung folgt aus dem Quotientenkriterium.

VII.1.4. Rechenregeln. Konvergente Reihen können gliedweise addiert, subtrahiert und mit einem konstanten Faktor multipliziert werden:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_k = a, \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k = b \\ \implies \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k) = a \pm b, \\ \sum_{k=0}^{\infty} (ca_k) = ca. \end{aligned}$$

WARNUNG: Elementare Manipulationen, die bei endlichen Summen den Summenwert nicht ändern, sind bei Reihen *nicht uneingeschränkt* erlaubt. Z.B. können nicht beliebig Klammern gesetzt, Klammern fortgelassen oder Summanden vertauscht werden. Diese Manipulationen sind *nur* bei absolut konvergenten Reihen erlaubt.

CAUCHY-PRODUKT: Für *absolut* konvergente Reihen $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k$ und $\sum_{k \in \mathbb{N}} b_k$ gilt die Produktformel

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^k a_{\ell} b_{k-\ell} \right).$$

VII.2. Potenzreihen

VII.2.1. Definition. Eine POTENZREIHE ist eine Reihe der Form

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k x^k$$

mit $x \in \mathbb{R}$ (variabel!) und $a_0, a_1, \dots \in \mathbb{R}$ (fest!). Die Zahlen a_0, a_1, \dots heißen die KOEFFIZIENTEN der Potenzreihe.

BEISPIEL VII.2.1. Die Potenzreihe $\sum_{k \in \mathbb{N}} x^k$ hat die Koeffizienten $a_k = 1$ ($k \in \mathbb{N}$).

Die Potenzreihe $\sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ hat die Koeffizienten $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = -\frac{1}{6}, \dots$ (allgemein: $a_{2k} = 0, a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$).

VII.2.2. Konvergenzradius. An einer Potenzreihe $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k x^k$ interessieren zu allererst die Menge

$$M = \{x \in \mathbb{R} : \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k x^k \text{ ist konvergent}\}$$

und die Zahl

$$R = \begin{cases} \sup\{|x| : x \in M\} & \text{falls } M \text{ beschränkt ist,} \\ \infty & \text{falls } M \text{ unbeschränkt ist.} \end{cases}$$

Man nennt R den KONVERGENZRADIUS der Potenzreihe. Es gibt drei Möglichkeiten:

$$R = 0, \quad 0 < R < \infty \quad \text{oder} \quad R = \infty.$$

BEISPIEL VII.2.2. Die Potenzreihe $\sum_{k \in \mathbb{N}} x^k$ hat den Konvergenzradius 1. Denn gemäß Beispiel VII.1.1 (S. 7) ist sie genau dann konvergent, wenn $|x| < 1$ ist.

BEISPIEL VII.2.3. Die drei Reihen aus Beispiel VII.1.10 (S. 10) sind für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergent und haben daher den Konvergenzradius ∞ .

BEISPIEL VII.2.4. Die Potenzreihe $\sum_{k \in \mathbb{N}} k! x^k$ ist für $x = 0$ konvergent, da alle Glieder bis auf das Erste gleich Null sind. Für $x \neq 0$ ist sie nicht konvergent, da dann $(k! x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist. Also hat diese Reihe den Konvergenzradius 0.

Für eine Potenzreihe $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k x^k$ mit Konvergenzradius R gilt:

- (1) $R = 0 \iff$ Die Reihe konvergiert nur für $x = 0$.
- (2) Ist $R > 0$, konvergiert die Reihe $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k x^k$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < R$.
- (3) Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > R$ ist die Reihe $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k x^k$ nicht konvergent.

VII.2.3. Bestimmung des Konvergenzradius. Der Konvergenzradius R einer Potenzreihe $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k x^k$ kann häufig mit einem der folgenden drei „Tricks“ berechnet werden:

- (1) Es gibt ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_k \neq 0$ für alle $k \geq k_0$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$ existiert oder ist ∞ , dann ist

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|.$$

- (2) In regelmäßigen Abständen sind einer oder mehrere Koeffizienten gleich Null, d.h. $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k x^k = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n x^{r+\ell n}$ mit $r \geq 0$, $\ell \geq 1$ und $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right|$ existiert oder gleich ∞ ist, gilt

$$R = \sqrt[\ell]{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right|}.$$

(Dabei ist $\sqrt[\ell]{\infty} = \infty$ zu setzen!)

- (3) $R = \sup B$ mit $B = \{r \geq 0 : (|a_k| r^k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ ist beschränkt}\}$.

BEISPIEL VII.2.5. Für die Potenzreihe $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{k^k}{k!} x^k$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| &= \frac{\frac{k^k}{k!}}{\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!}} \\ &= \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} (k+1) \\ &= \frac{1}{\left(\frac{k+1}{k}\right)^k} \\ &= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k} \\ &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

Also hat sie den Konvergenzradius $\frac{1}{e}$.

BEISPIEL VII.2.6. Die Potenzreihen

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} x^k, \quad \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k} x^k, \quad \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2} x^k$$

haben alle den Konvergenzradius 1 (es ist jeweils $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = 1$). Sie haben aber ein sehr unterschiedliches Verhalten in den Randpunkten $x = -1$ und $x = 1$:

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} x^k \quad \text{ist für } x = -1 \text{ und } x = 1 \text{ nicht konvergent,}$$

$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k} x^k$ ist für $x = 1$ nicht konvergent

und für $x = -1$ bedingt konvergent,

$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k^2} x^k$ ist für $x = -1$ und $x = 1$ absolut konvergent.

BEISPIEL VII.2.7. Für die Potenzreihe $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} (-1)^{k+1} \frac{1}{k^5 k} x^{2k+1}$ erhalten wir mit unserem zweiten „Trick“ den Konvergenzradius

$$R = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)5^{n+1}}{n5^n}} = \sqrt{5}.$$

BEISPIEL VII.2.8. Die Koeffizientenfolge der Potenzreihe $\sum_{k \in \mathbb{N}} x^{k^2}$ weist immer größer werdende Lücken auf. Wir können daher die ersten beiden „Tricks“ nicht anwenden. Wir versuchen also den dritten. Es ist $(|a_k| r^k)_{k \in \mathbb{N}} = (r^{k^2})_{k \in \mathbb{N}}$. Diese Folge ist offensichtlich genau dann beschränkt, wenn $r \leq 1$ ist. Also ist der Konvergenzradius 1.

VII.2.4. Differentiation und Integration von Potenzreihen.

Im Folgenden ist stets $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k x^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Die Vorschrift

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

definiert dann eine Funktion $f : (-R, R) \rightarrow \mathbb{R}$. Wir sagen, die Funktion f wird durch die Potenzreihe dargestellt.

DIFFERENTIATION VON POTENZREIHEN: Eine durch eine Potenzreihe dargestellte Funktion f ist im offenen Konvergenzintervall $(-R, R)$ beliebig oft differenzierbar. Die Ableitungen können durch gliedweise Differentiation bestimmt werden, d.h. für alle $x \in (-R, R)$, und alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k x^{k-n}.$$

BEISPIEL VII.2.9. Für die geometrische Reihe $\sum_{k \in \mathbb{N}} x^k$ aus Beispiel VII.1.2 (S. 8) erhalten wir für alle $x \in (-1, 1)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \\ \frac{1}{(1-x)^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{(1-x)^3} &= \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{1-x} \right) \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2}.\end{aligned}$$

INTEGRATION VON POTENZREIHEN: Potenzreihen können im offenen Konvergenzintervall $(-R, R)$ gliedweise integriert werden, d.h.

$$\int \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right\} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} a_k x^{k+1}.$$

Insbesondere ist für alle $-R < \alpha < \beta < R$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right\} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} a_k (\beta^{k+1} - \alpha^{k+1}).$$

BEISPIEL VII.2.10. Durch Integration der geometrischen Reihe $\sum_{k \in \mathbb{N}} x^k$ ergibt sich für alle $x \in (-1, 1)$:

$$-\ln(1-x) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} x^{k+1}.$$

VII.2.5. Potenzreihendarstellung einiger Funktionen. Als erste Anwendung der Sätze des vorigen Abschnittes ergibt sich:

$$\begin{aligned}\exp(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k && \text{für alle } x \in \mathbb{R} \\ \sin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} && \text{für alle } x \in \mathbb{R} \\ \cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} && \text{für alle } x \in \mathbb{R} \\ \ln(1+x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} && \text{für alle } x \in (-1, 1) \\ \arctan(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} && \text{für alle } x \in (-1, 1).\end{aligned}$$

Zum Nachweis dieser Identitäten gehen wir wie folgt vor:
Wegen

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k!}}{\frac{1}{(k+1)!}} = \lim_{k \rightarrow \infty} (k+1) = \infty$$

hat die erste Potenzreihe den Konvergenzradius ∞ und stellt damit eine auf ganz \mathbb{R} differenzierbare Funktion f dar. Gliedweises Differenzieren liefert für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} k x^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} x^{k-1} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Also ist (vgl. Abschnitt IV.4.1 (S. 157, Teil I)) $f(x) = c \exp(x)$. Wegen $f(0) = 1$ ist $c = 1$.

Die zweite Potenzreihe hat ebenfalls den Konvergenzradius ∞ und stellt eine auf ganz \mathbb{R} beliebig oft differenzierbare Funktion g dar. Indem wir die Potenzreihe zweimal gliedweise differenzieren, erhalten wir

$$g''(x) = -g(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Aus Beispiel IV.2.4 (S. 139, Teil I) folgt

$$g(x) = g(0) \cos(x) + g'(0) \sin(x) = \sin(x).$$

Die Argumentation bei der dritten Potenzreihe ist völlig analog zu derjenigen bei der zweiten.

Die Aussagen für die vierte und fünfte Potenzreihe erhalten wir durch Integration der Identitäten

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k, \\ \frac{1}{1+x^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}. \end{aligned}$$

VII.2.6. Die Binomialreihe. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ definieren wir den Binomialkoeffizienten $\binom{\alpha}{k}$ durch

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)}{k!} & \text{falls } k \geq 1 \\ 1 & \text{falls } k = 0. \end{cases}$$

Dies ist offensichtlich eine Verallgemeinerung des Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ aus Abschnitt I.2.8 (S. 19, Teil I). Die Potenzreihe $\sum_{k \in \mathbb{N}} \binom{\alpha}{k} x^k$ mit

$\alpha \in \mathbb{R}$ heißt BINOMIALREIHE. Wegen

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\binom{\alpha}{k}}{\binom{\alpha}{k+1}} \right| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)}{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1) \cdot (\alpha-k)} \frac{(k+1)!}{k!} \right| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{|\alpha-k|} \\ &= 1 \end{aligned}$$

hat sie den Konvergenzradius 1 und stellt damit auf dem Intervall $(-1, 1)$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion g dar. Durch gliedweise Differentiation erhalten wir

$$\begin{aligned} (1+x)g'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} (1+x) \binom{\alpha}{k} k x^{k-1} \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} k x^{k-1}}_{=\sum_{\ell=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\ell+1} (\ell+1) x^{\ell}} + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} k x^k \\ &= \binom{\alpha}{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left[\binom{\alpha}{k+1} (k+1) + \binom{\alpha}{k} k \right]}_{=\alpha \binom{\alpha}{k}} x^k \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \\ &= \alpha g(x). \end{aligned}$$

Für die Funktion

$$h(x) = \frac{g(x)}{(1+x)^{\alpha}}$$

ergibt sich daher $h'(x) = 0$, also $h(x) = h(0) = 1$. Insgesamt erhalten wir:

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad \text{für alle } x \in (-1, 1), \alpha \in \mathbb{R}.$$

VII.2.7. Potenzreihen mit beliebigem Entwicklungspunkt.

Eine Reihe der Form

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k (x - x_0)^k$$

mit $a_0, a_1, \dots \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt POTENZREIHE MIT ENTWICKLUNGSPUNKT x_0 . Alle früher betrachteten Potenzreihen hatten den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Durch die Transformation $z = x - x_0$ geht eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0 in eine Potenzreihe

$\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k z^k$ vom bisher betrachteten Typ über. Hieran erkennt man, dass sich alle bisherigen Aussagen übertragen. Insbesondere bezeichnet man als Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k (x - x_0)^k$ den Konvergenzradius R der Potenzreihe $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k z^k$. Wegen

$$|x - x_0| < R \iff x_0 - R < x < x_0 + R$$

gilt

$$\begin{aligned} x \in (x_0 - R, x_0 + R) &\implies \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k (x - x_0)^k \text{ konvergiert} \\ x \notin [x_0 - R, x_0 + R] &\implies \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k (x - x_0)^k \text{ konvergiert nicht.} \end{aligned}$$

BEISPIEL VII.2.11. Wegen $\exp(x) = \exp(x - x_0) \exp(x_0)$ wird die Exponentialfunktion durch die Potenzreihe

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{e^{x_0}}{k!} (x - x_0)^k$$

mit Entwicklungspunkt x_0 dargestellt.

VII.2.8. Koeffizientenvergleich. Zwei Potenzreihen

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k x^k \quad \text{und} \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k x^k$$

stellen genau dann dieselbe Funktion dar, wenn alle ihre Koeffizienten übereinstimmen, d.h. $a_k = b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

BEISPIEL VII.2.12. Aus Abschnitt VII.2.6 und dem Cauchy-Produkt aus Abschnitt VII.1.4 (S. 11) folgt für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $x \in (-1, 1)$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha + \beta}{k} x^k &= (1 + x)^{\alpha + \beta} \\ &= (1 + x)^{\alpha} (1 + x)^{\beta} \\ &= \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \right\} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\beta}{k} x^k \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{\ell=0}^k \binom{\alpha}{\ell} \binom{\beta}{k - \ell} \right\} x^k. \end{aligned}$$

Also gilt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und alle $k \in \mathbb{N}$

$$\binom{\alpha + \beta}{k} = \sum_{\ell=0}^k \binom{\alpha}{\ell} \binom{\beta}{k - \ell}.$$

VII.3. Taylorreihen

VII.3.1. Die Taylor-Formel. Wir betrachten eine beliebig oft differenzierbare Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Intervall I und zwei verschiedene Punkte x, x_0 in I . Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aus Abschnitt V.1.3 (S. 167, Teil I) folgt

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt.$$

Auf das Integral wenden wir partielle Integration an mit

$$u(t) = -(x - t), \quad u'(t) = 1, \quad v(t) = f'(t)$$

und erhalten

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) - (x - t)f'(t) \Big|_{t=x_0}^{t=x} + \int_{x_0}^x f''(t)(x - t) dt \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^x f''(t)(x - t) dt. \end{aligned}$$

Erneute partielle Integration mit

$$u(t) = -\frac{1}{2}(x - t)^2, \quad u'(t) = x - t, \quad v(t) = f''(t)$$

ergibt

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 \\ &\quad + \int_{x_0}^x f'''(t) \frac{1}{2}(x - t)^2 dt. \end{aligned}$$

Führen wir diese Prozedur fort, erhalten wir nach n -Schritten

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) \frac{1}{n!} (x - t)^n dt.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung aus Abschnitt V.1.2 (S. 166, Teil I) gibt es ein η zwischen x und x_0 mit

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt &= f^{(n+1)}(\eta) \int_{x_0}^x \frac{1}{n!} (x - t)^n dt \\ &= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta)(x - x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

Das Polynom

$$T_n(f; x_0)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

heißt das n -TE TAYLOR-POLYNOM VON f MIT ENTWICKLUNGSPUNKT x_0 .

Unsere obigen Überlegungen beweisen:

TAYLOR-FORMEL: Für jede auf dem Intervall I $n + 1$ -mal differenzierbare Funktion f und jeden Punkt $x_0 \in I$ gilt

$$f(x) = T_n(f; x_0)(x) + R_{n+1}(f; x_0, x)$$

für alle $x \in I$ mit

$$R_{n+1}(f; x_0, x) = \int_{x_0}^x \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

und

$$R_{n+1}(f; x_0, x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta)(x-x_0)^{n+1}$$

für ein η zwischen x_0 und x .

Wir können die Taylor-Formel wie folgt deuten: Die Funktion f und das Taylor-Polynom $T_n(f; x_0)$ beschreiben zwei Kurven. Beide Kurven gehen durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$. In diesem Punkt haben sie die gleiche Steigung, die gleiche Krümmung und alle Eigenschaften gemeinsam, die durch die Ableitungen bis zur Ordnung n in diesem Punkt bestimmt werden. Das Restglied $R_{n+1}(f; x_0, x)$ erlaubt die Abschätzung des Fehlers $f(x) - T_n(f; x_0)(x)$ in einem von x_0 verschiedenen Punkt.

BEISPIEL VII.3.1. Wegen $\exp^{(n)} = \exp$ ist

$$T_n(\exp; 0)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k$$

und

$$R_{n+1}(\exp; 0, x) = \frac{\exp(\eta)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Für $|x| \leq 1$ ergibt sich hieraus z.B.

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k \right| \leq \frac{e}{(n+1)!} |x|^{n+1}.$$

Wollen wir also z.B. $e^{0.1}$ mit einem Fehler von $\pm 10^{-6}$ berechnen, müssen wir n so groß wählen, dass

$$\frac{e}{(n+1)!} 10^{-(n+1)} \leq 10^{-6}$$

ist. Wegen

$$\frac{e}{5!} 10^{-5} \leq \frac{3}{120} 10^{-5} = 2.5 \cdot 10^{-7}$$

ist dies sicherlich für $n = 4$ erfüllt und wir erhalten

$$e^{0.1} = 1 + 0.1 + \frac{1}{2} 0.01 + \frac{1}{6} 0.001 + \frac{1}{24} 0.0001 \pm 10^{-6}.$$

Eine Folgerung aus der Taylor-Formel ist:

Jede auf einem Intervall $n+1$ -mal differenzierbare Funktion f mit verschwindender $(n+1)$ -ter Ableitung ist ein Polynom vom Grad $\leq n$.

Eine weitere Konsequenz ist der folgende EXTREMWERT-TEST:

Die Funktion f sei auf dem Intervall I n -mal differenzierbar und für $x_0 \in I$ gelte

$$f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Dann gilt:

- (1) x_0 ist eine Extremalstelle von $f \iff n$ ist gerade.
- (2) n gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0 \implies x_0$ ist lokales Maximum.
- n gerade und $f^{(n)}(x_0) > 0 \implies x_0$ ist lokales Minimum.

BEISPIEL VII.3.2. Für

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 19$$

gilt

$$f'(2) = f''(2) = f'''(2) = 0$$

und

$$f^{(4)}(2) = 24.$$

Also ist $x_0 = 2$ ein lokales Minimum von f .

VII.3.2. Die Taylor-Reihe. Die Funktion f sei auf dem Intervall I beliebig oft differenzierbar und x_0 sei ein Punkt aus I .

Die Potenzreihe

$$T(f; x_0)(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k$$

heißt die TAYLOR-REIHE VON f MIT ENTWICKLUNGSPUNKT x_0 .

Gibt es ein $R > 0$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k \quad \text{für alle } |x - x_0| < R,$$

so sagt man, „ f lässt sich in x_0 als Taylor-Reihe darstellen“ oder „ f lässt sich in x_0 in eine Taylor-Reihe entwickeln“.

Wegen Abschnitt VII.2.8 (S. 18) gilt:

Eine Funktion f lässt sich genau dann als eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0 darstellen, wenn sich f in x_0 in eine Taylor-Reihe entwickeln lässt.

WARNUNG: Selbst wenn die Taylor-Reihe von f existiert und einen positiven Konvergenzradius hat, muss sie *nicht* die Funktion f darstellen.

Es gilt:

Die Funktion f sei auf dem Intervall I beliebig oft differenzierbar und x_0 sei ein Punkt aus I . Dann wird f durch seine Taylor-Reihe mit Entwicklungspunkt x_0 dargestellt, wenn das Restglied $R_{n+1}(f; x_0, x)$ aus der Taylor-Formel für $n \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert. Dies ist sicherlich dann der Fall, wenn es Konstanten $A, B \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x \in I$ gilt $|f^{(n)}(x)| \leq AB^n$.

VII.3.3. Methoden der Potenzreihenentwicklung. Es gibt verschiedene Möglichkeiten eine gegebene, beliebig oft differenzierbare Funktion in eine Potenzreihe zu entwickeln. Die erste Möglichkeit ist, die Taylor-Reihe zu bestimmen und die Restglieder $R_{n+1}(f; x_0, x)$ abzuschätzen (vgl. die Taylor-Formel). Dies ist jedoch häufig mühselig. Die zweite Möglichkeit ist, bekannte Potenzreihen zu differenzieren oder zu integrieren.

BEISPIEL VII.3.3. Gemäß Abschnitt VII.2.6 (S. 16) ist für $|t| < 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1+t}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} t^k.$$

Die Transformation $t = -x^2$ liefert für alle $|x| < 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} x^{2k}.$$

Gliedweise Integration dieser Reihe liefert

$$\arcsin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{-\frac{1}{2}}{k} x^{2k+1}.$$

Eine weitere Möglichkeit ist, die Funktion als Summe oder Produkt bekannter Potenzreihen darzustellen.

BEISPIEL VII.3.4. Aus der bekannten Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion ergibt sich

$$\begin{aligned}\cosh(x) &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell)!} x^{2\ell}.\end{aligned}$$

Analog folgt

$$\begin{aligned}\sinh(x) &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)!} x^{2\ell+1}.\end{aligned}$$

BEISPIEL VII.3.5. Aus den bekannten Potenzreihen für $\cos(x)$ und $\frac{1}{1-x}$ und dem Cauchy-Produkt aus Abschnitt VII.1.4 (S. 11) folgt für $|x| < 1$

$$\begin{aligned}\frac{\cos(x)}{1-x} &= \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \right\} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} x^k \right\} \\ &= 1 + x + \left(1 - \frac{1}{2!}\right)x^2 + \left(1 - \frac{1}{2!}\right)x^3 + \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!}\right)x^4 + \dots \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^4 + \dots\end{aligned}$$

VII.4. Anwendungen

VII.4.1. Grenzwertbestimmung. Häufig können Grenzwerte der Form $\frac{0}{0}$ mit Hilfe bekannter Potenzreihenentwicklungen leichter bestimmt werden als mit der Regel von de l'Hôpital aus Abschnitt IV.2.4 (S. 142, Teil I). Zudem gibt dieser Zugang einen besseren Einblick in das Konvergenzverhalten.

BEISPIEL VII.4.1. Definiere für $x \neq 0$

$$f(x) = \frac{e^{-x^2} - 1}{x}.$$

Wie verhält sich diese Funktion für $x \rightarrow 0$?

Aus der Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion erhalten wir mit der Substitution $t = -x^2$:

$$f(x) = \frac{1}{x} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k} - 1 \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k-1} \\
&= -x + \frac{1}{2} x^3 - \frac{1}{6} x^5 + \dots
\end{aligned}$$

Also ist

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Mit $f(0) = 0$ erhalten wir dann eine auf ganz \mathbb{R} definierte Funktion, die beliebig oft differenzierbar ist. Insbesondere können wir in der Reihenentwicklung die Werte der Ableitungen im Nullpunkt ablesen:

$$f'(0) = -1, \quad f''(0) = 0, \quad f^{(3)}(0) = 3, \quad \dots$$

VII.4.2. Näherungsformeln. Mit den Taylor-Formeln erhält man oft leicht berechenbare Näherungsformeln für komplizierte Funktionen.

BEISPIEL VII.4.2. Für den Fall mit Luftwiderstand gilt das Weg-Zeit-Gesetz

$$s(t) = \frac{v_0^2}{g} \ln\left(\cosh\left(\frac{gt}{v_0}\right)\right)$$

mit der Grenzggeschwindigkeit

$$v_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t).$$

Für die ersten vier Ableitungen in $t_0 = 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\dot{s}(t) &= v_0 \frac{\sinh\left(\frac{gt}{v_0}\right)}{\cosh\left(\frac{gt}{v_0}\right)} \\
\Rightarrow \dot{s}(0) &= 0 \\
\ddot{s}(t) &= g \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{gt}{v_0}\right)} \\
\Rightarrow \ddot{s}(0) &= g \\
s^{(3)}(t) &= -2 \frac{g^2}{v_0} \frac{\sinh\left(\frac{gt}{v_0}\right)}{\cosh^3\left(\frac{gt}{v_0}\right)} \\
\Rightarrow s^{(3)}(0) &= 0 \\
s^{(4)}(t) &= -2 \frac{g^3}{v_0^2} \left[\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{gt}{v_0}\right)} - 3 \frac{\sinh^2\left(\frac{gt}{v_0}\right)}{\cosh^4\left(\frac{gt}{v_0}\right)} \right] \\
\Rightarrow s^{(4)}(0) &= -2 \frac{g^3}{v_0^2}.
\end{aligned}$$

Also gilt für kleine t die Näherungsformel

$$\begin{aligned} s(t) &\approx T_4(s; 0)(t) \\ &= \frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{12} \frac{g^3}{v_0^2} t^4. \end{aligned}$$

VII.4.3. Integration. Durch gliedweise Integration von Potenzreihendarstellungen kann man häufig Integrale berechnen, die nicht geschlossen dargestellt werden können.

BEISPIEL VII.4.3. Die Gaußsche Fehlerfunktion ist definiert durch

$$\Phi(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Dieses Integral ist nicht geschlossen darstellbar. Durch Integration der Potenzreihe von e^{-t^2} erhält man die Reihendarstellung

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^{2k} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} x^{2k+1}. \end{aligned}$$

Diese Darstellung erlaubt die Berechnung der Funktionswerte bis zu jeder gewünschten Genauigkeit.

VII.4.4. Lösen von Differentialgleichungen. Oft kann man Differentialgleichungen durch einen Potenzreihenansatz lösen.

BEISPIEL VII.4.4. Wir betrachten die Auslenkung $s(t)$ aus der Ruhelage eines Pendels, dessen Rückstellkraft proportional zum Quadrat der Zeit ist. Zur Zeit $t = 0$ soll sich das Pendel in der Ruhelage befinden und die Geschwindigkeit 1 haben. Wir müssen somit das ANFANGSWERTPROBLEM

$$\begin{aligned} \ddot{s}(t) + t^2 s(t) &= 0 \\ s(0) &= 0 \\ \dot{s}(0) &= 1 \end{aligned}$$

lösen. Hierzu machen wir den Potenzreihenansatz

$$s(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} a_k t^k$$

mit unbekanntem Koeffizienten a_k (dabei ist $s(0) = 0$ mit $a_0 = 0$ schon ausgenutzt!). Falls diese Reihe einen positiven Konvergenzradius hat, können wir sie in die Differentialgleichung einsetzen, gliedweise differenzieren und erhalten

$$0 = \ddot{s}(t) + t^2 s(t)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k \right) + t^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k t^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{k+2} \\
&= 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + \underbrace{\sum_{k=5}^{\infty} k(k-1) a_k t^{k-2}}_{\ell=k-2} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{k+2}}_{\ell=k+2} \\
&= 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + \sum_{\ell=3}^{\infty} t^{\ell} [(\ell+2)(\ell+1)a_{\ell+2} + a_{\ell-2}].
\end{aligned}$$

Die Bedingung $\dot{s}(0) = 1$ und Koeffizientenvergleich ergeben

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1, \\
a_2 &= 0, \\
a_3 &= 0, \\
a_4 &= 0, \\
a_{\ell+2} &= -\frac{1}{(\ell+1)(\ell+2)} a_{\ell-2} \quad \ell \geq 3.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
a_{2k} &= 0, \\
a_{4k+3} &= 0, \\
a_{4k+1} &= (-1)^k \prod_{\ell=1}^k \frac{1}{4\ell(4\ell+1)}.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}
s(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[\prod_{\ell=1}^k \frac{1}{4\ell(4\ell+1)} \right] t^{4k+1} \\
&= t - \frac{1}{20} t^5 + \frac{1}{1440} t^9 - \frac{1}{224640} t^{13} + \dots
\end{aligned}$$

Dies ist zunächst einmal eine rein formale Lösung. Um nachzuweisen, dass die Lösung des Anfangswertproblems tatsächlich durch diese Potenzreihe dargestellt wird, müssen wir zum Abschluss noch nachprüfen, ob sie einen positiven Konvergenzradius hat. Mit dem zweiten „Trick“ aus Abschnitt VII.2.3 (S. 13) erhalten wir für den Konvergenzradius R

$$R = \sqrt[4]{\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{4k+1}}{a_{4k+5}} \right|}$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt[4]{\lim_{k \rightarrow \infty} (4k + 5)(4k + 4)} \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Also stellt die berechnete Potenzreihe auf ganz \mathbb{R} die Lösung des Anfangswertproblems dar.

KAPITEL VIII

Differentiation von Funktionen in mehreren Variablen

In der mathematischen Behandlung von Naturvorgängen treten häufig Funktionen auf, die von mehreren Variablen x_1, \dots, x_n abhängen (etwa von den Ortskoordinaten x, y, z , der Zeit t , dem Druck p, \dots) und deren Wertebereich mehrdimensional ist. Hierfür ist es hilfreich, die Variablen x_1, \dots, x_n zu einem Spaltenvektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

zusammenzufassen. Im Folgenden untersuchen wir daher Funktionen $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$, die jedem Spaltenvektor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in D$ einen mit $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ oder $\mathbf{f}(x_1, \dots, x_n)$ bezeichneten Spaltenvektor im \mathbb{R}^m zuordnen. Hierfür schreiben wir $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^m$ bzw. $D \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$. \mathbb{R}^n heißt URBILDRAUM, D DEFINITIONSBEREICH, \mathbb{R}^m BILDRAUM und $\mathbf{f}(D) = \{\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in D\}$ das BILD der Funktion \mathbf{f} . Zuerst behandeln wir die Sonderfälle $n = 1$, d.h. $\mathbf{f} : \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}^m$, und $m = 1$, d.h. $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$. Der allgemeine Fall ($m > 1, n > 1$) lässt sich hierauf zurückführen.

VIII.1. Kurven im \mathbb{R}^n

VIII.1.1. Parameterdarstellungen. In der Praxis hat man häufig das Problem, ein geometrisches Gebilde „Kurve“ oder „Weg“ analytisch, d.h. durch Funktionen darzustellen. In der Ebene sind bereits einige Darstellungsarten bekannt (s. Abschnitt V.5 (S. 193, Teil I)):

- die evtl. nur abschnittsweise explizite Darstellung $y = f(x)$ als Graph einer Funktion,
- die implizite Darstellung $F(x, y) = 0$,
- die Parameterdarstellung.

Für die allgemeine Behandlung eignet sich am besten die Parameterdarstellung mit der Vorstellung, dass die Kurve die Bahn eines bewegten Punktes darstellt, der zur Zeit t den Ortsvektor $\mathbf{x}(t)$ besitzt.

Wir betrachten daher vektorwertige, auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ erklärte Funktionen $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Jede derartige Funktion besteht aus

n Komponentenfunktionen $x_i : I \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, d.h.

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, t \in I.$$

Der Grenzwertbegriff wird komponentenweise erklärt:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \iff \lim_{t \rightarrow t_0} x_i(t) = c_i \quad (1 \leq i \leq n).$$

Dementsprechend heißt $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ in $t_0 \in I$ bzw. auf I stetig bzw. differenzierbar, wenn *alle* Komponentenfunktionen in $t_0 \in I$ bzw. auf I stetig bzw. differenzierbar sind. Die Ableitung wird komponentenweise berechnet:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)] = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}$$

mit $\dot{x}_i(t) = \frac{d}{dt} x_i(t)$. Man nennt $\dot{\mathbf{x}}(t)$ den TANGENTIALVEKTOR von \mathbf{x} an der Stelle t (vgl. Abschnitt V.5.2 (S. 195, Teil I) für den Fall $n = 2$).

Mit $\mathbf{x}, \mathbf{y} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ gelten folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\alpha \mathbf{x}(t) + \beta \mathbf{y}(t)] &= \alpha \dot{\mathbf{x}}(t) + \beta \dot{\mathbf{y}}(t) \\ \frac{d}{dt} [\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{y}(t)] &= \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \mathbf{y}(t) + \mathbf{x}(t) \cdot \dot{\mathbf{y}}(t) \\ \frac{d}{dt} [\mathbf{x}(t) \times \mathbf{y}(t)] &= \dot{\mathbf{x}}(t) \times \mathbf{y}(t) + \mathbf{x}(t) \times \dot{\mathbf{y}}(t) \quad \text{falls } n = 3 \\ \frac{d}{dt} [g(t) \mathbf{x}(t)] &= \dot{g}(t) \mathbf{x}(t) + g(t) \dot{\mathbf{x}}(t). \end{aligned}$$

DEFINITION VIII.1.1. Seien $G \subset \mathbb{R}^n$ und $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Wir nennen jede stetig differenzierbare Funktion $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow G$ ein KURVENSTÜCK in G mit ANFANGSPUNKT $\mathbf{x}(a)$, ENDPUNKT $\mathbf{x}(b)$ und SPUR $\{\mathbf{x}(t) : a \leq t \leq b\}$. $\dot{\mathbf{x}}(a)$ und $\dot{\mathbf{x}}(b)$ sind als einseitige Ableitungen zu verstehen. Ein Kurvenstück heißt REGULÄR, wenn $\dot{\mathbf{x}}(t) \neq \mathbf{0}$ ist für alle $t \in [a, b]$.

BEMERKUNG VIII.1.2. (1) Unter einer KURVE versteht man eine Kette von aneinanderhängenden Kurvenstücken (vgl. Definition IX.2.2

(S. 82)). Wir beschränken uns im Augenblick aber auf Kurvenstücke.
 (2) Statt „Spur eines Kurvenstückes“ sagt man häufig auch kurz „Kurvenstück“.

Für ein reguläres Kurvenstück $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ existiert für jedes $t \in [a, b]$ die Zahl

$$s(t) = \int_a^t |\dot{\mathbf{x}}(\tau)| d\tau = \int_a^t \sqrt{\dot{x}_1(\tau)^2 + \dots + \dot{x}_n(\tau)^2} d\tau.$$

Sie heißt **BOGENLÄNGE** des Kurvenstückes. $L(\mathbf{x}) = s(b)$ heißt die **LAENGE** des Kurvenstückes. Wegen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung aus Abschnitt V.1.3 (S. 167, Teil I) ist

$$\dot{s}(t) = |\dot{\mathbf{x}}(t)|.$$

Man nennt

$$\begin{aligned} ds &= |\dot{\mathbf{x}}(t)| dt && \text{das (SKALARE) BOGENELEMENT} \\ d\mathbf{x} &= \dot{\mathbf{x}}(t) dt && \text{das VEKTORIELLE BOGENELEMENT.} \end{aligned}$$

ds ist in erster Näherung die im Zeitintervall $[t, t + dt]$ zurückgelegte Weglänge.

VIII.1.2. Das begleitende Dreibein, Krümmung und Torsion. Wir betrachten ein reguläres Kurvenstück $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ im Raum, d.h. $n = 3$. Die Bewegung eines Massenpunktes entlang eines solchen Kurvenstückes und die Auswirkung von Kräften und Momenten in den einzelnen Kurvenpunkten wird am besten in einem der Geometrie angepassten begleitenden kartesischen Koordinatensystem $(\mathbf{x}(t) : \mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ beschrieben, in dem sich auch die Basisvektoren $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ mit dem Parameter t verändern. Dieses Koordinatensystem heißt **BEGLEITENDES DREIBEIN** und wird wie folgt definiert. Es ist

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{|\dot{\mathbf{x}}(t)|} \dot{\mathbf{x}}(t)$$

$\mathbf{T}(t)$ heißt **TANGENTENVEKTOR** des Kurvenstücks an der Stelle t . Weiter ist

$$\mathbf{N}(t) = \frac{1}{|\dot{\mathbf{T}}(t)|} \dot{\mathbf{T}}(t)$$

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$

$\mathbf{N}(t)$ heißt HAUPTNORMALENVEKTOR, $\mathbf{B}(t)$ heißt BINORMALENVEKTOR.

Die Parameterdarstellung der Kurventangente im Punkt $\mathbf{x}(t_0)$ lautet

$$\mathbf{y}(\lambda) = \mathbf{x}(t_0) + \lambda \mathbf{T}(t_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Die von $\mathbf{N}(t_0)$ und $\mathbf{T}(t_0)$ im Punkt $\mathbf{x}(t_0)$ aufgespannte Ebene heißt die SCHMIEGEEBENE der Kurve im Punkt t_0 . Ihre Parameterdarstellung lautet

$$\mathbf{y}(\lambda, \mu) = \mathbf{x}(t_0) + \lambda \mathbf{T}(t_0) + \mu \mathbf{N}(t_0), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Die Änderungsrate

$$\frac{1}{\Delta s} \Delta \mathbf{T} = \frac{1}{s(t_1) - s(t)} [\mathbf{T}(t_1) - \mathbf{T}(t)]$$

des Tangentenvektors bezogen auf die Bogenlänge beschreibt anschaulich das mittlere Krümmungsverhalten der Kurve im Parameterintervall $[t, t_1]$ bzw. $[t_1, t]$. Mit der Regel von le l'Hôpital ergibt sich für den Grenzwert $t_1 \rightarrow t$:

$$\lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{1}{\Delta s} \Delta \mathbf{T} = \frac{1}{\dot{s}(t)} \dot{\mathbf{T}}(t).$$

Wegen $\dot{s}(t) = |\dot{\mathbf{x}}(t)|$ nennt man daher

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{|\dot{\mathbf{x}}(t)|} \dot{\mathbf{T}}(t) & \text{den KRÜMMUNGSVEKTOR und} \\ \kappa(t) = \frac{|\dot{\mathbf{T}}(t)|}{|\dot{\mathbf{x}}(t)|} & \text{die KRÜMMUNG} \end{array}$$

der Kurve an der Stelle t .

Für die Darstellung von $\dot{\mathbf{x}}$ und $\ddot{\mathbf{x}}$ ergibt sich im begleitenden Dreibein:

$$\begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{s}(t) \mathbf{T}(t) \\ \ddot{\mathbf{x}}(t) = \ddot{s}(t) \mathbf{T}(t) + \dot{s}(t)^2 \kappa(t) \mathbf{N}(t). \end{array}$$

Diese Formel hat folgende KINEMATISCHE DEUTUNG:

Stellt \mathbf{x} die Bewegung eines Massenpunktes dar, so ist dessen Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{x}} = \dot{s} \mathbf{T}$ tangential zur Bahn in Durchlaufrichtung und dem Betrag nach gleich der Momentangeschwindigkeit \dot{s} . Der Beschleunigungsvektor $\ddot{\mathbf{x}}$ hat $\ddot{s} \mathbf{T}$ als Tangential- und $\dot{s}^2 \kappa \mathbf{N}$ als Normalkomponente. Daher kann $\frac{1}{\kappa}$ als Radius eines Krümmungskreises in der Schmiegeebene gedeutet werden.

Wegen $\mathbf{T} \times \mathbf{T} = 0$ und $\mathbf{T} \times \mathbf{N} = \mathbf{B}$ ergibt sich aus obiger Formel

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t) = \dot{s}(t)^3 \kappa(t) \mathbf{B}(t).$$

Wegen $|\mathbf{B}| = 1$ folgt

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{|\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)|}{|\dot{\mathbf{x}}(t)|^3}. \\ \mathbf{B}(t) &= \frac{1}{|\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)|} \dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t). \end{aligned}$$

Wegen dieser Formel bestimmt man das begleitende Dreibein $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ am besten in der Reihenfolge

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{1}{|\dot{\mathbf{x}}|} \dot{\mathbf{x}}, \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{|\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}|} \dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}, \\ \mathbf{N} &= \mathbf{B} \times \mathbf{T}. \end{aligned}$$

Für eine ebene Kurve, d.h. $x_3(t) = 0$ für alle t , liefern die hergeleiteten Formeln bis aufs Vorzeichen die Formeln für die Krümmung aus Abschnitt V.5.4 (S. 198, Teil I).

Die Änderungsrate des Binormalenvektors bezogen auf die Bogenlänge beschreibt das Herauswinden der Kurve aus der Schmiegeebene. Daher nennt man

$$\frac{1}{|\dot{\mathbf{x}}(t)|} \dot{\mathbf{B}}(t) \quad \text{den TORSIONSVEKTOR.}$$

Wegen $\mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{B}(t) = |\mathbf{B}(t)|^2 = 1$ ist $\mathbf{B}(t) \cdot \dot{\mathbf{B}}(t) = 0$, d.h. $\dot{\mathbf{B}}$ ist orthogonal zu \mathbf{B} . Wegen

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{B}} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{T} \times \mathbf{N}) \\ &= \dot{\mathbf{T}} \times \mathbf{N} + \mathbf{T} \times \dot{\mathbf{N}} \\ &= \mathbf{T} \times \dot{\mathbf{N}} \end{aligned}$$

ist $\dot{\mathbf{B}}$ auch orthogonal zu \mathbf{T} , also parallel zu \mathbf{N} . Daher gibt es eine skalare Funktion $\tau(t)$ mit

$$\frac{1}{|\dot{\mathbf{x}}(t)|} \dot{\mathbf{B}}(t) = -\tau(t) \mathbf{N}(t).$$

Diese heißt TORSION der Kurve. Es ist

$$\tau(t) = \frac{\det(\dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t))}{|\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)|^2}.$$

BEISPIEL VIII.1.3. Die neutrale Faser einer Schraubenfeder wird dargestellt durch

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ ht \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi n.$$

Dabei ist r der Radius, $2\pi h$ die Ganghöhe und n die Windungszahl. Es ist

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \\ h \end{pmatrix}, \\ \ddot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{pmatrix} -r \cos t \\ -r \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \ddot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{pmatrix} r \sin t \\ -r \cos t \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit der Abkürzung

$$R = |\dot{\mathbf{x}}(t)| = \sqrt{r^2 + h^2}$$

folgt hieraus für das Begleitende Dreibein

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= \frac{1}{R} \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \\ h \end{pmatrix}, \\ \mathbf{N}(t) &= \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{B}(t) &= \frac{1}{R} \begin{pmatrix} h \sin t \\ -h \cos t \\ r \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und für Krümmung und Torsion

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{r}{r^2 + h^2}, \\ \tau(t) &= \frac{h}{r^2 + h^2}. \end{aligned}$$

Eine Belastung $\mathbf{F} = -F\mathbf{e}_3$ mit der Schraubenachse als Wirkungslinie erzeugt in jedem Punkt $\mathbf{x}(t)$ der Schraubenfeder das Moment

$$\mathbf{m}(t) = -\mathbf{x} \times \mathbf{F} = rF \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es besitzt im begleitenden Dreibein $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ die Zerlegung

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= (\mathbf{m} \cdot \mathbf{T})\mathbf{T} + (\mathbf{m} \cdot \mathbf{N})\mathbf{N} + (\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} \\ &= -\frac{Fr^2}{R}\mathbf{T} + \frac{Frh}{R}\mathbf{B}. \end{aligned}$$

VIII.2. Reellwertige Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher

VIII.2.1. Einige topologische Grundbegriffe. Der Betrag eines Vektors $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ist gemäß Abschnitt II.6.7 (S. 104, Teil I) definiert durch

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Dementsprechend ist $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ der Abstand zweier Punkte $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Zu $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ heißt die Menge

$$B_r(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < r\}$$

der (OFFENE) BALL UM \mathbf{a} MIT RADIUS r .

BEISPIEL VIII.2.1. Für $n = 1$ ist $B_r(a)$ das offene Intervall $(a - r, a + r)$. Für $n = 2$ ist $B_r(\mathbf{a})$ das Innere des Kreises mit Mittelpunkt \mathbf{a} und Radius r . Für $n = 3$ ist $B_r(\mathbf{a})$ das Innere der Kugel mit Mittelpunkt \mathbf{a} und Radius r .

DEFINITION VIII.2.2. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere Menge.

- (1) Ein Punkt $\mathbf{a} \in D$ heißt INNERER PUNKT von D , wenn es ein $r > 0$ und einen Ball $B_r(\mathbf{a})$ um \mathbf{a} mit Radius r gibt, der ganz in D liegt, d.h. $B_r(\mathbf{a}) \subset D$.
- (2) Die Menge D heißt OFFEN, wenn jeder Punkt von D ein innerer Punkt ist.
- (3) Ein Punkt $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ heißt RANDPUNKT von D , wenn *jeder* Ball $B_r(\mathbf{b})$ um \mathbf{b} mindestens einen Punkt von D und mindestens einen nicht zu D gehörenden Punkt enthält. Die Menge aller Randpunkte von D heißt RAND von D und wird mit ∂D bezeichnet.
- (4) Eine Menge D heißt ABGESCHLOSSEN, wenn sie alle ihre Randpunkte enthält.

BEISPIEL VIII.2.3. (1) Die Menge $K = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ ist offen mit Rand $\partial K = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$.

(2) Die Menge $R = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ ist abgeschlossen. Die Menge ihrer inneren Punkte ist $\{(x, y) : |x| < 1, |y| < 1\}$, ihr Rand ist

$\partial R = \{(x, y) : |x| = 1 \text{ oder } |y| = 1\}$.

(3) Die Menge $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ ist weder offen, noch abgeschlossen. Ihr Rand ist $\partial S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\} \cup \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(0, y) : 0 \leq y \leq 1\}$, die Menge ihrer inneren Punkte ist $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0\}$.

DEFINITION VIII.2.4. (1) Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt BESCHRÄNKT, wenn es ein $K > 0$ gibt mit $D \subset B_K(\mathbf{0})$, d.h. wenn für alle $\mathbf{x} \in D$ gilt $|\mathbf{x}| < K$.

(2) Eine Menge die beschränkt und abgeschlossen ist, nennen wir KOMPAKT.

BEISPIEL VIII.2.5. (1) Die Menge R aus Beispiel VIII.2.3 (2) ist kompakt.

(2) Die Mengen K und S aus Beispiel VIII.2.3 (1) und (3) sind beschränkt, aber nicht kompakt.

(3) Die Menge $H = \{(x, y) : x \geq 0\}$ ist abgeschlossen, aber nicht beschränkt.

VIII.2.2. Reelle Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher. Unter einer reellen Funktion von n reellen Veränderlichen versteht man eine auf einer nichtleeren Teilmenge D des \mathbb{R}^n definierte Abbildung $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit Werten in \mathbb{R} . Sie ordnet jedem Punkt $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in D$ des Definitionsbereiches eine reelle Zahl $z = f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ zu. Für Funktionen in 2 bzw. 3 reellen Veränderlichen schreibt man häufig auch $f(x, y)$ bzw. $f(x, y, z)$.

Zur Untersuchung und Darstellung einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ ist es häufig vorteilhaft, sie auf speziellen Mengen zu betrachten:

- den NIVEAUMENGEN $N_c = \{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) = c\}$ mit $c \in \mathbb{R}$,
- den zu den Koordinatenachsen parallelen Geraden durch D ; man erhält dann die Funktionen einer reellen Veränderlichen $x_i \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ mit $(a_1, \dots, a_n) \in D$ konstant.

Im Fall $n = 2$ bzw. $n = 3$ bezeichnen die Niveaumengen Kurven in der Ebene bzw. Flächen im Raum.

BEISPIEL VIII.2.6. (1) Die Gerade $2x + 3y = 1$ ist die Niveaumenge der Funktion $f(x, y) = 2x + 3y$ zum Wert $c = 1$.

(2) Der Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ ist die Niveaumenge der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ zum Wert $c = r^2$.

(3) Die Ebene $4x - 2y + 3z = 4$ ist die Niveaumenge der Funktion $f(x, y, z) = 4x - 2y + 3z$ zum Wert $c = 4$.

(4) Die Niveauflächen eines quadratischen Polynoms in drei Veränderlichen sind Quadriken $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c = 0$ im \mathbb{R}^3 .

Wie im Fall $n = 1$ kann man jeder Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ ihren GRAPHEN

$$\Gamma_f = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in D\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

zuordnen. Er ist die Niveaumenge zum Wert $c = 0$ der Funktion $F(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_{n+1} - f(x_1, \dots, x_n)$.

VIII.2.3. Grenzwerte und Stetigkeit. Wir erinnern an die Definition der Stetigkeit einer Funktion einer reellen Veränderlichen aus Abschnitt III.3.1 (S. 119, Teil I).

DEFINITION VIII.2.7. Sei $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ und $\mathbf{a} \in D \cup \partial D$.

- (1) f hat in \mathbf{a} den GRENZWERT $c \in \mathbb{R}$, kurz $f(\mathbf{x}) \rightarrow c$ für $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}$ oder $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = c$, wenn es zu jedem noch so kleinen $\varepsilon > 0$ einen Ball $B_\delta(\mathbf{a})$ um \mathbf{a} mit Radius δ gibt, sodass $|f(\mathbf{x}) - c| < \varepsilon$ ist für alle $\mathbf{x} \in D \cap B_\delta(\mathbf{a})$.
- (2) f heißt STETIG in $\mathbf{a} \in D$, wenn $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$ ist.
- (3) f heißt STETIG auf D , wenn f in jedem Punkt $\mathbf{a} \in D$ stetig ist.

Für stetige Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher gelten die gleichen Rechenregeln wie in Abschnitt III.3.2 (S. 119, Teil I).

BEISPIEL VIII.2.8. Die Projektionen $p_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $p_i(\mathbf{x}) = x_i$ sind stetig. Aufgrund der Rechenregeln für stetige Funktionen ist jedes Polynom

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{k_i \leq m} a_{k_1 \dots k_n} x_1^{k_1} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n}$$

in n reellen Veränderlichen stetig. Ebenso ist jede rationale Funktion

$$f(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x})}{q(\mathbf{x})}$$

in allen Punkten \mathbf{x}_0 stetig, in denen $q(\mathbf{x}_0) \neq 0$ ist.

BEISPIEL VIII.2.9. Betrachte $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2+y^4} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) &= 0 \\ &= f(0, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) &= 0 \\ &= f(0, 0) \end{aligned}$$

aber

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t^2, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t^2 t^2}{t^4 + t^4}$$

$$= 1 \\ \neq f(0, 0).$$

Daher ist f nicht stetig in $\mathbf{0}$.

Analog zu Abschnitt III.3.3 (S. 120, Teil I) gilt

Jede auf einer *kompakten* Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ stetige Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ nimmt dort ihr Minimum und Maximum an, d.h. es gibt ein $\mathbf{x}_{\min} \in D$ und ein $\mathbf{x}_{\max} \in D$ mit

$$f(\mathbf{x}_{\min}) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_{\max})$$

für alle $\mathbf{x} \in D$.

BEISPIEL VIII.2.10. Die Funktion $f(x, y) = e^{xy}$ ist auf \mathbb{R}^2 stetig. Wegen

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^t = \infty$$

nimmt sie auf \mathbb{R}^2 weder Minimum noch Maximum an. Dagegen besitzt sie auf der kompakten Menge R aus Beispiel VIII.2.3 (2) ein Minimum und ein Maximum. Mit Hilfe der Methoden der Abschnitt VIII.3.6 (S. 57) und VIII.3.7 (S. 59) erhalten wir

$$\max_{\mathbf{x} \in R} f(x) = e, \quad \min_{\mathbf{x} \in R} f(\mathbf{x}) = e^{-1}.$$

VIII.2.4. Partielle Ableitungen, der Gradient. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $\mathbf{a} \in D$. Existiert die Ableitung der Funktion $x_i \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ an der Stelle $x_i = a_i$, so nennt man sie die PARTIELLE ABLEITUNG VON f NACH x_i IM PUNKT \mathbf{a} und bezeichnet sie mit $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ oder $f_{x_i}(\mathbf{a})$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) &= f_{x_i}(\mathbf{a}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) \\ &\quad - f(a_1, \dots, a_n)] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{a})]. \end{aligned}$$

BEISPIEL VIII.2.11. Für $f(x, y) = x^2y^3 + y \ln x$ auf $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= f_x(x, y) = 2xy^3 + \frac{y}{x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= f_y(x, y) = 3x^2y^2 + \ln x. \end{aligned}$$

Die Funktion f heißt PARTIELL DIFFERENZIERBAR, wenn alle partiellen Ableitungen existieren. Sie heißt STETIG PARTIELL DIFFERENZIERBAR, wenn alle partiellen Ableitungen existieren und stetig sind. Die Funktion aus Beispiel VIII.2.11 ist stetig partiell differenzierbar.

Fasst man die partiellen Ableitungen einer Funktion f zu einem Vektor zusammen, erhält man den GRADIENTEN von f an der Stelle \mathbf{a} :

$$\text{grad } f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}.$$

BEISPIEL VIII.2.12. Für $f(x, y, z) = e^{x+2y} + x^2yz^3$ erhalten wir

$$\text{grad } f(x, y, z) = \begin{pmatrix} e^{x+2y} + 2xyz^3 \\ 2e^{x+2y} + x^2z^3 \\ 3x^2yz^2 \end{pmatrix}.$$

Jede partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ist eine reelle Funktion von n reellen Veränderlichen und kann ggf. erneut partiell abgeleitet werden. Dies definiert die partiellen Ableitungen höherer Ordnung:

$$\begin{aligned} f_{x_i x_i} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right), \\ f_{x_i x_j} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right), \text{ usw.} \end{aligned}$$

BEISPIEL VIII.2.13. (1) Für die Funktion aus Beispiel VIII.2.11 erhalten wir

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \\ &= 2y^3 - \frac{y}{x^2}, \\ f_{yy}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \\ &= 6x^2y, \\ f_{xy}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ &= 6xy^2 + \frac{1}{x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{yx}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ &= 6xy^2 + \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

(2) Definiere $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Da für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $f(x, 0) = 0$ und $f(0, y) = 0$, ist $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$. Für $(x, y) \neq (0, 0)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= y \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right), \\ f_y(x, y) &= x \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right). \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} f_{xy}(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f_x(0, y) - f_x(0, 0)}{y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{y} \\ &= -1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f_{yx}(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_y(x, 0) - f_y(0, 0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Also ist

$$f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0).$$

Wie Beispiel VIII.2.13 (2) zeigt, kann es bei höheren partiellen Ableitungen einen Unterschied machen, in welcher Reihenfolge man die Variablen „abarbeitet“. Es gilt jedoch:

VERTAUSCHBARKEITSKRITERIUM FÜR PARTIELLE ABLEITUNGEN: Existieren alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung und sind *stetig*, so ist

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$$

für alle $1 \leq i, j \leq n$. Eine analoge Aussage gilt für partielle Ableitungen höherer Ordnung.

Wir führen folgende Abkürzung ein ($k \geq 1$):

$$C^0(D, \mathbb{R}) = \{f : D \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist stetig}\},$$

$$C^k(D, \mathbb{R}) = \{f : D \rightarrow \mathbb{R} : \text{alle partiellen Ableitungen der Ordnung } \leq k \text{ existieren und sind stetig}\}.$$

VIII.2.5. Die totale Ableitung und lineare Approximation.

Sei wieder $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $\mathbf{a} \in D$.

Die Funktion f heißt in Punkt \mathbf{a} TOTAL DIFFERENZIERBAR bzw. LINEAR APPROXIMIERBAR, wenn es einen Vektor $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} \{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - \mathbf{g} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})\} = 0.$$

Ist f im Punkt \mathbf{a} total differenzierbar, wird f in der Nähe von \mathbf{a} durch die lineare Funktion

$$g_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \mathbf{g} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

approximiert. Für den Fehler

$$R_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - g_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$$

dieser Approximation gilt

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}|} R_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = 0.$$

Man sagt hierfür auch

$$R_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = o(|\mathbf{x} - \mathbf{a}|).$$

Die Niveaumenge

$$\{\mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})\}$$

wird also in der Nähe von \mathbf{a} durch die Menge

$$\{\mathbf{x} \in D : \mathbf{g}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})\} = \{\mathbf{x} \in D : \mathbf{g} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0\}$$

approximiert. Für $n = 2$ ist dies eine Gerade durch \mathbf{a} senkrecht zu \mathbf{g} ; für $n = 3$ handelt es sich um eine Ebene durch \mathbf{a} senkrecht zu \mathbf{g} .

Es gilt folgender Zusammenhang zwischen partieller und totaler Differenzierbarkeit:

Die Funktion f sei in $\mathbf{a} \in D$ total differenzierbar. Dann gilt:

- (1) f ist in \mathbf{a} stetig.
- (2) Für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})] = \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}.$$

(3) f ist in \mathbf{a} partiell differenzierbar und $\mathbf{g} = \text{grad } f(\mathbf{a})$.

Teil (3) dieses Ergebnisses besagt:

„ f in \mathbf{a} total differenzierbar $\Rightarrow f$ in \mathbf{a} partiell differenzierbar.“

Die Umkehrung dieser Aussage ist im allgemeinen falsch. Es gilt jedoch:

Jede Funktion $f \in C^1(D, \mathbb{R})$ ist auf D total differenzierbar.

Hieraus ergibt sich:

TEST FÜR DIE TOTALE DIFFERENZIERBARKEIT: Berechne die partiellen Ableitungen und prüfe, ob sie stetig sind.

BEISPIEL VIII.2.14. Für die Funktion $f(x, y) = x^4 + 2x^3y^2 + y$ und den Punkt $\mathbf{a} = (1, 1)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} f(1, 1) &= 4, \\ \text{grad } f(x, y) &= \begin{pmatrix} 4x^3 + 6x^2y^2 \\ 4x^3y + 1 \end{pmatrix}, \\ \text{grad } f(1, 1) &= \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen sind Polynome und somit stetig. Daher ist f total differenzierbar. Die lineare Approximation im Punkt $\mathbf{a} = (1, 1)$ lautet

$$g_{\mathbf{a}}(x, y) = 4 + 10(x - 1) + 5(y - 1).$$

Die Niveaumenge $\{(x, y) : f(x, y) = 4\}$ wird in der Nähe von $(1, 1)$ durch die Gerade $10(x - 1) + 5(y - 1) = 0$, d.h. $10x + 5y = 15$ approximiert. Der Graph von f ist die Fläche $z = x^4 + 2x^3y^2 + y$. Der Punkt $(1, 1, 4)$ liegt auf dieser Fläche. Die Gleichung der Tangentialebene an diese Fläche in diesem Punkt ist

$$z = g_{\mathbf{a}}(x, y)$$

d.h.

$$z = 4 + 10(x - 1) + 5(y - 1).$$

VIII.2.6. Einfache Anwendungen. Für einfache Fehler- und Näherungsrechnungen wird eine Funktion f mehrerer Veränderlicher in der Nähe eines Punktes \mathbf{a} durch ihre lineare Approximation ersetzt.

BEISPIEL VIII.2.15. $f(x, y) = x^y = e^{y \ln(x)}$ wird in $(1, 3)$ wegen

$$f(1, 3) = 1,$$

$$\begin{aligned}\text{grad } f(x, y) &= \begin{pmatrix} yx^{y-1} \\ \ln(x)x^y \end{pmatrix}, \\ \text{grad } f(1, 3) &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

durch $1+3(x-1)$ linear approximiert. Damit erhält man z.B. für $1.02^{3.01}$ den Näherungswert 1.06. Der genaue Wert ist $1.061418168\dots$

Werden statt der wahren Werte $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ die Näherungswerte $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$ gemessen, dann belasten die Messfehler $|\Delta x_i| = |x_i - x_{0i}|$ den Funktionswert mit dem Fehler

$$\begin{aligned}|\Delta f(\mathbf{x})| &= |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| \\ &\approx |\text{grad } f(\mathbf{x}_0) \cdot (x - x_0)| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)(x_i - x_{0i}) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) \right| |x_i - x_{0i}|.\end{aligned}$$

Sind also für die einzelnen Messungen Fehlerschranken $|\Delta x_i| \leq S_i$ bekannt, so erhält man eine ungefähre Fehlerschranke S für die Funktionswerte ($|\Delta f(\mathbf{x})| \leq S$) durch

$$S \approx \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) \right| S_i.$$

BEISPIEL VIII.2.16. Für den Elastizitätsmodul E eines Stabes mit quadratischem Querschnitt a , Länge ℓ , Ausbiegung h und Belastung F gilt

$$E = E(F, h, \ell, a) = 4F\ell^3 h^{-1} a^{-4}.$$

Misst man $\ell = 50$ cm auf 1%, $a = 2$ cm auf 1%, $h = 2$ mm auf 3% und $F = 130$ N auf 0.5% genau, so ergibt die Fehlerrechnung bei linearer Approximation

$$\begin{aligned}\left| \frac{\Delta E}{E} \right| &\approx \frac{1}{|E|} \left| \frac{\partial E}{\partial F} \Delta F + \frac{\partial E}{\partial h} \Delta h + \frac{\partial E}{\partial \ell} \Delta \ell + \frac{\partial E}{\partial a} \Delta a \right| \\ &= \frac{1}{|4F\ell^3 h^{-1} a^{-4}|} |4\ell^3 h^{-1} a^{-4} \Delta F - 4F\ell^3 h^{-2} a^{-4} \Delta h \\ &\quad + 12F\ell^2 h^{-1} a^{-4} \Delta \ell - 16F\ell^3 h^{-2} a^{-5} \Delta a| \\ &\leq \left| \frac{\Delta F}{F} \right| + \left| \frac{\Delta h}{h} \right| + 3 \left| \frac{\Delta \ell}{\ell} \right| + 4 \left| \frac{\Delta a}{a} \right| \\ &= 0.105\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} E &= 203125 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \pm 10.5\% \\ &= 203125 \pm 21328.125 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}. \end{aligned}$$

VIII.2.7. Die Richtungsableitung. Die partiellen Ableitungen einer Funktion f geben die Änderung der Funktionswerte entlang der Koordinatenachsen an. Es ist naheliegend, die entsprechenden Änderungen entlang beliebiger Richtungen zu betrachten. Ist daher $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger *Einheitsvektor*, d.h. $|\mathbf{v}| = 1$, so nennen wir den Grenzwert

$$\partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})]$$

– sofern er existiert – die **RICHTUNGSABTEILUNG VON f IN RICHTUNG \mathbf{v} AN DER STELLE \mathbf{a} .**

Es gilt folgender Zusammenhang mit totaler und partieller Differenzierbarkeit.

Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ sei im Punkt \mathbf{a} total differenzierbar. Dann existieren alle Richtungsableitungen $\partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a})$ von f in \mathbf{a} und es ist

$$\partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) v_i.$$

BEISPIEL VIII.2.17. (1) Ein Massenpunkt durchquere mit der konstanten Geschwindigkeit $\mathbf{v} = (2, 4, 7)^T$ einen Raum mit der Temperaturverteilung $T = f(x, y, z) = 2xy + 4yz$. Er erfährt dann im Punkt \mathbf{a} die momentane Temperaturänderung

$$|\mathbf{v}| \partial_{\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}} f(\mathbf{a}) = |\mathbf{v}| \text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}.$$

Für $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$ ergibt sich insbesondere der Wert

$$\text{grad } f(1, 1, 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2+4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = 56.$$

(2) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Für die zugehörige quadratische Form q gilt

$$\begin{aligned} q(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \\ \text{grad } q(\mathbf{x}) &= 2A \mathbf{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_{\mathbf{v}}q(\mathbf{x}) &= 2(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} \\ &= 2\mathbf{x}^T A\mathbf{v}.\end{aligned}$$

VIII.2.8. Die Kettenregel. Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar und $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow D$ die Parameterdarstellung eines Kurvenstückes in D . Dann wird durch $[a, b] \ni t \mapsto f(\mathbf{x}(t))$ eine Funktion $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert. Diese Funktion ist differenzierbar und es gilt die KETTENREGEL

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(\mathbf{x}(t)) &= \text{grad } f(\mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}(t))\dot{x}_i(t).\end{aligned}$$

BEISPIEL VIII.2.18. Für die Funktion $f(x, y, z) = x^2y^3z$ und die Schraubenlinie $\mathbf{x}(t) = (r \cos t, r \sin t, ht)^T$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}\text{grad } f(x, y, z) &= \begin{pmatrix} 2xy^3z \\ 3x^2y^2z \\ x^2y^3 \end{pmatrix}, \\ \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \\ h \end{pmatrix}, \\ \frac{d}{dt}f(\mathbf{x}(t)) &= \begin{pmatrix} 2r^4ht \cos t \sin^3 t \\ 3r^4ht \cos^2 t \sin^2 t \\ r^5 \cos^2 t \sin^3 t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \\ h \end{pmatrix} \\ &= -2r^5ht \cos t \sin^4 t + 3r^5ht \cos^3 t \sin^2 t \\ &\quad + r^5h \cos^2 t \sin^3 t \\ &= r^5h \cos t \sin^2 t [-2t \sin^2 t + 3t \cos^2 t + \cos t \sin t].\end{aligned}$$

Die Kettenregel benötigt man immer dann, wenn neue Variablen eingeführt werden und die partiellen Ableitungen bzgl. der neuen Variablen zu berechnen sind.

BEISPIEL VIII.2.19 (EBENE POLARKOORDINATEN). Durch $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ wird die Funktion $f(x, y)$ transformiert in

$$F(r, \varphi) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Falls $f \in C^2$ ist, ergibt sich für die partiellen Ableitungen von F mit der Kettenregel

$$\begin{aligned}F_r &= f_x \cdot \cos \varphi + f_y \cdot \sin \varphi \\ F_\varphi &= f_x \cdot (-r \sin \varphi) + f_y \cdot (r \cos \varphi) \\ F_{rr} &= f_{xx} \cdot \cos^2 \varphi + 2f_{xy} \cdot \cos \varphi \sin \varphi + f_{yy} \cdot \sin^2 \varphi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{r\varphi} &= f_{xx} \cdot (-r \sin \varphi \cos \varphi) + f_{xy} \cdot (-r \sin^2 \varphi + r \cos^2 \varphi) \\
&\quad + f_{yy} \cdot (r \cos \varphi \sin \varphi) + f_x \cdot (-\sin \varphi) + f_y \cdot (\cos \varphi) \\
F_{\varphi\varphi} &= f_{xx} \cdot (r^2 \sin^2 \varphi) + f_{xy} \cdot (-2r^2 \cos \varphi \sin \varphi) + f_{yy} \cdot (r^2 \cos^2 \varphi) \\
&\quad + f_x(-r \cos \varphi) + f_y(-r \sin \varphi).
\end{aligned}$$

Löst man diese Beziehungen nach der partiellen Ableitung von f auf, erhält man für $r \neq 0$

$$\begin{aligned}
f_x &= F_r \cdot \cos \varphi - \frac{1}{r} F_\varphi \sin \varphi \\
f_y &= F_r \cdot \sin \varphi + \frac{1}{r} F_\varphi \cos \varphi.
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich für den LAPLACE-OPERATOR (vgl. Abschnitt VIII.4.4 (S. 71)):

$$\begin{aligned}
\Delta f &= f_{xx} + f_{yy} \\
&= F_{rr} + \frac{1}{r} F_r + \frac{1}{r^2} F_{\varphi\varphi} \\
&= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} F_{\varphi\varphi}.
\end{aligned}$$

BEISPIEL VIII.2.20 (RÄUMLICHE KUGELKOORDINATEN). Mit dem Ansatz $x = r \cos \varphi \sin \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$, $z = r \cos \theta$ mit $r > 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \theta < \pi$ erhält man für die Funktion $f(x, y, z)$ die transformierte Funktion

$$F(r, \varphi, \theta) = f(r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta).$$

Anwenden der Kettenregel liefert

$$\begin{aligned}
F_r &= f_x \cdot (\cos \varphi \sin \theta) + f_y \cdot (\sin \varphi \sin \theta) + f_z \cdot (\cos \theta) \\
F_\varphi &= f_x \cdot (-r \sin \varphi \sin \theta) + f_y \cdot (r \cos \varphi \sin \theta) \\
F_\theta &= f_x \cdot (r \cos \varphi \cos \theta) + f_y \cdot (r \sin \varphi \cos \theta) + f_z \cdot (-r \sin \theta).
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich für den LAPLACE-OPERATOR (vgl. Abschnitt VIII.4.4 (S. 71)):

$$\begin{aligned}
\Delta f &= f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} \\
&= F_{rr} + \frac{2}{r} F_r + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} F_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r^2} F_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2} (\cot \theta) \cdot F_\theta \\
&= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} F_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} \right).
\end{aligned}$$

VIII.3. Anwendungen der Differentiation

VIII.3.1. Richtung des stärksten Anstieges. Für eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ ist der Anstieg in einem Punkt $\mathbf{a} \in D$ in Richtung eines Einheitsvektors $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, |\mathbf{v}| = 1$, gemäß Abschnitt VIII.2.7 (S. 44) gegeben durch die Richtungsableitung

$$\partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} = |\text{grad } f(\mathbf{a})| \cos \alpha.$$

Dabei ist α der Winkel zwischen den Vektoren \mathbf{v} und $\text{grad } f(\mathbf{a})$. Also ist der Anstieg maximal, wenn $\cos \alpha$ maximal ist, d.h. wenn $\alpha = 0$ ist.

Das bedeutet:

$\text{grad } f(\mathbf{a}) =$ Richtung des maximalen Anstieges der Funktion f im Punkt \mathbf{a} .

Da f genau dann ansteigt, wenn $-f$ abfällt, gilt:

$-\text{grad } f(\mathbf{a}) =$ Richtung des maximalen Abfallens der Funktion f im Punkt \mathbf{a} .

Diese Beobachtung führt auf das GRADIENTENVERFAHREN zur Bestimmung eines Maximums (bzw. Minimums) einer Funktion f :

Ausgehend von einer Startnäherung \mathbf{x}_0 berechne $\text{grad } f(\mathbf{x}_0)$ und setze $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + h \text{grad } f(\mathbf{x}_0)$ (bzw. $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - h \text{grad } f(\mathbf{x}_0)$) mit einer problemangepassten Schrittweite $h > 0$. Falls $f(\mathbf{x}_1) > f(\mathbf{x}_0)$ (bzw. $f(\mathbf{x}_1) < f(\mathbf{x}_0)$) ist, setze das Verfahren mit \mathbf{x}_1 an Stelle von \mathbf{x}_0 fort. Andernfalls halbiere h und probiere den entsprechenden neuen Wert von \mathbf{x}_1 aus.

VIII.3.2. Tangenten und Tangentialebene. Ist $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, definiert die Gleichung $f(\mathbf{x}) = c$ mit konstantem $c \in \mathbb{R}$ eine Hyperfläche in D . Für jede Kurve $\mathbf{x}(t)$ auf dieser Hyperfläche gilt $f(\mathbf{x}(t)) = c$ für alle t . Durch Differentiation folgt mit der Kettenregel

$$\text{grad } f(\mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) = 0 \quad \text{für alle } t.$$

Wir werten diese Formel nun für die wichtigen Spezialfälle $n = 2$ und $n = 3$ aus.

„ $n = 2$ “: In diesem Fall beschreibt $f(\mathbf{x}) = c$ eine Kurve. Ist (x_0, y_0) ein Punkt auf dieser Kurve, besagt obige Gleichung, dass $\text{grad } f(x_0, y_0)$ senkrecht ist zur Tangente an die Kurve im Punkt (x_0, y_0) . Also lautet die NORMALENGLEICHUNG DER TANGENTE AN DIE NIVEAUKURVE $f(x, y) = c$ IM PUNKT (x_0, y_0) :

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

„ $n = 3$ “: In diesem Fall beschreibt $f(\mathbf{x}) = c$ eine Fläche. Ist $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ein Punkt auf dieser Fläche, besagt obige Gleichung, dass grad $f(\mathbf{x}_0)$ senkrecht steht zu allen Tangenten an die Fläche im Punkt \mathbf{x}_0 . Alle diese Tangenten spannen eine Ebene auf, die sog. TANGENTIALEBENE. Daher lautet die NORMALENGLEICHUNG DER TANGENTIALEBENE AN DIE NIVEAUFLÄCHE $f(x, y, z) = c$ IM PUNKT (x_0, y_0, z_0) :

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

BEISPIEL VIII.3.1. (1) Betrachte einen Kreis mit Mittelpunkt (u, v) und Radius r . Dieser entspricht der Niveaukurve

$$f(x, y) = (x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2.$$

Ist daher (x_0, y_0) ein Punkt auf dem Kreis, lautet die Normalengleichung der Tangente in diesem Punkt

$$2(x_0 - u)(x - x_0) + 2(y_0 - v)(y - y_0) = 0.$$

Dividieren wir diese Gleichung durch 2, schreiben

$$\begin{aligned} x - x_0 &= x - u + u - x_0 \\ y - y_0 &= y - v + v - y_0 \end{aligned}$$

und nutzen die Kreisgleichung für (x_0, y_0) aus, erhalten wir die bekannte Darstellung

$$(x_0 - u)(x - u) + (y_0 - v)(y - v) = r^2.$$

(2) Das Paraboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2pz = 0$ mit $p \neq 0$ besitzt im Flächenpunkt (x_0, y_0, z_0) die Tangentialebene

$$\frac{2x_0(x - x_0)}{a^2} + \frac{2y_0(y - y_0)}{b^2} - 2p(z - z_0) = 0.$$

Dividieren wir diese Gleichung durch 2 und nutzen die Beziehung

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 2pz_0 = 0$$

aus, erhalten wir die Darstellung

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - p(z + z_0) = 0.$$

VIII.3.3. Die Taylor-Formel. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, \mathbf{a} ein Punkt in D , $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine hinreichend oft differenzierbare Funktion und $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $|\mathbf{v}| = 1$ ein Einheitsvektor. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass die Funktion

$$\varphi(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$$

auf $(-\varepsilon, \varepsilon)$ definiert und differenzierbar ist. Für diese Funktion gilt die Taylor-Formel aus Abschnitt VII.3.1 (S. 19)

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi(0) + \dot{\varphi}(0)t + \frac{1}{2}\ddot{\varphi}(0)t^2 \\ &+ \dots + \frac{1}{k!}\varphi^{(k)}(0)t^k + \frac{1}{(k+1)!}\varphi^{(k+1)}(\eta)t^{k+1} \end{aligned}$$

mit einem geeigneten $\eta \in (0, 1)$.

Wir wollen diese Formel durch die Funktion f und deren Ableitungen ausdrücken.

Konstruktionsgemäß ist

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}), \\ \varphi(0) &= f(\mathbf{a}). \end{aligned}$$

Wegen der Kettenregel ist

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= \text{grad } f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}, \\ \dot{\varphi}(0) &= \text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} \\ &= \partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}). \end{aligned}$$

Wir wollen auch die höheren Ableitungen $\ddot{\varphi}, \dots, \varphi^{(k)}$ durch Richtungsableitungen von f in Richtung \mathbf{v} ausdrücken. Dazu führen wir den Differentialoperator

$$\partial_{\mathbf{v}} = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

ein und bezeichnen mit $\partial_{\mathbf{v}}^k$ dessen k -malige Ausführung. Dann ist

$$\dot{\varphi} = \partial_{\mathbf{v}} f, \quad \ddot{\varphi} = \partial_{\mathbf{v}}^2 f, \quad \dots, \quad \varphi^{(k)} = \partial_{\mathbf{v}}^k f.$$

BEISPIEL VIII.3.2. Für

$$f(x, y) = x^3 y^2$$

und

$$\mathbf{v} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

erhalten wir

$$\partial_{\mathbf{v}} f = \frac{1}{5}(9x^2 y^2 + 8x^3 y),$$

$$\begin{aligned}
\partial_{\mathbf{v}}^2 f &= \frac{1}{25} \{3(18xy^2 + 24x^2y) + 4(18x^2y + 8x^3)\} \\
&= \frac{1}{25} \{54xy^2 + 144x^2y + 32x^3\} \\
\partial_{\mathbf{v}}^3 f &= \frac{1}{125} \{3(54y^2 + 288xy + 96x^2) + 4(108xy + 144x^2)\} \\
&= \frac{1}{125} \{162y^2 + 1296xy + 864x^2\}.
\end{aligned}$$

Drücken wir in der Taylor-Formel für φ alle Ableitungen durch $\partial_{\mathbf{v}}$ aus, erhalten wir die TAYLOR-FORMEL IN n VERÄNDERLICHEN:

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) &= f(\mathbf{a}) + \partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a})t + \frac{1}{2} \partial_{\mathbf{v}}^2 f(\mathbf{a})t^2 + \dots + \frac{1}{k!} \partial_{\mathbf{v}}^k f(\mathbf{a})t^k \\
&\quad + \frac{1}{(k+1)!} \partial_{\mathbf{v}}^{k+1} f(\mathbf{a} + \eta\mathbf{v})t^{k+1} \quad \text{mit einem } \eta \in (0, 1).
\end{aligned}$$

Sind \mathbf{x} und \mathbf{x}_0 zwei verschiedene Punkte in D derart, dass die Strecke von \mathbf{x}_0 nach \mathbf{x} ganz in D verläuft, können wir in obiger Formel $\mathbf{a} = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{v} = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ und $t = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ wählen. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}_0) + \partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0)|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| + \frac{1}{2} \partial_{\mathbf{v}}^2 f(\mathbf{x}_0)|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2 \\
&\quad + \dots + \frac{1}{k!} \partial_{\mathbf{v}}^k f(\mathbf{x}_0)|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^k \\
&\quad + \frac{1}{(k+1)!} \partial_{\mathbf{v}}^{k+1} f(\mathbf{x}_0 + \eta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^{k+1} \\
&\quad \text{mit } \mathbf{v} = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \text{ und } \eta \in (0, 1).
\end{aligned}$$

Der Ausdruck

$$\begin{aligned}
T_k(f; \mathbf{x}_0)(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}_0) + \partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0)|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| + \frac{1}{2} \partial_{\mathbf{v}}^2 f(\mathbf{x}_0)|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2 \\
&\quad + \dots + \frac{1}{k!} \partial_{\mathbf{v}}^k f(\mathbf{x}_0)|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^k \\
&\quad \text{mit } \mathbf{v} = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)
\end{aligned}$$

ist ein Polynom vom Grade k in \mathbf{x} und heißt k -tes TAYLOR-POLYNOM von f mit Entwicklungspunkt \mathbf{x}_0 .

BEISPIEL VIII.3.3. Wir wollen für die Funktion f aus Beispiel VIII.3.2 das Taylor-Polynom $T_2(f; \mathbf{x}_0)$ zum Entwicklungspunkt $\mathbf{x}_0 =$

(1, 2) bestimmen. Dazu betrachten wir zunächst einen beliebigen Einheitsvektor \mathbf{v} . Dann ist

$$\begin{aligned}\partial_{\mathbf{v}} f &= v_1 f_x + v_2 f_y \\ &= v_1 3x^2 y^2 + v_2 2x^3 y, \\ \partial_{\mathbf{v}^2} f &= v_1 [v_1 f_x + v_2 f_y]_x + v_2 [v_1 f_x + v_2 f_y]_y \\ &= v_1 [v_1 6xy^2 + v_2 6x^2 y] + v_2 [v_1 6x^2 y + v_2 2x^3] \\ &= v_1^2 6xy^2 + v_1 v_2 12x^2 y + v_2^2 2x^3.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) &= 12v_1 + 4v_2, \\ \partial_{\mathbf{v}^2} f(\mathbf{x}_0) &= 24v_1^2 + 24v_1 v_2 + 2v_2^2.\end{aligned}$$

Sei nun $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ ein beliebiger Punkt. Mit dem speziellen Einheitsvektor $\mathbf{v} = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ erhalten wir aus obiger Formel

$$\begin{aligned}|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) &= 12(x - 1) + 4(y - 2), \\ |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2 \partial_{\mathbf{v}^2} f(\mathbf{x}_0) &= 24(x - 1)^2 + 24(x - 1)(y - 2) + 2(y - 2)^2.\end{aligned}$$

Wegen $f(\mathbf{x}_0) = 4$ ergibt sich damit

$$\begin{aligned}T_2(f; \mathbf{x}_0)(\mathbf{x}) &= 4 + 12(x - 1) + 4(y - 2) \\ &\quad + 12(x - 1)^2 + 12(x - 1)(y - 2) + (y - 2)^2.\end{aligned}$$

VIII.3.4. Die Hesse-Matrix. Für eine zweimal differenzierbare Funktion f heißt die symmetrische Matrix

$$\begin{aligned}H_f(\mathbf{a}) &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

die HESSE-MATRIX von f an der Stelle \mathbf{a} .

Mit Hilfe der Hesse-Matrix können wir das 2-te Taylor-Polynom von f besonders leicht darstellen

$$\begin{aligned}T_2(f; \mathbf{x}_0)(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}_0) + \text{grad } f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T H_f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).\end{aligned}$$

BEISPIEL VIII.3.4. Für die Funktion $f(x, y) = x^3y^2$ aus Beispiel VIII.3.2 ist

$$\begin{aligned}\text{grad } f(x, y) &= \begin{pmatrix} 3x^2y^2 \\ 2x^3y \end{pmatrix}, \\ H_f(x, y) &= \begin{pmatrix} 6xy^2 & 6x^2y \\ 6x^2y & 2x^3 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den Entwicklungspunkt $\mathbf{x}_0 = (1, 2)^T$ aus Beispiel VIII.3.3

$$\begin{aligned}T_2(f; \mathbf{x}_0)(\mathbf{x}) &= 4 + \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{2}(x-1, y-2) \begin{pmatrix} 24 & 12 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} \\ &= 4 + 12(x-1) + 4(y-2) \\ &\quad + 12(x-1)^2 + 12(x-1)(y-2) + (y-2)^2.\end{aligned}$$

Aus der Taylor-Formel folgt

$$f(\mathbf{x}) = T_2(f; \mathbf{x}_0)(\mathbf{x}) + R_2(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0)$$

mit

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2} R_2(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0) = 0.$$

D.h., die Funktion f wird durch das Polynom $T_2(f; \mathbf{x}_0)(\mathbf{x})$ in der Nähe von \mathbf{x}_0 mit einem Fehler $o(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2)$ approximiert. Zusammen mit der Darstellung von $T_2(f; \mathbf{x}_0)(\mathbf{x})$ hat dies in den Fällen $n = 2$ und $n = 3$ folgende anschauliche Deutung:

„ $n = 2$ “: Der Graph $z = f(x, y)$ wird in der Nähe des Flächenpunktes $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ approximiert durch die SCHMIEGEQUADRIK

$$\begin{aligned}z &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2.\end{aligned}$$

Falls $H_f(x_0, y_0) \neq 0$ ist, ist diese ein Paraboloid oder ein parabolischer Zylinder. Man nennt den Flächenpunkt über (x_0, y_0) FLACH, wenn die Schmiegequadrik eine Ebene ist, d.h. wenn $H_f(x_0, y_0) = 0$ ist. Man nennt den Flächenpunkt ELLIPTISCH bzw. HYPERBOLISCH bzw. PARABOLISCH, wenn die Schmiegequadrik ein elliptisches Paraboloid bzw. ein hyperbolisches Paraboloid bzw. ein parabolischer Zylinder ist.

BEISPIEL VIII.3.5. Der AFFENSATTEL $z = x^3 - 3xy^2$ hat im Punkt $(x, y) = (0, 0)$ einen Flachpunkt mit der (x, y) -Ebene als Tangentialebene. Die Hesse-Matrix ist

$$H_f = \begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & -6x \end{pmatrix}.$$

Ihre Determinante ist $-36(x^2 + y^2)$ und ist außerhalb von $(0, 0)$ stets negativ. Daher ist jeder Punkt der Fläche mit $(x, y) \neq (0, 0)$ hyperbolisch.

„ $n = 3$ “: Die Niveaufläche $f(x, y, z) = c$ wird in der Nähe eines Flächenpunktes (x_0, y_0, z_0) approximiert durch die Quadrik

$$\begin{aligned} & \text{grad } f(x_0, y_0, z_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \\ & + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}^T H_f(x_0, y_0, z_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

BEISPIEL VIII.3.6. Betrachte die Niveaufläche

$$x \cos y + y \cos z + z \cos x = 2$$

und den Flächenpunkt $(0, 0, 2)$. Es ist

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x \cos y + y \cos z + z \cos x, \\ \text{grad } f(x, y, z) &= \begin{pmatrix} \cos y - z \sin x \\ -x \sin y + \cos z \\ -y \sin z + \cos x \end{pmatrix}, \\ \text{grad } f(0, 0, 2) &= \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ H_f(x, y, z) &= \begin{pmatrix} -z \cos x & -\sin y & -\sin x \\ -\sin y & -x \cos y & -\sin z \\ -\sin x & -\sin z & -y \cos z \end{pmatrix}, \\ H_f(0, 0, 2) &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin 2 \\ 0 & -\sin 2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daher lautet die Schmiegequadrik

$$x + y \cos 2 + z - 2 - x^2 - y(z - 2) \sin 2 = 0.$$

Dies ist ein zweischaliges Hyperboloid.

VIII.3.5. Implizite Funktionen. Sei D eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^2 und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine hinreichend oft differenzierbare Funktion. Wir betrachten die Niveaufläche $f(x, y) = 0$ und fragen uns, ob sie in der Nähe eines Punktes (x_0, y_0) mit $f(x_0, y_0) = 0$ als Graph einer Funktion g der Variablen x darstellbar ist. Wenn dies der Fall ist, muss $g(x_0) = y_0$ sein und für alle x in der Nähe von x_0 muss gelten

$$f(x, g(x)) = 0.$$

Falls g differenzierbar ist, folgt hieraus mit der Kettenregel

$$f_x(x, g(x)) + f_y(x, g(x))g'(x) = 0.$$

Diese Gleichung sollte zumindest für $x = x_0$ nach der Steigung $g'(x_0)$ auflösbar sein. Das ist aber dann der Fall, wenn

$$f_y(x_0, g(x_0)) = f_y(x_0, y_0) \neq 0$$

ist. In der Tat kann man zeigen, dass $f_y(x_0, y_0) \neq 0$ tatsächlich die Darstellbarkeit der Niveaukurve als Graph garantiert.

SATZ ÜBER IMPLIZITE FUNKTIONEN: Die Funktion f sei auf der offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^2$ differenzierbar. Für $(x_0, y_0) \in D$ gelte

$$f(x_0, y_0) = 0 \quad \text{und} \quad f_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

Dann gibt es ein offenes Intervall I mit $x_0 \in I$ und eine differenzierbare Funktion $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit

- (1) $g(x_0) = y_0$,
- (2) $(x, g(x)) \in D$ für alle $x \in I$,
- (3) $f(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in I$.
- (4) $f_y(x, g(x)) \neq 0$ für alle $x \in I$.

Für die Ableitung von g gilt

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))}.$$

Falls $f \in C^k$ ist, $k \geq 2$, ist g k -mal differenzierbar. Die Ableitungen von g erhält man durch Differenzieren obiger Gleichung.

BEISPIEL VIII.3.7. Wir betrachten die nichtlineare Gleichung

$$(*) \quad e^y + y^3 + x^3 + x^2 - 1 = 0$$

oder äquivalent

$$e^y + y^3 = 1 - x^2 - x^3.$$

Um die Lösbarkeit dieser Gleichung zu untersuchen, betrachten wir die Funktion

$$h(y) = e^y + y^3.$$

Wegen

$$h'(y) = e^y + 3y^2 > 0$$

ist sie monoton wachsend. Weiter ist

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} h(y) = -\infty, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} h(y) = \infty.$$

Daher ist $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bijektiv und zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $y \in \mathbb{R}$ mit

$$1 - x^2 - x^3 = h(y) = e^y + y^3.$$

Also definiert die Gleichung (*) implizit eine Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$e^{g(x)} + g(x)^3 + x^3 + x^2 - 1 = 0 \quad \text{für alle } x.$$

Alle Versuche, diese Gleichung nach g aufzulösen, scheitern. Wir können aber den Satz über implizite Funktionen anwenden:

Es ist

$$\begin{aligned} f(x, y) &= e^y + y^3 + x^3 + x^2 - 1, \\ f_x(x, y) &= 3x^2 + 2x, \\ f_y(x, y) &= e^y + 3y^2 > 0 \quad \text{für alle } y. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$g'(x) = -\frac{3x^2 + 2x}{e^{g(x)} + 3g(x)^2} \quad \text{für alle } x.$$

Durch Differenzieren dieser Gleichung können wir Ableitungen beliebiger Ordnung von g berechnen, z.B.

$$\begin{aligned} g''(x) &= -\frac{6x + 2}{e^{g(x)} + 3g(x)^2} + \frac{3x^2 + 2x}{(e^{g(x)} + 3g(x)^2)^2} \cdot (g'(x)e^{g(x)} + 6g'(x)g(x)) \\ &= -\frac{6x + 2}{e^{g(x)} + 3g(x)^2} + \frac{3x^2 + 2x}{(e^{g(x)} + 3g(x)^2)^2} \cdot (e^{g(x)} + 6g(x))g'(x) \\ &= -\frac{6x + 2}{e^{g(x)} + 3g(x)^2} - (e^{g(x)} + 6g(x)) \cdot \frac{(3x^2 + 2x)^2}{(e^{g(x)} + 3g(x)^2)^3}. \end{aligned}$$

Für $x = 0$ erhalten wir wegen $e^0 = 1$ z.B.

$$\begin{aligned} g(0) &= 0 \\ g'(0) &= 0 \\ g''(0) &= -2 \end{aligned}$$

und

$$g(x) = -x^2 + o(x^2).$$

Mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen können auch die Extrema von implizit definierten Funktionen bestimmt werden:

Differenzieren wir die Identität für g' im Satz über implizite Funktionen ein weiteres Mal, erhalten wir

$$\begin{aligned} g''(x) &= -\frac{f_{xx}(x, g(x)) + f_{xy}(x, g(x))g'(x)}{f_y(x, g(x))} \\ &\quad + \frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))^2} (f_{xy}(x, g(x)) + f_{yy}(x, g(x))g'(x)). \end{aligned}$$

Insbesondere ist $g'(x_0) = 0$, wenn $f_x(x_0, y_0) = 0$ ist. In diesem Fall vereinfacht sich der Ausdruck für $g''(x_0)$ zu

$$g''(x_0) = -\frac{f_{xx}(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}.$$

Damit folgt

Die durch $f(x, y) = 0$ implizit definierte Funktion $y = g(x)$ hat an der Stelle (x_0, y_0) eine horizontale Tangente, wenn gilt

$$f(x_0, y_0) = 0, \quad f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

x_0 ist ein lokales Maximum von g , wenn gilt

$$\frac{f_{xx}(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} > 0.$$

x_0 ist ein lokales Minimum von g , wenn gilt

$$\frac{f_{xx}(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} < 0.$$

Der Satz über implizite Funktionen gilt allgemein für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ in der Umgebung eines Punktes $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^T$ mit $f(\mathbf{a}) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \neq 0$. In diesem Fall gibt es eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ mit $(a_1, \dots, a_{n-1})^T \in U$ und eine differenzierbare Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n-1})) = 0 \quad \text{für alle } (x_1, \dots, x_{n-1}) \in U.$$

Für die partiellen Ableitungen von g gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g(x_1, \dots, x_{n-1}) = -\frac{f_{x_i}(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n-1}))}{f_{x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n-1}))}.$$

BEISPIEL VIII.3.8. Durch

$$f(x, y, z) = x \cos y + y \cos z + z \cos x - 2 = 0$$

ist implizit eine Funktion $z = g(x, y)$ erklärt. Es ist $g(0, 0) = 2$ und

$$\begin{aligned} g_x(0, 0) &= -\frac{f_x(0, 0, 2)}{f_z(0, 0, 2)} \\ &= -\frac{\cos y - z \sin x}{-y \sin z + \cos x} \Big|_{(0,0,2)} \\ &= -1, \\ g_y(0, 0) &= -\frac{f_y(0, 0, 2)}{f_z(0, 0, 2)} \\ &= -\frac{\cos z - x \sin y}{-y \sin z + \cos x} \Big|_{(0,0,2)} \end{aligned}$$

$$= -\cos 2.$$

VIII.3.6. Lokale Extrema. Wir betrachten eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ in n Variablen.

Ein Punkt $\mathbf{a} \in D$ heißt ein **LOKALES MAXIMUM** (bzw. **LOKALES MINIMUM**) von f , wenn es ein $r > 0$ gibt, sodass für alle $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{a}) \cap D$ gilt

$$f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x}) \quad (\text{bzw. } f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x})).$$

Gilt die entsprechende Ungleichung für alle $\mathbf{x} \in D$, heißt \mathbf{a} ein **globales Maximum** bzw. (**globales Minimum**). Ein **lokales Extremum** ist ein lokales Minimum oder Maximum.

Eine Hauptaufgabe der angewandten Analysis ist die Bestimmung solcher lokalen Extrema. Je nachdem, ob sie im Innern von D oder auf dem Rand von D liegen, hat man unterschiedliche Charakterisierungen.

Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt mit lokalen Extrema im Inneren von D . Sei \mathbf{a} ein solches Extremum und $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $|\mathbf{v}| = 1$ ein beliebiger Einheitsvektor. Dann hat die Funktion $\varphi(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$ in $t = 0$ ein lokales Extremum. Gemäß Abschnitt IV.2.1 (S. 136, Teil I) muss also gelten

$$0 = \varphi'(0) = \text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}.$$

Da \mathbf{v} ein beliebiger Einheitsvektor ist, muss also $\text{grad } f(\mathbf{a})$ zu allen Einheitsvektoren senkrecht sein. Das ist nur möglich, wenn $\text{grad } f(\mathbf{a}) = 0$ ist. Damit haben wir folgende **NOTWENDIGE CHARAKTERISIERUNG LOKALER EXTREMA IM INNEREN VON D** :

$$\mathbf{a} \text{ ist lokale Extremalstelle von } f \implies \text{grad } f(\mathbf{a}) = 0.$$

Punkte \mathbf{a} mit $\text{grad } f(\mathbf{a}) = 0$ nennt man auch **STATIONÄRE PUNKTE** von f . Es gilt also:

Jede lokale Extremalstelle im Innern von D ist ein stationärer Punkt.

MERKREGEL: Zur Bestimmung der lokalen Extrema sind zunächst alle stationären Punkte zu bestimmen.

Sei nun \mathbf{a} ein stationärer Punkt von f . Dann ist in der Nähe von \mathbf{a}

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T H_f(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + o(|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^2).$$

Daher ist \mathbf{a} genau dann ein Minimum bzw. Maximum von f , wenn es ein Minimum bzw. Maximum der Quadrik $\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T H_f(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ ist. Damit haben wir folgenden **EXTREMSTELLEN-TEST**:

\mathbf{a} sei ein stationärer Punkt der C^2 -Funktion f . Dann gilt:

- $H_f(\mathbf{a})$ ist positiv definit $\implies \mathbf{a}$ ist lokales Minimum.
- $H_f(\mathbf{a})$ ist negativ definit $\implies \mathbf{a}$ ist lokales Maximum.
- $H_f(\mathbf{a})$ ist indefinit $\implies \mathbf{a}$ ist kein lokales Extremum.

MERKREGEL: Berechne für jeden stationären Punkt die Hesse-Matrix und prüfe, ob sie positiv definit, negativ definit oder indefinit ist.

Im Falle von zwei Veränderlichen, d.h. $n = 2$, lautet der Extremwerttest:

\mathbf{a} sei stationärer Punkt von $f : \mathbb{R}^2 \supset D \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. $f_x(\mathbf{a}) = f_y(\mathbf{a}) = 0$. Dann gilt

- $\det H_f(\mathbf{a}) > 0$ und $f_{xx}(\mathbf{a}) > 0 \implies \mathbf{a}$ ist lokales Minimum.
- $\det H_f(\mathbf{a}) > 0$ und $f_{xx}(\mathbf{a}) < 0 \implies \mathbf{a}$ ist lokales Maximum.
- $\det H_f(\mathbf{a}) < 0 \implies \mathbf{a}$ ist kein Extremum.

BEISPIEL VIII.3.9. Wir betrachten die Funktion

$$f(x, y) = 2x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2.$$

Es ist

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} 8x^3 - 4x \\ 4y^3 - 4y \end{pmatrix}.$$

Also sind die stationären Punkte von f bestimmt durch die Lösungen des nichtlinearen Gleichungssystems

$$4x(2x^2 - 1) = 0$$

$$4y(y^2 - 1) = 0.$$

Da ein Produkt $\alpha\beta$ genau dann Null ist, wenn mindestens ein Faktor gleich Null ist, hat f neun stationäre Punkte

$$\begin{array}{lll} \mathbf{a}_1 = (0, 0), & \mathbf{a}_2 = (0, 1), & \mathbf{a}_3 = (0, -1), \\ \mathbf{a}_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), & \mathbf{a}_5 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right), & \mathbf{a}_6 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -1\right), \\ \mathbf{a}_7 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), & \mathbf{a}_8 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right), & \mathbf{a}_9 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -1\right). \end{array}$$

Für die Hesse-Matrix erhalten wir

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 24x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix},$$

$$\det H_f(x, y) = 16(6x^2 - 1)(3y^2 - 1).$$

Dies ergibt folgende Tabelle

	\mathbf{a}_1	\mathbf{a}_2	\mathbf{a}_3	\mathbf{a}_4	\mathbf{a}_5	\mathbf{a}_6	\mathbf{a}_7	\mathbf{a}_8	\mathbf{a}_9
$f_{xx}(\mathbf{a}_i)$	-4	-4	-4	8	8	8	8	8	8
$\det H_f(\mathbf{a}_i)$	16	-32	-32	-32	64	64	-32	64	64

Also hat f bei \mathbf{a}_1 ein lokales Maximum und bei \mathbf{a}_5 , \mathbf{a}_6 , \mathbf{a}_8 und \mathbf{a}_9 ein lokales Minimum; \mathbf{a}_2 , \mathbf{a}_3 , \mathbf{a}_4 und \mathbf{a}_7 sind keine Extrema.

VIII.3.7. Extrema unter Nebenbedingungen. Wir betrachten nun Extrempunkte auf dem Rand des Definitionsbereiches D der Funktion f . Häufig ist der Rand lokal als Schnitt von Niveauflächen gegeben. Diesen Fall wollen wir untersuchen. Dazu betrachten wir der Einfachheit halber zunächst den Fall nur einer Niveaufläche. Dazu seien f und g zwei genügend oft differenzierbare Funktionen in n Veränderlichen. Wir suchen die Extremwerte von f auf der Niveaufläche

$$M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g(\mathbf{x}) = 0\}.$$

1. METHODE: AUFLÖSEN DER NEBENBEDINGUNG. Man löst die Bedingung $g(\mathbf{x}) = 0$ nach einer Variablen auf, d.h. man stellt M als Graph einer Funktion in $n - 1$ Variablen dar. Lösen wir z.B. nach der Variablen x_n auf, ist M von der Form $\{(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1}))\}$ mit einer geeigneten Funktion h . Wir können diese Darstellung in f einsetzen und erhalten auf diese Weise eine Funktion in $n - 1$ Variablen

$$F(x_1, \dots, x_{n-1}) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1})).$$

Die Extrempunkte von F können wir nun wie im vorigen Paragraphen bestimmen.

BEISPIEL VIII.3.10. Wir wollen die Extrema von

$$f(x, y) = e^{xy}$$

auf dem Kreisrand

$$x^2 + y^2 = 1$$

bestimmen, d.h.

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$$

Wegen $f(-x, -y) = f(x, y)$ können wir uns auf den oberen Halbkreis beschränken. Dort ist

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{mit} \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Setzen wir dies in f ein, müssen wir die Extrema von

$$F(x) = e^{x\sqrt{1-x^2}}$$

auf $[-1, 1]$ bestimmen. Kandidaten sind zunächst die Randpunkte $x = \pm 1$; es ist

$$F(\pm 1) = 1.$$

Weitere Kandidaten sind die stationären Punkte von F . Wegen

$$\begin{aligned} F'(x) &= e^{x\sqrt{1-x^2}} \left\{ \sqrt{1-x^2} - x^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} e^{x\sqrt{1-x^2}} (1-2x^2) \end{aligned}$$

sind dies die Punkte $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Wegen

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= e^{\frac{1}{2}}, \\ F\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

ist $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ein Maximum und $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ein Minimum. Wegen der Symmetrie $f(-x, -y) = f(x, y)$ folgt insgesamt:
 f hat Maxima in $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ und $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.
 f hat Minima in $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ und $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

2. METHODE: PARAMETRISIERUNG DER NEBENBEDINGUNG. Betrachte als Beispiel den Spezialfall $n = 2$. Falls wir eine Parameterdarstellung $\mathbf{x}(t)$, $t \in I$, der Kurve M kennen, können wir diese in f einsetzen. Wir erhalten so eine Funktion einer Veränderlichen

$$\varphi(t) = f(\mathbf{x}(t)),$$

deren Extrema wir in Abschnitt IV.2.1 (S. 136, Teil I) bestimmen können.

BEISPIEL VIII.3.11. In Beispiel VIII.3.10 ist

$$\mathbf{x}(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

eine Parameterdarstellung. Wir erhalten

$$\varphi(t) = e^{\cos t \sin t} = e^{\frac{1}{2} \sin(2t)}.$$

Wegen

$$\varphi'(t) = \cos(2t) e^{\frac{1}{2} \sin(2t)}$$

sind die stationären Punkte von φ gegeben durch $t = \frac{\pi}{4}$, $t = \frac{3\pi}{4}$, $t = \frac{5\pi}{4}$ und $t = \frac{7\pi}{4}$, wobei $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{5\pi}{4}$ Maxima und $\frac{3\pi}{4}$ und $\frac{7\pi}{4}$ Minima sind.

3. METHODE: LAGRANGE-MULTIPLIKATOREN. Dieser Methode liegt folgender Satz zugrunde:

Sei $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ eine Extremalstelle von f unter der Nebenbedingung $g(\mathbf{x}) = 0$. Dann gibt es eine Zahl λ , genannt LAGRANGE-MULTIPLIKATOR, so dass (\mathbf{a}, λ) ein stationärer Punkt der LAGRANGE-FUNKTION

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda g(\mathbf{x})$$

ist, d.h.

$$\text{grad } f(\mathbf{a}) + \lambda \text{grad } g(\mathbf{a}) = 0$$

und

$$g(\mathbf{a}) = 0.$$

MERKREGEL: Stelle die Lagrange Funktion

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \lambda g(\mathbf{x})$$

auf und bestimme alle ihre stationären Punkte.

BEISPIEL VIII.3.12. Die Lagrange-Funktion zu Beispiel VIII.3.10 lautet

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = e^{xy} + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Die stationären Punkte sind die Lösungen des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} L_x(x, y, \lambda) = 0 &\iff ye^{xy} + 2\lambda x = 0 \\ L_y(x, y, \lambda) = 0 &\iff xe^{xy} + 2\lambda y = 0 \\ L_\lambda(x, y, \lambda) = 0 &\iff x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit x und die zweite Gleichung mit y , addieren die beiden Ergebnisse und nützen die dritte Gleichung aus. So erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= xye^{xy} + 2\lambda x^2 + xye^{xy} + 2\lambda y^2 \\ &= 2xye^{xy} + 2\lambda \underbrace{(x^2 + y^2)}_{=1} \\ &= 2xye^{xy} + 2\lambda. \end{aligned}$$

Also ist

$$\lambda = -xye^{xy}.$$

Setzen wir dies in die ersten beiden Gleichungen ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= ye^{xy} - 2x^2ye^{xy} = y(1 - 2x^2)e^{xy} \\ 0 &= xe^{xy} - 2xy^2e^{xy} = x(1 - 2y^2)e^{xy}. \end{aligned}$$

Die Lösungen dieses Gleichungssystems sind

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (0, 0), \\ \mathbf{a}_2 &= \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), & \mathbf{a}_3 &= \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ \mathbf{a}_4 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), & \mathbf{a}_5 &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \\ \mathbf{a}_6 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), & \mathbf{a}_7 &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ \mathbf{a}_8 &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), & \mathbf{a}_9 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

Da die Punkte $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ und \mathbf{a}_5 die Nebenbedingung nicht erfüllen, bleiben nur die Kandidaten $\mathbf{a}_6, \mathbf{a}_7, \mathbf{a}_8$ und \mathbf{a}_9 . Durch Einsetzen in f und Vergleichen der Funktionswerte sehen wir, dass \mathbf{a}_6 und \mathbf{a}_7 Maxima und \mathbf{a}_8 und \mathbf{a}_9 Minima sind.

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall des Durchschnittes mehrerer Niveauflächen

$$g_1(\mathbf{x}) = 0, \dots, g_k(\mathbf{x}) = 0.$$

In diesem Fall stellt man eine Lagrange-Funktion auf und bestimmt deren stationäre Punkte. Die Lagrange-Funktion hat jetzt die Form

$$L(\mathbf{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^k \lambda_i g_i(\mathbf{x}).$$

BEISPIEL VIII.3.13. Sei S die Kugeloberfläche

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

und E die Ebene

$$x + y + z = 0.$$

Wir suchen die Extrema von

$$f(x, y, z) = e^{xyz}$$

auf $S \cap E$. Die Lagrange-Funktion lautet mit λ, μ an Stelle von λ_1, λ_2 :

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = e^{xyz} + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \mu(x + y + z).$$

Die Bedingungen für einen stationären Punkt sind

$$\begin{aligned} yze^{xyz} + 2\lambda x + \mu &= 0 \\ xze^{xyz} + 2\lambda y + \mu &= 0 \\ xye^{xyz} + 2\lambda z + \mu &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 &= 0 \\ x + y + z &= 0. \end{aligned}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit x , die zweite mit y und die dritte mit z , addieren die Ergebnisse und beachten die vierte und fünfte Gleichung, erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= 3xyze^{xyz} + 2\lambda \underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}_{=1} + \mu \underbrace{(x + y + z)}_{=0} \\ &= 3xyze^{xyz} + 2\lambda \end{aligned}$$

also

$$\lambda = -\frac{3}{2}xyze^{xyz}.$$

Setzen wir dies in die ersten drei Gleichungen ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} e^{xyz}yz(1 - 3x^2) + \mu &= 0 \\ (**) \quad e^{xyz}xz(1 - 3y^2) + \mu &= 0 \\ e^{xyz}xy(1 - 3z^2) + \mu &= 0. \end{aligned}$$

Subtrahieren wir die erste von der zweiten und dritten Gleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} e^{xyz}z(y - x)(1 + 3xy) &= 0 \\ e^{xyz}y(z - x)(1 + 3xz) &= 0. \end{aligned}$$

Man beachte, dass die zweite Gleichung aus der ersten durch Vertauschen von y und z hervorgeht. Analog erhält man durch Vertauschen von x und z die Gleichung

$$e^{xyz}x(y - z)(1 + 3yz) = 0.$$

Wir betrachten zuerst den Fall $x = 0$. Einsetzen in die Gleichungen (***) liefert $\mu = 0$ und $yz = 0$. Also ist auch $y = 0$ oder $z = 0$. Dies ist aber nicht mit den beiden Nebenbedingungen vereinbar. Analog führen die Annahmen $y = 0$ und $z = 0$ zum Widerspruch.

Als nächstes betrachten wir den Fall $x = y$. Diese Annahme führt wegen der beiden Nebenbedingungen auf die Lösungen

$$\mathbf{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Analog erhält man für die Fälle $y = z$ und $x = z$ die Lösungen

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_3 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & \mathbf{a}_4 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{a}_5 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, & \mathbf{a}_6 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Schließlich müssen wir noch den Fall $1 + 3xy = 0$ betrachten. Da offensichtlich $x \neq 0$ sein muss, können wir diese Gleichung nach y auflösen.

Setzen wir das Ergebnis in die erste Nebenbedingung ein und berücksichtigen die zweite Nebenbedingung, erhalten wir

$$\begin{aligned} 1 &= x^2 + \underbrace{y^2}_{=\frac{1}{9x^2}} + \underbrace{z^2}_{=-x-\underbrace{y}_{=-\frac{1}{3x}}} \\ &= x^2 + \frac{1}{9x^2} + \left(\frac{1-3x^2}{3x}\right)^2 \\ &= \frac{1}{9x^2}(18x^4 - 6x^2 + 2) \end{aligned}$$

also

$$0 = 18x^4 - 6x^2 + 2$$

mit den Lösungen

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$$

und

$$x = \pm \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

Dies sind die bereits bekannten Lösungen $\mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_6$. Analog sieht man ein, dass die Fälle $1 + 3yz = 0$ und $1 + 3xz = 0$ zusätzlich nur noch die bereits bekannten Lösungen \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 liefern.

Wegen

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a}_1) &= f(\mathbf{a}_3) = f(\mathbf{a}_5) = e^{-\frac{1}{3\sqrt{6}}}, \\ f(\mathbf{a}_2) &= f(\mathbf{a}_4) = f(\mathbf{a}_6) = e^{\frac{1}{3\sqrt{6}}} \end{aligned}$$

sind daher $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3$ und \mathbf{a}_5 Minima und $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4$ und \mathbf{a}_6 Maxima.

VIII.3.8. Extrema auf kompakten Mengen. Jede stetige Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer *kompakten* Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ nimmt ihr Maximum und Minimum an (vgl. Abschnitt VIII.2.3 (S. 37)). Die Extremstellen bestimmt man durch eine Kombination der Methoden der beiden vorigen Paragraphen.

BEISPIEL VIII.3.14. Gesucht sind die Extrema von

$$f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2$$

auf der Kreisscheibe

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Wir suchen zunächst Extremwerte im Innern von D und gehen dazu wie in Abschnitt VIII.3.6 vor. Die Bedingungen für einen stationären Punkt sind

$$6x - 2y = 0$$

$$-2x + 2y = 0.$$

Wegen

$$\det \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 8$$

hat dieses LGS nur die Lösung $x = 0, y = 0$. Da

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

positiv definit ist, ist dieses ein lokales Minimum; der zugehörige Funktionswert ist 0. Wir wissen aber noch nicht, ob es sich um ein globales Minimum handelt!

Nun betrachten wir den Rand von D und gehen dazu wie in Abschnitt VIII.3.7 vor. Die Lagrange-Funktion lautet

$$L(x, y, \lambda) = 3x^2 - 2xy + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Die Bedingungen für einen stationären Punkt sind

$$\begin{aligned} 6x - 2y + 2\lambda x &= 0 & \text{d.h.} & & -3x + y &= \lambda x \\ -2x + 2y + 2\lambda y &= 0 & \text{d.h.} & & x - y &= \lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Also müssen wir die Eigenwerte λ der Matrix

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

und die zugehörigen normierten Eigenvektoren bestimmen.

Das charakteristische Polynom lautet:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} -3 - z & 1 \\ 1 & -1 - z \end{pmatrix} &= (3 + z)(1 + z) - 1 \\ &= 2 + 4z + z^2 \\ &= (z + 2)^2 - 2 \end{aligned}$$

und hat die Nullstellen $-2 \pm \sqrt{2}$. Die Gleichungssysteme für die Eigenvektoren lauten für $\lambda = -2 + \sqrt{2}$

$$\begin{aligned} (-1 - \sqrt{2})x + y &= 0 & \implies y &= (1 + \sqrt{2})x \\ x + (1 - \sqrt{2})y &= 0 & \implies x &= \pm \frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

und für $\lambda = -2 - \sqrt{2}$

$$\begin{aligned} (-1 + \sqrt{2})x + y &= 0 & \implies y &= (1 - \sqrt{2})x \\ x + (1 + \sqrt{2})y &= 0 & \implies x &= \pm \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}. \end{aligned}$$

Also sind unsere Kandidaten für die Extremalstellen

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1 &= \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}, & \mathbf{a}_2 &= -\mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 &= \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}, & \mathbf{a}_4 &= -\mathbf{a}_3.\end{aligned}$$

Die zugehörigen Funktionswerte sind

$$\begin{aligned}f(\mathbf{a}_2) &= f(\mathbf{a}_1) = \frac{4}{4+2\sqrt{2}} \\ f(\mathbf{a}_4) &= f(\mathbf{a}_3) = \frac{4}{4-2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Also sind \mathbf{a}_3 und \mathbf{a}_4 globale Maxima und $(0,0)$ das globale Minimum von f .

VIII.4. Vektorwertige Funktionen

VIII.4.1. Die Differentiation. Wir betrachten Funktionen \mathbf{f} , die Punkten $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$ Vektoren $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$ zuordnen:

$$\begin{aligned}\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \supset D &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Die Begriffe „Grenzwert“, „Stetigkeit“, „partielle Ableitung“ sind für solche vektorwertigen Funktionen komponentenweise definiert:

- GRENZWERT:

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

- STETIGKEIT: \mathbf{f} ist stetig in $\mathbf{x}_0 \iff$ alle Komponentenfunktionen f_1, \dots, f_m sind stetig in \mathbf{x}_0 .
- PARTIELLE ABLEITUNGEN:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Die vektorwertige Funktion $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt im Punkt $\mathbf{x}_0 \in D$ TOTAL DIFFERENZIERBAR oder LINEAR APPROXIMIERBAR, wenn es eine $m \times n$ Matrix A gibt mit

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \{\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\} = 0.$$

\mathbf{f} ist genau dann linear approximierbar, wenn alle Komponentenfunktionen f_1, \dots, f_m linear approximierbar sind. In diesem Fall ist die obige Matrix A eindeutig bestimmt. Sie heißt JACOBI-MATRIX von \mathbf{f} an der Stelle \mathbf{x}_0 und wird mit $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ bezeichnet. Ihre Zeilenvektoren sind die transponierten Gradienten der Komponentenfunktionen f_1, \dots, f_m :

$$\begin{aligned} D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) &= \begin{pmatrix} (\text{grad } f_1(\mathbf{x}_0))^T \\ \vdots \\ (\text{grad } f_m(\mathbf{x}_0))^T \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

BEISPIEL VIII.4.1. Jede lineare Abbildung $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist total differenzierbar. Für alle \mathbf{x} ist $D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A$.

BEISPIEL VIII.4.2 (POLARKOORDINATEN). Der Streifen

$$D = \{(r, \varphi) : r \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$$

der kartesischen (r, φ) -Ebene wird mittels

$$\mathbf{f}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

auf die kartesische (x, y) -Ebene abgebildet, sodass zu jedem Punkt $(x, y) \neq (0, 0)$ genau ein Punkt $(r, \varphi) \in D$ gehört. Die Jacobi-Matrix dieser Abbildung ist

$$D\mathbf{f}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Für die Jacobi-Matrix gelten folgende Rechenregeln ($\mathbf{v}, \mathbf{w} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} D(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w})(\mathbf{x}) &= \alpha D\mathbf{v}(\mathbf{x}) + \beta D\mathbf{w}(\mathbf{x}) \\ D(f\mathbf{v})(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x})D\mathbf{v}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}(\mathbf{x})(\text{grad } f(\mathbf{x}))^T \\ D(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{x}) &= \mathbf{v}(\mathbf{x})^T D\mathbf{w}(\mathbf{x}) + \mathbf{w}(\mathbf{x})^T D\mathbf{v}(\mathbf{x}) \\ D(\mathbf{v} \times \mathbf{w})(\mathbf{x}) &= \mathbf{v}(\mathbf{x}) \times D\mathbf{w}(\mathbf{x}) - \mathbf{w}(\mathbf{x}) \times D\mathbf{v}(\mathbf{x}) \text{ falls } m = 3. \end{aligned}$$

ACHTUNG: Der Ausdruck $\mathbf{v}(\mathbf{x})(\text{grad } f(\mathbf{x}))^T$ in der zweiten Formel ist kein Skalarprodukt, sondern eine $m \times n$ Matrix. Die Vektorprodukte auf der rechten Seite der vierten Gleichung sind spaltenweise zu nehmen.

BEISPIEL VIII.4.3 (QUASILINEARE ABBILDUNGEN). Wir betrachten eine skalare Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ und eine $m \times n$ Matrix A . Mit ihnen definieren wir eine vektorwertige Funktion $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})A\mathbf{x}$. Eine solche Funktion nennt man QUASILINEAR. Für die Jacobi-Matrix ergibt sich

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})A + (A\mathbf{x})(\text{grad } f(\mathbf{x}))^T.$$

VIII.4.2. Das Newtonverfahren. Das Newtonverfahren mit seinen Modifikationen ist das wichtigste Verfahren zur numerischen Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme mit n Gleichungen und n Unbekannten. Ein solches Gleichungssystem kann stets in die Form gebracht werden

$$(*) \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$$

mit einer Funktion $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Die Idee des Verfahrens ist die gleiche wie bei Gleichungen in einer Unbekannten (vgl. Abschnitt IV.2.6 (S. 146, Teil I)):

Wir nehmen an, dass wir eine Näherungslösung \mathbf{x}_0 für (*) „geraten“ haben. Falls \mathbf{f} differenzierbar ist, wird \mathbf{f} in der Nähe von \mathbf{x}_0 durch die lineare Funktion $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ approximiert. Wir ersetzen \mathbf{f} in (*) durch diese Approximation und erhalten das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$$

für den unbekanntem Vektor \mathbf{x} . Es ist genau dann lösbar, wenn die Jacobi-Matrix $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ invertierbar ist. In diesem Fall lautet die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

Wir nehmen \mathbf{x}_1 als neue, hoffentlich bessere Näherung für die Lösung von (*) und wiederholen das Verfahren mit \mathbf{x}_1 an Stelle von \mathbf{x}_0 .

BEMERKUNG VIII.4.4. Selbstverständlich wird bei der Berechnung \mathbf{x}_1 die Matrix $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ nicht invertiert. Stattdessen wird das lineare Gleichungssystem

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$$

mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren oder einem seiner Verwandten gelöst (vgl. Abschnitte II.1.4 (S. 53, Teil I) und II.2.5 (S. 64, Teil I)).

Zusammenfassend lautet das NEWTONVERFAHREN:

- (1) Gegeben sei eine Näherungslösung \mathbf{x}_0 für das Gleichungssystem

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0.$$

- (2) Für $k = 0, 1, \dots$ führe folgende Schritte aus:
- (a) Bestimme die Jacobi-Matrix $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$.
 - (b) Falls $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$ singular ist, breche das Verfahren ab.
 - (c) Andernfalls berechne die Lösung \mathbf{z} des linearen Gleichungssystems

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)\mathbf{z} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_k).$$

- (d) Setze

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{z}.$$

Wie in einer Dimension, $n = 1$, konvergiert das Newton-Verfahren nicht für jeden Startwert. Falls aber \mathbf{x}_0 hinreichend nahe bei einer Lösung \mathbf{x}^* des Gleichungssystems liegt, \mathbf{f} zweimal stetig differenzierbar ist und $D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$ invertierbar ist, kann man zeigen, dass das Newtonverfahren quadratisch konvergiert. D.h., es gibt eine Konstante $c > 0$ mit

$$|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_{k+1}| \leq c|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_k|^2$$

für alle k .

BEISPIEL VIII.4.5. Zur Darstellung der Zahnflanken von Stirnradgetrieben verwendet man die Kreisevolvente γ mit der Parameterdarstellung

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} r \sin t - rt \cos t \\ r \cos t + rt \sin t - r \end{pmatrix}.$$

Soll γ durch die Punkte $(0, 0)$ und (a, b) gehen, führt dies auf die beiden folgenden nichtlinearen Gleichungen für r und t :

$$\begin{aligned} f_1(r, t) &= r \sin t - rt \cos t - a &&= 0 \\ f_2(r, t) &= r \cos t + rt \sin t - r - b &&= 0. \end{aligned}$$

Die Jacobi-Matrix von \mathbf{f} im Punkt (r_0, t_0) lautet

$$\begin{pmatrix} \sin t_0 - t_0 \cos t_0 & r_0 t_0 \sin t_0 \\ \cos t_0 + t_0 \sin t_0 - 1 & r_0 t_0 \cos t_0 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante der Matrix ist $r_0 t_0 (\sin t_0 - t_0)$. Sie ist ungleich Null sofern $r_0 t_0 \neq 0$ ist.

Für $(a, b) = (1, 1)$ und die Startwerte $(r_0, t_0) = (2, 1.2)$ liefert das Newtonverfahren dann z.B. folgende Werte:

$$r_0 = 2 \qquad t_0 = 1.2$$

$$\begin{array}{ll} r_1 = 2.12598 & t_0 = 1.17449 \\ r_2 = 2.12891 & t_0 = 1.17504 \\ r_3 = 2.12891 & t_0 = 1.17504. \end{array}$$

VIII.4.3. Die Kettenregel. Betrachte zwei offene Mengen $D \subset \mathbb{R}^n$ und $G \subset \mathbb{R}^m$ und zwei Funktionen $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{g} : G \rightarrow \mathbb{R}^k$ derart, dass $\mathbf{f}(D) \subset G$ ist. Dann ist die Komposition $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^k$ wohldefiniert. Sind \mathbf{f} und \mathbf{g} differenzierbar, ist auch $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ differenzierbar und es gilt die KETTENREGEL:

$$D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}_0) = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0))D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

BEISPIEL VIII.4.6. Sei $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ wie in Beispiel VIII.4.2 und $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\mathbf{g}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 y^3 \\ e^{x+y} \\ \sin(xy) \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$D\mathbf{g}(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy^3 & 3x^2y^2 \\ e^{x+y} & e^{x+y} \\ y \cos(xy) & x \cos(xy) \end{pmatrix}.$$

Damit liefert die Kettenregel

$$\begin{aligned} & D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(r, \varphi) \\ &= \begin{pmatrix} 2r^4 \cos \varphi \sin^3 \varphi & 3r^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \\ e^{r(\cos \varphi + \sin \varphi)} & e^{r(\cos \varphi + \sin \varphi)} \\ r \sin \varphi \cos(r^2 \sin \varphi \cos \varphi) & r \cos \varphi \cos(r^2 \sin \varphi \cos \varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5r^4 \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi & r^5 [-2 \cos \varphi \sin^4 \varphi + 3 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi] \\ e^{r(\cos \varphi + \sin \varphi)} (\cos \varphi + \sin \varphi) & r e^{r(\cos \varphi + \sin \varphi)} (\cos \varphi - \sin \varphi) \\ 2r \sin \varphi \cos \varphi \cos(r^2 \sin \varphi \cos \varphi) & r^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \cos(r^2 \sin \varphi \cos \varphi) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

BEISPIEL VIII.4.7 (BASISWECHSEL). Wir betrachten eine Funktion $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^m$. Im \mathbb{R}^n führen wir ein neues kartesisches Koordinatensystem $(P; \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ ein und wählen im \mathbb{R}^m eine neue Basis $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$. Durch diesen doppelten Basiswechsel im Urbild- und Bildraum geht \mathbf{f} in eine andere Funktion \mathbf{g} über. Wir wollen diese Funktion bestimmen und ihre Jacobi-Matrix $D\mathbf{g}$ durch die Jacobi-Matrix $D\mathbf{f}$ von \mathbf{f} ausdrücken.

Einem Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ entspricht im neuen Koordinatensystem der Vektor \mathbf{y} , der durch $\mathbf{x} = B\mathbf{y} + \mathbf{p}$ bestimmt ist, wobei B die orthogonale Matrix $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ und $\mathbf{p} = \overrightarrow{OP}$ ist. Ein Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ hat bezüglich der Basis $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$ den Koordinatenvektor \mathbf{w} , der durch $\mathbf{v} = W\mathbf{w}$ mit der invertierbaren Matrix $W = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$ bestimmt ist. Setzt man $\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{x} = B\mathbf{y} + \mathbf{p}$, so ist $\mathbf{g}(\mathbf{y})$ implizit definiert durch

$$\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(B\mathbf{y} + \mathbf{p}) = W\mathbf{w} = W\mathbf{g}(\mathbf{y}).$$

Lösen wir diese Gleichung nach $\mathbf{g}(\mathbf{y})$ auf, erhalten wir

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}) = W^{-1}\mathbf{f}(B\mathbf{y} + \mathbf{p}).$$

Damit folgt aus der Kettenregel

$$D\mathbf{g}(\mathbf{y}_0) = W^{-1}D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)B \quad \text{mit } \mathbf{x}_0 = B\mathbf{y}_0 + \mathbf{p}.$$

Mit diesen beiden Identitäten lassen sich leicht Eigenschaften einer Funktion untersuchen, die unabhängig sind von der speziellen Wahl des Koordinatensystems im Urbild- und Bildraum.

VIII.4.4. Räumliche Skalaren- und Vektorfelder. Der dreidimensionale Anschauungsraum wird nach Wahl eines kartesischen Koordinatensystem $(O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ durch den \mathbb{R}^3 dargestellt. Dementsprechend wird jeder räumliche Bereich durch eine Menge $D \subset \mathbb{R}^3$ dargestellt. Ein SKALARENFELD (oder Belegungsfunktion) $f: \mathbb{R}^3 \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ ordnet jedem Punkt $\mathbf{x} \in D$ einen Zahlenwert zu. Ein (räumliches) VEKTORFELD $\mathbf{v}: \mathbb{R}^3 \supset D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ordnet jedem Punkt $\mathbf{x} \in D$ einen Vektor $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ zu. Man stellt sich dabei vor, dass jedem Punkt \mathbf{x} der entsprechende Vektor $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ angeheftet ist. Eine Kurve in D heißt FELDLINIE des Vektorfeldes \mathbf{v} , wenn der Vektor $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ in jedem Kurvenpunkt \mathbf{x} parallel zur Kurventangente ist. Man spricht von einem C^r -Skalarenfeld f bzw. C^r -Vektorfeld \mathbf{v} , wenn f bzw. \mathbf{v} r -mal stetig differenzierbar sind.

BEISPIEL VIII.4.8 (STARRE DREHUNG). Eine Rechtsdrehung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse durch den Nullpunkt mit Richtungsvektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$ mit $|\mathbf{a}| = 1$ wird dargestellt durch

$$\mathbf{x}(t) = \cos(\omega t)\mathbf{x}_0 + (1 - \cos(\omega t))(\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{a})\mathbf{a} + \sin(\omega t)\mathbf{a} \times \mathbf{x}_0.$$

Dabei bezeichnet \mathbf{x}_0 die Lage zur Zeit $t = 0$. Für die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$ ergibt sich wegen

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{x}_0) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}_0)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})\mathbf{x}_0 \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}_0)\mathbf{a} - \mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

und $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$ (vgl. Abschnitt I.4.7 (S. 27, Teil I)) die Beziehung

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \omega\{-\sin(\omega t)\mathbf{x}_0 + \sin(\omega t)(\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{a})\mathbf{a} + \cos(\omega t)\mathbf{a} \times \mathbf{x}_0\} \\ &= \omega\mathbf{a} \times \mathbf{x}(t). \end{aligned}$$

Damit hat das Geschwindigkeitsfeld einer gleichförmigen Drehbewegung die Darstellung

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \omega\mathbf{a} \times \mathbf{x}.$$

Das Vektorfeld $\mathbf{v} : \mathbf{x} \mapsto \omega \mathbf{a} \times \mathbf{x}$ ist linear und hat die konstante Jacobi-Matrix

$$\begin{aligned} D\mathbf{v}(\mathbf{x}) &= (\mathbf{v}(\mathbf{e}_1), \mathbf{v}(\mathbf{e}_2), \mathbf{v}(\mathbf{e}_3)) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \omega. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $D\mathbf{v}$ schiefsymmetrisch und hat verschwindende Spur, d.h. $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ (vgl. Abschnitt VIII.4.5).

BEISPIEL VIII.4.9 (ZENTRALES KRAFTFELD). Eine Punktmasse M im Ursprung zieht nach I. NEWTON die Punktmasse m in $X = (x_1, x_2, x_3)$ mit der GRAVITATIONSKRAFT

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \frac{c}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \neq 0$$

an, wobei $\mathbf{x} = \overrightarrow{OX}$ und $c = -\gamma m M$ mit $\gamma > 0$ ist. Das zentrale Kraftfeld ist quasilinear. Daher ergibt sich für $\mathbf{x} \neq 0$ mit der 3×3 Einheitsmatrix \mathbb{I}

$$\begin{aligned} D\mathbf{K}(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}(\operatorname{grad}(\frac{c}{|\mathbf{x}|^3}))^T + \frac{c}{|\mathbf{x}|^3} \mathbb{I} \\ &= \frac{c}{|\mathbf{x}|^5} \{ \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \mathbb{I} - 3\mathbf{x}\mathbf{x}^T \} \\ &= \frac{c}{|\mathbf{x}|^5} \begin{pmatrix} x_2^2 + x_3^2 - 2x_1^2 & -3x_1x_2 & -3x_1x_3 \\ -3x_1x_2 & x_1^2 + x_3^2 - 2x_2^2 & -3x_2x_3 \\ -3x_1x_3 & -3x_2x_3 & x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$D\mathbf{K}$ ist symmetrisch mit verschwindender Spur, d.h. $\operatorname{div} \mathbf{K}(\mathbf{x}) = 0$ für alle $\mathbf{x} \neq 0$ (vgl. Abschnitt VIII.4.5).

BEISPIEL VIII.4.10 (LAMINARE ROHRSTRÖMUNG). Eine zähe Flüssigkeit wird durch ein zur x_2 -Achse koaxiales Rohr vom Radius r mit geringer Geschwindigkeit gepresst, sodass eine laminare Strömung entsteht. Das Geschwindigkeitsfeld wurde 1850 unabhängig voneinander von dem deutschen Ingenieur G. HAGEN und dem französischen Arzt J. L. M. POISEUILLE bestimmt zu

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = c \begin{pmatrix} 0 \\ r^2 - x_1^2 - x_3^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } x_1^2 + x_3^2 \leq r^2, \quad c > 0.$$

Für die Jacobi-Matrix ergibt sich

$$D\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2x_1 & 0 & -2x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} c.$$

Sie ist weder symmetrisch noch schiefsymmetrisch, hat aber verschwindende Spur, d.h. $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0$ für alle \mathbf{x} (vgl. Abschnitt VIII.4.5).

VIII.4.5. Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace Operator. Im Folgenden ist stets $D \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Menge und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $\mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein hinreichend oft differenzierbares Skalaren- bzw. Vektorfeld. Hierfür können wir die folgenden Differentialoperatoren definieren:

GRADIENT:

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

LAPLACE-OPERATOR (skalar):

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$$

DIVERGENZ:

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

ROTATION:

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

LAPLACE-OPERATOR (vektoriell):

$$\Delta \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{pmatrix}$$

Mittels Volumen- und Oberflächenintegralen (vgl. Abschnitte IX.4.5 (S. 114), IX.4.6 (S. 115) und IX.5.5 (S. 124)) kann man zeigen, dass $\text{div } \mathbf{v}$ die QUELLEDICHTE von \mathbf{v} und $\text{rot } \mathbf{v}$ die WIRBELDICHTEN von \mathbf{v} beschreiben.

BEISPIEL VIII.4.11. Für die Vektorfelder der Beispiele VIII.4.8 – VIII.4.10 gilt:

- starre Drehung:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \omega \mathbf{a} \times \mathbf{x}$$

$$\text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0$$

$$\text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 2\omega \mathbf{a}.$$

- zentrales Kraftfeld:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{c}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}$$

$$\text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0.$$

- Rohrströmung:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = c \begin{pmatrix} 0 \\ r^2 - x_1^2 - x_3^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 2c \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix}$$

BEISPIEL VIII.4.12. Für das Vektorfeld

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 + 3z^2 \\ 9yz^2 \end{pmatrix}$$

erhalten wir

$$D\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2y & 2x & 0 \\ 2x & 0 & 6z \\ 0 & 9z^2 & 18yz \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 2y + 18yz$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} 9z^2 - 6z \\ 0 \\ 2x - 2x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9z^2 - 6z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es besteht der folgende Zusammenhang zwischen der Jacobi-Matrix und den Operatoren Gradient, Divergenz und Rotation:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) &= Df(\mathbf{x}_0)^T \\ \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}_0) &= \operatorname{Spur} D\mathbf{v}(\mathbf{x}_0) \\ \operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}_0) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) &= [D\mathbf{v}(\mathbf{x}_0) - D\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)^T](\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \end{aligned}$$

BEMERKUNG VIII.4.13 (KOORDINATENINVARIANZ). Der Wert von $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x})$ ist unabhängig vom Koordinatensystem, in dem man \mathbf{v} darstellt und die partiellen Ableitungen berechnet. Dasselbe gilt für die Länge und Richtung von $\operatorname{grad} f(\mathbf{x})$ und $\operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x})$.

Es gelten folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) &= 0 \quad (\text{Gradientenfeld ist wirbelfrei}) \\
\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{v}) &= 0 \quad (\text{Feld der Rotation ist quelfrei}) \\
\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) &= \Delta f \\
\operatorname{div}(f \mathbf{v}) &= (\operatorname{grad} f) \cdot \mathbf{v} + f \operatorname{div} \mathbf{v} \\
\operatorname{rot}(f \mathbf{v}) &= (\operatorname{grad} f) \times \mathbf{v} + f \operatorname{rot} \mathbf{v} \\
\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{v}) &= \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{v}) - \Delta \mathbf{v}.
\end{aligned}$$

Mit dem symbolischen Operator

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix},$$

dem sog. NABLA-OPERATOR, lassen sich die vier hier betrachteten Felder formal als Produkte schreiben:

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} f &= \nabla f, \\
\Delta f &= \nabla \cdot (\nabla f), \\
\operatorname{div} \mathbf{v} &= \nabla \cdot \mathbf{v} \\
\operatorname{rot} \mathbf{v} &= \nabla \times \mathbf{v}.
\end{aligned}$$

ACHTUNG: Beim Umgang mit dem Nabla-Operator ist Vorsicht geboten, da man mit ihm nicht immer wie mit einem Vektor rechnen kann.

BEISPIEL VIII.4.14. Für die Vektorfelder

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ -xz \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
(\mathbf{f} \times \mathbf{g})(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} x^2 z \\ xyz \\ x^3 + y^3 \end{pmatrix}, \\
(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})(\mathbf{x}) &= -x^2 y + xy^2
\end{aligned}$$

und damit

$$\nabla(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) = \begin{pmatrix} -2xy + y^2 \\ -x^2 + 2xy \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) &= 2xz + xz + 0 \\ &= 3xz\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) &= \begin{pmatrix} 3y^2 - xy \\ x^2 - 3x^2 \\ yz - 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3y^2 - xy \\ -2x^2 \\ yz \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

KAPITEL IX

Integration von Funktionen in mehreren Variablen

IX.1. Parameterintegrale

IX.1.1. Übersicht. Viele wichtige Funktionen der Analysis haben die Form

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy \quad , a \leq x \leq b.$$

Da der Integrand von dem Parameter x abhängt, spricht man von einem PARAMETERINTEGRAL. Beispiele sind:

- die EULERSCHE GAMMAFUNKTION

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad x > 0,$$

- die BESSELFUNKTIONEN

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t - nt) dt \quad n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R},$$

- die FOURIER-TRANSFORMIERTE

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega t} f(t) dt \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Wenn alle Zahlen a, b, c, d endlich sind und der Integrand f auf dem Bereich $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ stetig ist, spricht man von einem EIGENTLICHEN PARAMETERINTEGRAL, sonst von einem UNEIGENTLICHEN PARAMETERINTEGRAL. Für beide Fälle wollen wir im Folgenden die Integration und die Differentiation bzgl. der Variablen x untersuchen.

IX.1.2. Eigentliche Parameterintegrale. Wir betrachten ein abgeschlossenes und beschränktes Rechteck $D = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ in \mathbb{R}^2 und eine stetige Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Dann hat die durch

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

definierte Funktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folgende Eigenschaften:

- F ist stetig auf $[a, b]$.
- F ist integrierbar und

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx$$

$$= \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y) dx \right\} dy.$$

- Ist f zusätzlich nach der Variablen x partiell differenzierbar und ist f_x auf D stetig, so ist F differenzierbar und

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d f_x(x, y) dy.$$

BEISPIEL IX.1.1. Für

$$F(x) = \int_1^\pi \frac{\sin(tx)}{t} dt$$

erhalten wir

$$F'(x) = \int_1^\pi \cos(tx) dt,$$

$$F''(x) = - \int_1^\pi t \sin(tx) dt.$$

BEISPIEL IX.1.2. Für die BESSELFUNKTION

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t - nt) dt, \quad n \in \mathbb{Z}$$

erhalten wir

$$J'_n(x) = - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(t) \sin(x \sin t - nt) dt,$$

$$J''_n(x) = - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2(t) \cos(x \sin t - nt) dt.$$

Den Ausdruck für J'_n können wir mittels partieller Integration umformen

$$\begin{aligned} J'_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \underbrace{(-\sin(t))}_{=\frac{d}{dt} \cos(t)} \sin(x \sin t - nt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \cos(t) \sin(x \sin t - nt) \Big|_{t=0}^{t=\pi} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t) \cos(x \sin t - nt) [x \cos(t) - n] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t - nt) [-x \cos^2(t) + n \cos(t)] dt. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} &x^2 J''_n(x) + x J'_n(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t - nt) [-x^2 \sin^2 t - x^2 \cos^2 t + nx \cos t + x^2 - n^2] dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t - nt) n [x \cos t - n] dt \\
&= \frac{n}{\pi} \sin(x \sin t - nt) \Big|_{t=0}^{t=\pi} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Also löst J_n die gewöhnliche Differentialgleichung

$$x^2 J_n'' + x J_n' + (x^2 - n^2) J_n = 0.$$

Häufig hängen die Integrationsgrenzen auch von x ab:

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy.$$

Wenn g und h differenzierbar und f nach x partiell differenzierbar sind, kann man die Ableitung von F in diesem Fall wie folgt bestimmen: Definiere

$$G(x, u, v) = \int_u^v f(x, y) dy.$$

Dann ist

$$F(x) = G(x, g(x), h(x)).$$

Daher folgt mit der Kettenregel

$$\begin{aligned}
F'(x) &= G_x(x, g(x), h(x)) + G_u(x, g(x), h(x))g'(x) \\
&\quad + G_v(x, g(x), h(x))h'(x) \\
&= \int_{g(x)}^{h(x)} f_x(x, y) dy - f(x, g(x))g'(x) + f(x, h(x))h'(x).
\end{aligned}$$

Also insgesamt

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \\
&= \int_{g(x)}^{h(x)} f_x(x, y) dy - f(x, g(x))g'(x) + f(x, h(x))h'(x).
\end{aligned}$$

BEISPIEL IX.1.3. Für

$$x(t) = \frac{1}{k} \int_0^t f(u) \sin(k(t-u)) du$$

erhalten wir mit obiger Formel und $g(t) = 0$, $h(t) = t$

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \frac{1}{k} \int_0^t k f(u) \cos(k(t-u)) du + \frac{1}{k} f(t) \sin(k(t-t)) \\
&= \int_0^t f(u) \cos(k(t-u)) du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= - \int_0^t k f(u) \sin(k(t-u)) du + f(t) \cos(k(t-t)) \\ &= -k^2 x(t) + f(t).\end{aligned}$$

Also ist x eine Lösung der Schwingungsgleichung

$$\ddot{x} + k^2 x = f.$$

IX.1.3. Uneigentliche Parameterintegrale. Die Resultate der vorigen Abschnittes können nicht ohne Weiteres auf uneigentliche Parameterintegrale, bei denen z.B. $d = \infty$ ist, übertragen werden. Man benötigt weitere Zusatzbedingungen. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf einen Spezialfall.

Sei $d = \infty$ und $D = [a, b] \times [c, d) = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y < d\}$. Die Funktion f sei in D stetig und nach der Variablen x partiell differenzierbar mit stetiger Ableitung. Weiter gebe es zwei Funktionen $g, h : [c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- $|f(x, y)| \leq g(y)$ für alle $(x, y) \in D$,
- $|f_x(x, y)| \leq h(y)$ für alle $(x, y) \in D$,
- die uneigentlichen Integrale $\int_c^d g(y) dy$ und $\int_c^d h(y) dy$ existieren.

Dann existiert für jedes $x \in [a, b]$ das uneigentliche Integral

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy.$$

Die dadurch definierte Funktion F ist differenzierbar mit

$$F'(x) = \int_c^d f_x(x, y) dy.$$

BEISPIEL IX.1.4. Wir betrachten

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-t^2} \cos(xt) dt.$$

Es ist $f(x, t) = e^{-t^2} \cos(xt)$ und $f_x(x, t) = -te^{-t^2} \sin(xt)$. Daher gilt für alle x, t

$$|f(x, t)| \leq e^{-t^2}, \quad |f_x(x, t)| \leq te^{-t^2}.$$

Die uneigentlichen Integrale

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt, \quad \int_0^\infty te^{-t^2} dt$$

existieren wegen Abschnitt V.4.2 (S. 191, Teil I). Daher ist F differenzierbar und erfüllt

$$F'(x) = - \int_0^\infty te^{-t^2} \sin(xt) dt.$$

Mittels partieller Integration folgt für $R > 0$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^R \underbrace{(-2te^{-t^2})}_{=\frac{d}{dt}e^{-t^2}} \sin(xt) dt \\ &= \frac{1}{2} e^{-t^2} \sin(xt) \Big|_0^R - \frac{1}{2} \int_0^R e^{-t^2} x \cos(xt) dt \\ &= \frac{1}{2} e^{-R^2} \sin(xR) - \frac{x}{2} \int_0^R e^{-t^2} \cos(xt) dt \\ &\xrightarrow{R \rightarrow \infty} -\frac{x}{2} F(x). \end{aligned}$$

Also erfüllt F die gewöhnliche Differentialgleichung

$$F' = -\frac{x}{2} F.$$

BEISPIEL IX.1.5. Mit obiger Vorgehensweise können die Ableitungen der Gammafunktion berechnet werden:

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \\ \Gamma'(x) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \ln t dt, \\ \Gamma''(x) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} (\ln t)^2 dt. \end{aligned}$$

IX.2. Kurvenintegrale

IX.2.1. Das Kurvenintegral einer skalaren Funktion. Wir betrachten eine offene Menge $D \subset \mathbb{R}^n$, eine skalare Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ auf D und ein stetig differenzierbares Kurvenstück $\mathbf{w} : [a, b] \rightarrow D$ in D . Wir fassen f als eine Belegungsfunktion auf \mathbf{w} auf und wollen den Gesamtwert der Belegung von \mathbf{w} berechnen. Dazu unterteilen wir das Kurvenstück, indem wir Punkte $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ im Parameterintervall und in jedem Teilintervall $[t_{i-1}, t_i]$ einen Punkt η_i wählen. Dann ist der Wert der Belegung näherungsweise

$$\sum_{i=1}^n f(\mathbf{w}(\eta_i)) \underbrace{|\mathbf{w}(t_i) - \mathbf{w}(t_{i-1})|}_{\approx |\dot{\mathbf{w}}(\eta_i)|(t_i - t_{i-1})} \approx \sum_{i=1}^n f(\mathbf{w}(\eta_i)) |\dot{\mathbf{w}}(\eta_i)| (t_i - t_{i-1}).$$

Bei immer feiner werdender Zerlegung strebt dies gegen

$$\int_a^b f(\mathbf{w}(t)) |\dot{\mathbf{w}}(t)| dt.$$

Daher definieren wir:

Das KURVENINTEGRAL von f längs \mathbf{w} ist

$$\int_{\mathbf{w}} f ds = \int_a^b f(\mathbf{w}(t)) |\dot{\mathbf{w}}(t)| dt.$$

Die Berechnung eines Kurvenintegrals erfolgt in drei Schritten:

- Bestimme eine Parametrisierung $\mathbf{w} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ des Kurvenstückes.
- Bestimme das Bogenelement $ds = |\dot{\mathbf{w}}(t)| dt$.
- Berechne das Integral

$$\int_a^b f(\mathbf{w}(t)) |\dot{\mathbf{w}}(t)| dt.$$

BEISPIEL IX.2.1. Wir betrachten eine Schraubenfeder mit Radius 2, Ganghöhe π , Gesamthöhe 2π und Massendichte $\rho(x, y, z) = x^2 y^2 + z^2$. Zu bestimmen ist die Gesamtmasse M . Dies bedeutet die Berechnung eines Kurvenintegrals mit ρ als Belegungsfunktion und der Schraubenfeder als Kurvenstück. Eine Parametrisierung ist

$$\mathbf{w}(t) = \left(2 \cos t, 2 \sin t, \frac{t}{2} \right)^T, \quad 0 \leq t \leq 4\pi.$$

Das Bogenelement ist

$$ds = \left| \left(-2 \sin t, 2 \cos t, \frac{1}{2} \right)^T \right| dt = \sqrt{4 + \frac{1}{4}} dt = \frac{\sqrt{17}}{2} dt.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{4\pi} \rho(\mathbf{w}(t)) |\dot{\mathbf{w}}(t)| dt \\ &= \int_0^{4\pi} \left[4 \sin^2 t \cdot 4 \cos^2 t + \frac{1}{4} t^2 \right] \frac{\sqrt{17}}{2} dt \\ &= \frac{\sqrt{17}}{2} \left\{ \underbrace{16 \int_0^{4\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt}_{=\frac{1}{2}\pi} + \frac{1}{4} \underbrace{\int_0^{4\pi} t^2 dt}_{=\frac{64}{3}\pi^3} \right\} \\ &= \frac{\sqrt{17}}{2} \left\{ 8\pi + \frac{16}{3}\pi^3 \right\}. \end{aligned}$$

Es ist zweckmäßig, den Begriff des Kurvenintegrals auch auf Kurven auszudehnen, die aus aneinanderhängenden Kurvenstücken bestehen.

DEFINITION IX.2.2. (1) Unter einer KURVE \mathbf{w} in $D \subset \mathbb{R}^n$ verstehen wir eine endliche Folge $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$ von stetig differenzierbaren Kurvenstücken $\mathbf{w}_i : [a_i, b_i] \rightarrow D$ mit $\mathbf{w}_i(b_i) = \mathbf{w}_{i+1}(a_{i+1})$ für $i = 1, \dots, k-1$. (2) Das KURVENINTEGRAL einer Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ entlang einer Kurve \mathbf{w} , die aus den Kurvenstücken $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$ besteht, ist die Summe der Kurvenintegrale von f längs der Kurvenstücke

$$\int_{\mathbf{w}} f ds = \int_{\mathbf{w}_1} f ds + \dots + \int_{\mathbf{w}_k} f ds.$$

BEISPIEL IX.2.3. Die Kurve \mathbf{w} führe vom Ursprung zum Punkt $(2, 1, 3)$ entlang achsenparalleler Strecken und zwar zunächst parallel zur x -, dann zur y - und zuletzt zur z -Achse. Dann besteht \mathbf{w} aus drei Kurvenstücken $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ mit

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^3 & , t &\mapsto (2t, 0, 0)^T, \\ \mathbf{w}_2 : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^3 & , t &\mapsto (2, t, 0)^T, \\ \mathbf{w}_3 : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^3 & , t &\mapsto (2, 1, 3t)^T. \end{aligned}$$

Für die Funktion $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2$ erhalten wir dann das Kurvenintegral

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{w}} f ds &= \int_{\mathbf{w}_1} f ds + \int_{\mathbf{w}_2} f ds + \int_{\mathbf{w}_3} f ds \\ &= \int_0^1 4t^2 \cdot 2dt + \int_0^1 (4 + t^2) \cdot 1dt + \int_0^1 (4 + 1 + 9t^2) \cdot 3dt \\ &= \frac{8}{3} + \left(4 + \frac{1}{3}\right) + (15 + 9) \\ &= 31. \end{aligned}$$

Für Kurvenintegrale gelten die üblichen Rechenregeln ($f, g : D \rightarrow \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{w}} \alpha f ds &= \alpha \int_{\mathbf{w}} f ds \\ \int_{\mathbf{w}} (f + g) ds &= \int_{\mathbf{w}} f ds + \int_{\mathbf{w}} g ds \end{aligned}$$

Außerdem gilt der MITTELWERTSATZ

$$\int_{\mathbf{w}} f ds = f(\tilde{\mathbf{x}})L,$$

wobei $\tilde{\mathbf{x}}$ ein geeigneter Punkt auf der Kurve und L die Länge der Kurve ist.

IX.2.2. Anwendungen. Stellt $\rho(x, y, z)$ die Massendichte einer Kurve \mathbf{w} dar, so beträgt die Gesamtmasse

$$M = \int_{\mathbf{w}} \rho ds.$$

Man nennt

$$dm = \rho(x, y, z) ds$$

daher auch das Massenelement.

Die k -ten Momente bezüglich der Koordinatenebenen eines in (x, y, z) befindlichen Massenpunktes der Masse dm sind $x^k dm$, $y^k dm$ und $z^k dm$. Dementsprechend sind die k -ten Momente einer Kurve \mathbf{w} mit der Massendichte $\rho(x, y, z)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} M_{x,k} &= \int_{\mathbf{w}} x^k \rho ds, \\ M_{y,k} &= \int_{\mathbf{w}} y^k \rho ds, \\ M_{z,k} &= \int_{\mathbf{w}} z^k \rho ds. \end{aligned}$$

Für $k = 1$ sind dies die STATISCHEN MOMENTE und für $k = 2$ die TRÄGHEITSMOMENTE. Der Punkt $S = (x_S, y_S, z_S)$, in dem eine Punktmasse der Größe M die selben statischen Momente wie die Kurve \mathbf{w} besitzt, heißt MASSENMITTELPUNKT oder SCHWERPUNKT. Damit folgt

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{1}{M} \int_{\mathbf{w}} x \rho ds, \\ y_S &= \frac{1}{M} \int_{\mathbf{w}} y \rho ds, \\ z_S &= \frac{1}{M} \int_{\mathbf{w}} z \rho ds \end{aligned}$$

mit

$$M = \int_{\mathbf{w}} \rho ds.$$

Im Falle einer homogenen Massenverteilung, d.h. $\rho(x, y, z) = \text{const}$, stimmt der Massenmittelpunkt mit dem geometrischen Schwerpunkt überein. In diesem Fall ist in obiger Formel M durch die Länge L der Kurve und ρ durch 1 zu ersetzen.

BEISPIEL IX.2.4. Betrachte die Schraubenlinie

$$\mathbf{w}(t) = (r \cos t, r \sin t, ht)^T, \quad 0 \leq t \leq 2\pi n.$$

Mit

$$R = \sqrt{r^2 + h^2}$$

ist ihre Länge

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi n} \sqrt{r^2 + h^2} dt \\ &= 2\pi n R. \end{aligned}$$

Wegen

$$\int_0^{2\pi n} \cos t dt = \int_0^{2\pi n} \sin t dt = 0$$

sind die x - und die y - Koordinate des Schwerpunktes gleich Null. Mit

$$H = 2\pi n h$$

ergibt sich für die z -Koordinate

$$\begin{aligned} z_S &= \frac{1}{L} \int_0^{2\pi n} h t \sqrt{r^2 + h^2} dt \\ &= \frac{1}{2\pi n R} \frac{1}{2} h R (2\pi n)^2 \\ &= \pi n h \\ &= \frac{H}{2}. \end{aligned}$$

Also ist $(0, 0, \frac{H}{2})$ der Schwerpunkt. Er liegt *nicht* auf \mathbf{w} .

IX.2.3. Das Kurvenintegral eines Vektorfeldes. Wir betrachten eine offene Menge $D \subset \mathbb{R}^n$, ein stetig differenzierbares Kurvenstück $\mathbf{w} : [a, b] \rightarrow D$ in D und ein Vektorfeld $\mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf D . Wir wollen \mathbf{v} längs \mathbf{w} integrieren. Dazu überlegen wir uns, dass hierfür in einem beliebigen Kurvenpunkt $\mathbf{w}(t)$ nur die Projektion von \mathbf{v} auf die Kurve eine Rolle spielt. Dies ist aber das Skalarprodukt von $\mathbf{v}(\mathbf{w}(t))$ mit dem Einheitstangentenvektor $\frac{1}{|\dot{\mathbf{w}}(t)|} \dot{\mathbf{w}}(t)$. Daher entspricht die Integration von \mathbf{v} längs \mathbf{w} dem Kurvenintegral der skalaren Belegung $\mathbf{v}(\mathbf{w}(t)) \cdot \dot{\mathbf{w}}(t) \frac{1}{|\dot{\mathbf{w}}(t)|}$. Deshalb definieren wir:

Das KURVENINTEGRAL des Vektorfeldes \mathbf{v} längs des Kurvenstückes \mathbf{w} ist

$$\int_{\mathbf{w}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_a^b \mathbf{v}(\mathbf{w}(t)) \cdot \dot{\mathbf{w}}(t) dt.$$

Das Integral läng einer Kurve, die aus den Kurvenstücken $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$ besteht, ist analog definiert als die Summe der Integrale längs der einzelnen Kurvenstücke.

Es gelten die üblichen Rechenregeln ($\mathbf{u}, \mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{w}} \alpha \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x} &= \alpha \int_{\mathbf{w}} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x} \\ \int_{\mathbf{w}} (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{x} &= \int_{\mathbf{w}} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x} + \int_{\mathbf{w}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} \end{aligned}$$

BEISPIEL IX.2.5. Wir betrachten das Vektorfeld

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (x^2y, x - z, xyz)^T$$

und als Kurve den Graphen von $y = x^3$, $0 \leq x \leq 2$, in der Ebene $z = 2$. Eine Parametrisierung ist

$$\mathbf{w}(t) = (t, t^3, 2)^T, \quad 0 \leq t \leq 2.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{w}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^2 \begin{pmatrix} t^5 \\ t - 2 \\ 2t^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^2 [t^5 + 3t^2(t - 2)] dt \\ &= \frac{64}{6} + \frac{3 \cdot 16}{4} - \frac{6 \cdot 8}{3} \\ &= \frac{20}{3}. \end{aligned}$$

BEISPIEL IX.2.6. Wir wollen das Integral des Wirbels

$$\mathbf{v}(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

längs des einmal positiv durchlaufenen Einheitskreises berechnen. Eine Parametrisierung ist

$$\mathbf{w}(t) = (\cos t, \sin t)^T, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{w}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{=1}} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{=1} dt \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Eine Kurve \mathbf{w} heißt GESCHLOSSEN, wenn ihr Anfangs- und Endpunkt übereinstimmen, d.h. $\mathbf{w}(a) = \mathbf{w}(b)$ mit $\mathbf{w} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Ist \mathbf{w} geschlossen, schreiben wir

$$\oint_{\mathbf{w}} f ds \quad \text{bzw.} \quad \oint_{\mathbf{w}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}$$

statt $\int_{\mathbf{w}} f ds$ bzw. $\int_{\mathbf{w}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}$.

IX.2.4. Das Potential eines Gradientenfeldes. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir nennen ein Vektorfeld $\mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein GRADIENTENFELD, wenn es eine skalare Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $\mathbf{v} = \text{grad } f$. In diesem Fall heißt f eine STAMMFUNKTION von \mathbf{v} und $U = -f$ ein POTENTIAL von \mathbf{v} .

BEMERKUNG IX.2.7. In einem konservativen Kraftfeld stellt das Potential die potentielle Energie dar. Das Vorzeichen ist so gewählt, dass $\mathbf{v} = -\text{grad } U$ in Richtung des stärksten Potentialabfalls zeigt.

Im Mittelpunkt dieses Abschnittes steht die Frage: „Wann ist ein gegebenes Vektorfeld ein Gradientenfeld und wie kann man gegebenenfalls eine Stammfunktion bestimmen?“

Dazu überlegen wir uns zunächst einige Konsequenzen aus der Eigenschaft, Gradientenfeld zu sein. Sei also $\mathbf{v} = \text{grad } f$ ein Gradientenfeld und \mathbf{w} ein Kurvenstück in D . Dann folgt mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{w}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} &= \int_a^b \mathbf{v}(\mathbf{w}(t)) \cdot \dot{\mathbf{w}}(t) dt \\ &= \int_a^b \text{grad } f(\mathbf{w}(t)) \cdot \dot{\mathbf{w}}(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} [f(\mathbf{w}(t))] dt \\ &= f(\mathbf{w}(b)) - f(\mathbf{w}(a)). \end{aligned}$$

Hieraus folgt unmittelbar:

Sei \mathbf{v} ein Gradientenfeld und f eine Stammfunktion von \mathbf{v} . Dann gilt:

- (1) Das Kurvenintegral hängt nur von den Werten der Stammfunktion im Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab, d.h.

$$\int_{\mathbf{w}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = f(\mathbf{w}(b)) - f(\mathbf{w}(a)).$$

- (2) Sind \mathbf{w}_1 und \mathbf{w}_2 zwei Wege mit gleichem Anfangs- und Endpunkt, so ist

$$\int_{\mathbf{w}_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{w}_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x},$$

d.h. das Kurvenintegral ist WEGUNABHÄNGIG.

- (3) Ist \mathbf{w} ein geschlossener Weg, so verschwindet das Kurvenintegral

$$\oint_{\mathbf{w}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = 0.$$

BEISPIEL IX.2.8. Die ZENTRALE KRAFT

$$\mathbf{K} = \frac{c}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

besitzt das Potential

$$U = \frac{c}{|\mathbf{x}|}.$$

Ist \mathbf{w} ein Kurvenstück, das nicht durch den Ursprung geht, ist die längs \mathbf{w} geleistete Arbeit gegeben durch

$$\begin{aligned} A &= \int_{\mathbf{w}} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{x} \\ &= U(\mathbf{w}(a)) - U(\mathbf{w}(b)) \\ &= \frac{c}{|\mathbf{w}(a)|} - \frac{c}{|\mathbf{w}(b)|}. \end{aligned}$$

BEISPIEL IX.2.9. Betrachte das elektrische Feld

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy + z^3 \\ x^2 + 3z \\ 3z^2x + 3y \end{pmatrix}$$

mit dem Potential

$$U(x, y, z) = -(x^2y + xz^3 + 3zy).$$

Der Spannungsabfall zwischen den Punkten $P = (1, 1, 1)$ und $Q = (3, 4, 5)$ längs eines Weges von P nach Q hängt nicht von dem Weg ab und ist gegeben durch

$$\int_{\mathbf{w}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = U(P) - U(Q) = 466.$$

Sei $\mathbf{v} = \text{grad } f$ ein Gradientenfeld. Falls \mathbf{v} stetig differenzierbar ist, ist f zweimal stetig differenzierbar und es gilt $f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$ für alle $i \neq j$. Dies bedeutet:

Ist \mathbf{v} ein stetig differenzierbares Gradientenfeld, so ist die Jacobi-Matrix $D\mathbf{v}(\mathbf{x})$ in jedem Punkt $\mathbf{x} \in D$ symmetrisch.

Der Wirbel \mathbf{v} aus Beispiel IX.2.6 (S. 86) ist kein Gradientenfeld, da das Integral längs des Einheitskreises nicht verschwindet. Es ist aber

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial y} &= -\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} &= \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

d.h. die Jacobi-Matrix $D\mathbf{v}$ ist symmetrisch. Dieses Beispiel zeigt, dass die Umkehrung obigen Ergebnisses nicht für jede offene Menge D gilt. Für eine möglichst einfache und gleichzeitig hinreichend allgemeine Charakterisierung von Mengen, für die die Umkehrung obiger Aussage gilt, benötigen wir folgende Definition.

DEFINITION IX.2.10. Eine offene Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt STERNFÖRMIG, wenn es einen Punkt $\mathbf{x}_0 \in D$ gibt, so dass für *jeden* Punkt $\mathbf{x} \in D$ die Verbindungsstrecke von \mathbf{x}_0 nach \mathbf{x} ganz in D liegt.

BEMERKUNG IX.2.11. Eine andere häufig betrachtete Klasse von Mengen sind die KONVEXEN Mengen. Sie sind dadurch charakterisiert, dass für jedes Paar von Punkten aus der Menge auch die gesamte Verbindungsstrecke in der Menge verläuft. Konvexe Mengen sind immer sternförmig, die Umkehrung gilt aber nicht (vgl. Abb. IX.2.1).

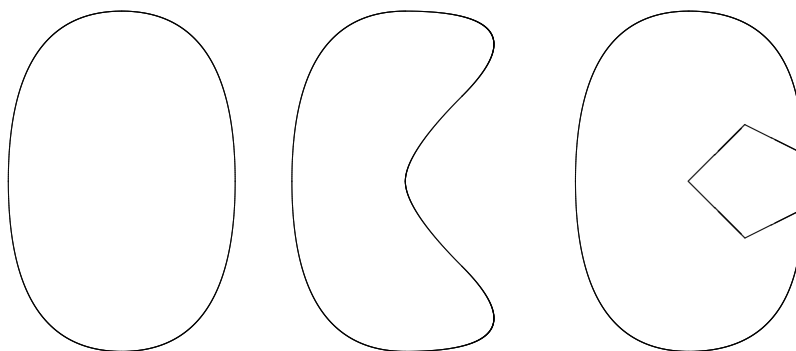


ABBILDUNG IX.2.1. Beispiele einer konvexen Menge (links), einer sternförmigen nicht konvexen Menge (Mitte) und einer nicht sternförmigen Menge (rechts)

BEISPIEL IX.2.12. \mathbb{R}^n und $B_r(0) \subset \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ und $r > 0$ sind sternförmig. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $B_r(0) \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ sind nicht sternförmig.

Das Hauptergebnis dieses Abschnittes lautet:

SATZ VON POINCARÉ: Die Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ sei sternförmig. Dann ist ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ genau dann ein Gradientenfeld, wenn die Jacobi-Matrix $D\mathbf{v}(\mathbf{x})$ in jedem Punkt $\mathbf{x} \in D$ symmetrisch ist.

Den Satz von Poincaré lautet kann man in Kurzform als Merkgel formulieren:

MERKREGEL: D sternförmig und $D\mathbf{v}(\mathbf{x})$ symmetrisch für alle $\mathbf{x} \in D \implies \mathbf{v}$ ist Gradientenfeld

bzw. in drei Dimensionen:

MERKREGEL: $D \subset \mathbb{R}^3$ sternförmig und $\operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0$ für alle $\mathbf{x} \in D \implies \mathbf{v}$ ist Gradientenfeld

IX.2.5. Die praktische Bestimmung einer Stammfunktion.

Wir beschränken uns der Übersichtlichkeit halber auf den praktisch wichtigen Fall von drei Dimensionen, d.h. $n = 3$. Es gibt hier im wesentlichen zwei Vorgehensweisen:

- mittels Kurvenintegralen,
- mittels Ansatz.

Die **Berechnung mit Kurvenintegralen** erfolgt in drei Schritten:

1. SCHRITT: Gibt es ein $\mathbf{x} \in D$ mit $\operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \neq 0$? Falls ja, ist \mathbf{v} kein Gradientenfeld, und wir sind fertig. Falls nein, gehe zu Schritt 2.
2. SCHRITT: Ist D sternförmig? Falls nein, führt die Methode nicht weiter. Falls ja, bestimme einen Punkt $\mathbf{x}_0 \in D$, so dass für jeden Punkt $\mathbf{x} \in D$ die Strecke von \mathbf{x}_0 nach \mathbf{x} in D verläuft.
3. SCHRITT: Mit dem Punkt \mathbf{x}_0 aus Schritt 2 berechne für jedes $\mathbf{x} \in D$

$$f(\mathbf{x}) = \int_0^1 \mathbf{v}(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) dt.$$

Es ist $\mathbf{v} = \operatorname{grad} f$.

BEISPIEL IX.2.13. Wir betrachten

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y^2 \cos x \\ 2y \sin x + e^{2z} \\ 2ye^{2z} \end{pmatrix}$$

auf $D = \mathbb{R}^3$. Es ist $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$ auf D , und D ist sternförmig. Wir wählen $\mathbf{x}_0 = 0$. Dann folgt für beliebiges $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 y^2 \cos(tx) \\ 2ty \sin(tx) + e^{2tz} \\ 2tye^{2tz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 \left\{ \underbrace{t^2 y^2 x \cos(tx)}_{= \frac{d}{dt} \sin(tx)} + 2ty^2 \sin(tx) + ye^{2tz} + \underbrace{2tyze^{2tz}}_{= yt \frac{d}{dt} (e^{2tz})} \right\} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= t^2 y^2 \sin(tx) \Big|_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 2ty^2 \sin(tx) dt + \int_0^1 2ty^2 \sin(tx) dt \\
&\quad + \int_0^1 ye^{2tz} dt + yte^{2tz} \Big|_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 ye^{2tz} dt \\
&= y^2 \sin x + ye^{2z}.
\end{aligned}$$

Die **Berechnung mittels Ansatz** erfolgt in sechs Schritten:

1. SCHRITT: Ansatz: $v_1 = f_x$, $v_2 = f_y$, $v_3 = f_z$.
2. SCHRITT: Unbestimmte Integration bzgl. x (bei fest gehaltenem y , z) der Gleichung $f_x = v_1$:

$$f(x, y, z) = \int v_1(x, y, z) dx + c(y, z).$$

3. SCHRITT. Leite die Identität aus Schritt 2 partiell nach y ab und setze das Ergebnis in die Gleichung $v_2 = f_y$ ein. Dies liefert eine Gleichung für c_y :

$$\frac{\partial}{\partial y} \int v_1(x, y, z) dx + c_y(y, z) = f_y = v_2.$$

Tritt in dieser Gleichung noch die Variable x auf, ist \mathbf{v} kein Gradientenfeld, und wir sind fertig. Andernfalls gehe zu Schritt 4.

4. SCHRITT: Unbestimmte Integration bzgl. y der Gleichung für c_y :

$$c(y, z) = \int h(y, z) dy + d(z)$$

mit

$$h(y, z) = v_2(x, y, z) - \int \frac{\partial}{\partial y} v_1(x, y, z) dx.$$

5. SCHRITT: Setze c aus Schritt 4 in f aus Schritt 2 ein, leite das Ganze partiell nach z ab und setze das Ergebnis in die Gleichung $v_3 = f_z$ ein. Dies liefert eine Gleichung für $d'(z)$:

$$\frac{\partial}{\partial z} \int v_1(x, y, z) dx + \frac{\partial}{\partial z} \int h(y, z) dy + d'(z) = f_z = v_3.$$

Tritt in dieser Gleichung noch die Variable y auf, ist \mathbf{v} kein Gradientenfeld, und wir sind fertig. Andernfalls gehe zu Schritt 6.

6. SCHRITT: Bestimme $d(z)$ durch unbestimmte Integration bzgl. z der Identität für $d'(z)$ aus Schritt 5 und setze das Ergebnis in die Gleichungen für c und f ein.

BEISPIEL IX.2.14. Wir betrachten das Vektorfeld \mathbf{v} aus Beispiel IX.2.13. Schritt 2 liefert

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \int y^2 \cos x dx + c(y, z) \\ &= y^2 \sin x + c(y, z). \end{aligned}$$

Die Gleichung aus Schritt 3 lautet

$$\begin{aligned} 2y \sin x + e^{2z} &= v_2(x, y, z) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} [y^2 \sin x + c(y, z)] \\ &= 2y \sin x + c_y(y, z) \\ \implies c_y(y, z) &= e^{2z}. \end{aligned}$$

Die Gleichung hängt nicht von x ab. Die Funktion h aus Schritt 4 ist

$$\begin{aligned} h(y, z) &= 2y \sin x + e^{2z} - \int 2y \cos x dx \\ &= e^{2z} \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} c(y, z) &= \int e^{2z} dy + d(z) \\ &= ye^{2z} + d(z) \\ \implies f(x, y, z) &= y^2 \sin x + ye^{2z} + d(z). \end{aligned}$$

Die Gleichung aus Schritt 5 lautet

$$\begin{aligned} 2ye^{2z} &= v_3(x, y, z) \\ &= \frac{\partial}{\partial z} [y^2 \sin x + ye^{2z} + d(z)] \\ &= 2ye^{2z} + d'(z) \\ \implies d'(z) &= 0. \end{aligned}$$

Sie hängt nicht von y ab. Schritt 6 liefert $d(z) = \gamma$ mit beliebiger Konstante γ . Daher ist

$$f(x, y, z) = y^2 \sin x + ye^{2z} + \gamma.$$

Man beachte, dass in Beispiel IX.2.13 $\gamma = 0$ war, da wir durch die Wahl von $\mathbf{x}_0 = 0$ die Festlegung $f(0, 0, 0) = 0$ getroffen hatten.

BEISPIEL IX.2.15 (ZENTRALFELDER). Dies sind Vektorfelder der Form

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \varphi(|\mathbf{x} - \mathbf{z}|)(\mathbf{x} - \mathbf{z})$$

auf $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{z\}$ mit einem festen Punkt $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$. (Man beachte, dass der Wirbel aus Beispiel IX.2.6 (S. 86) nicht unter dieses Beispiel fällt, da er in \mathbb{R}^2 definiert ist.) Da $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{z\}$ nicht sternförmig ist, können wir den Satz von Poincaré nicht anwenden. Dennoch ist ein solches

Zentralfeld immer ein Gradientenfeld. Zur Bestimmung einer Stammfunktion machen wir den Ansatz

$$f(\mathbf{x}) = \psi(|\mathbf{x} - \mathbf{z}|).$$

Mit der Kettenregel folgt für $\mathbf{x} \neq \mathbf{z}$

$$\text{grad } f(\mathbf{x}) = \psi'(|\mathbf{x} - \mathbf{z}|) \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}|} (\mathbf{x} - \mathbf{z}).$$

Ein Vergleich mit \mathbf{v} führt auf die Identität

$$\varphi(|\mathbf{x} - \mathbf{z}|) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}|} \psi'(|\mathbf{x} - \mathbf{z}|) \quad \text{für } \mathbf{x} \neq \mathbf{z}$$

bzw.

$$\psi'(s) = s\varphi(s) \quad \text{für } s > 0.$$

Also ist

$$\psi(s) = \int_0^s t\varphi(t)dt + c \quad \text{für } s > 0$$

und

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \int_0^{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|} t\varphi(t)dt + c.$$

So erhalten wir z.B. für $n \geq 3$ und das Feld

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{x}|^n} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \neq 0$$

die Stammfunktion

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \int_0^{|\mathbf{x}|} t \frac{1}{t^n} dt + c \\ &= -\frac{1}{n-2} \frac{1}{|\mathbf{x}|^{n-2}} + c. \end{aligned}$$

IX.3. Integration über ebene Bereiche

IX.3.1. Der Flächeninhalt. Wir wollen einer beschränkten Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ einen Flächeninhalt $F(M)$ zuordnen. Falls M ein Rechteck mit Kantenlängen ℓ_x und ℓ_y ist, ist natürlich $F(M) = \ell_x \ell_y$. Falls M die Vereinigung von endlich vielen Rechtecken R_1, \dots, R_n ist, deren Inneres paarweise disjunkt ist, ist natürlich $F(M) = F(R_1) + \dots + F(R_n)$.

Diese Beobachtung legt nun folgendes Vorgehen nahe: Für $k \in \mathbb{N}$ zerlegen wir die Ebene durch achsenparallele Geraden $x = n2^{-k}$ und $y = n2^{-k}$ mit $n \in \mathbb{Z}$ in Quadrate der Kantenlänge 2^{-k} und Fläche 2^{-2k} . Dann bezeichnen wir mit $s_k(M)$ die Summe der Flächen aller Quadrate, die ganz in M liegen, und mit $S_k(M)$ die Summe der Flächen

aller Quadrate, die einen nicht leeren Durchschnitt mit M haben (vgl. Abb. IX.3.1). Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} s_k(M) &\leq S_k(M), \\ s_k(M) &\leq s_{k+1}(M), \\ S_{k+1}(M) &\leq S_k(M). \end{aligned}$$

Daher konvergieren die Folgen $(s_k(M))_{k \in \mathbb{N}}$ und $(S_k(M))_{k \in \mathbb{N}}$ gegen Zahlen $F_i(M)$ bzw. $F_a(M)$:

$$\begin{aligned} F_i(M) &= \lim_{k \rightarrow \infty} s_k(M), \\ F_a(M) &= \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(M). \end{aligned}$$

Es ist immer $F_i(M) \leq F_a(M)$.

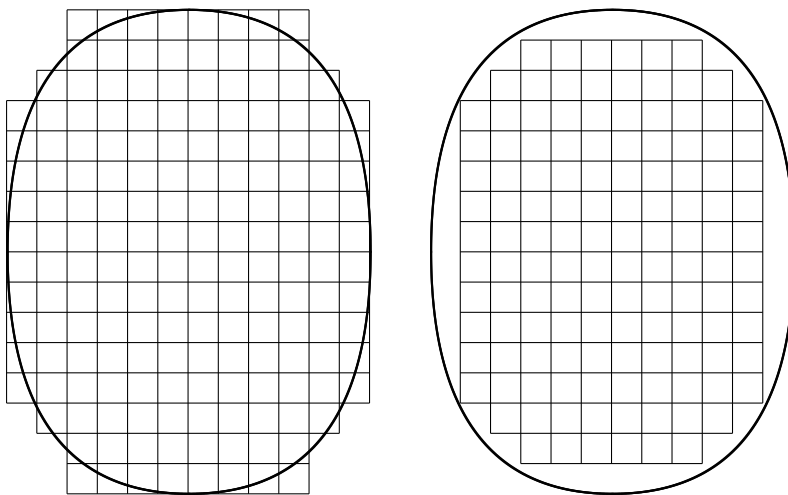


ABBILDUNG IX.3.1. $S_k(M)$ ist die Summe der Flächen der Quadrate im linken Bild, $s_k(M)$ ist die Summe der Flächen der Quadrate im rechten Bild

Wir nennen M RIEMANN-MESSBAR, wenn $F_i(M) = F_a(M)$ ist. In diesem Fall heißt der gemeinsame Wert der FLÄCHENINHALT von M und wird mit $F(M)$ bezeichnet.

Nicht jede Menge ist Riemann-messbar:

BEISPIEL IX.3.1. Betrachte $M = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x, y \in \mathbb{Q}\}$. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ $s_k(M) = 0$, $S_k(M) = 1$ und damit $F_i(M) = 0$, $F_a(M) = 1$.

Es gilt aber:

Jede beschränkte Menge, deren Rand aus endlich vielen regulären Kurvenstücken besteht, ist Riemann-messbar.

Eine messbare Menge N mit $F(N) = 0$ heißt NULLMENGE.

BEISPIEL IX.3.2. Jede einpunktige Menge ist eine Nullmenge. Jedes reguläre Kurvenstück ist eine Nullmenge.

Ist M messbar und N eine Nullmenge, so sind $M \cup N$ und $M \setminus N$ ebenfalls messbar und es gilt

$$\begin{aligned} F(M \cup N) &= F(M), \\ F(M \setminus N) &= F(M). \end{aligned}$$

BEISPIEL IX.3.3. $M = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$, $N = \{(0, 0)\} \cup \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$, $M \cup N = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $M \setminus N = \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ und $F(M) = F(M \cup N) = F(M \setminus N) = \pi$.

IX.3.2. Das Doppelintegral. Im Folgenden betrachten wir nur Mengen $M \subset \mathbb{R}^2$ mit folgender Eigenschaft: Es gibt eine Nullmenge N , so dass gilt:

- $M \cup N$ ist beschränkt und abgeschlossen.
- Je zwei Punkte im Innern von $M \cup N$ können durch ein reguläres Kurvenstück verbunden werden, das ganz im Innern von $M \cup N$ verläuft.
- Der Rand von $M \cup N$ besteht aus endlich vielen regulären Kurvenstücken.

Mengen mit dieser Eigenschaft sind gemäß vorigem Abschnitt Riemann-messbar.

Wir wollen einer auf M stetigen Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ein Integral zuordnen. Insbesondere soll das Integral der konstanten Funktion 1 der Flächeninhalt von M sein. Dazu zerlegen wir die Ebene wieder in achsenparallele Quadrate der Kantenlänge 2^{-k} mit $k \in \mathbb{N}$. Die Quadrate, die ganz in $M \cup N$ liegen, nummerieren wir von 1 bis n_k . In jedem dieser Quadrate Q_i wählen wir einen Punkt $(x_{i,k}, y_{i,k})$ und setzen

$$Z_k = \sum_{i=1}^{n_k} f(x_{i,k}, y_{i,k}) F(Q_i).$$

Man kann zeigen, dass die Folge $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Diesen Grenzwert nennen wir das **DOPPELINTEGRAL** (oder **GEBIETSINTEGRAL** oder einfach **INTEGRAL**) von f über M und bezeichnen ihn mit

$$\iint_M f(x, y) dF \quad \text{oder} \quad \iint_M f dF.$$

Das Doppelintegral hat folgende

GEOMETRISCHE DEUTUNG:

- $\iint_M dF$ ist der Flächeninhalt $F(M)$ von M .

- Ist $f(x, y) \geq 0$ für alle $(x, y) \in M$, so ist $\iint_M f dF$ das Volumen des senkrecht auf der (x, y) -Ebene stehenden Zylinders mit Grundfläche M und Deckfläche $z = f(x, y)$.

Es gelten folgende

RECHENREGELN:

- (1) $\iint_M (\alpha f + \beta g) dF = \alpha \iint_M f dF + \beta \iint_M g dF$
für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$.
- (2) $f(x, y) \leq g(x, y)$ für alle $(x, y) \in M$
 $\implies \iint_M f dF \leq \iint_M g dF$.
- (3) $\iint_M f dF = \iint_{M_1} f dF + \iint_{M_2} f dF$,
falls M durch ein reguläres Kurvenstück in die zwei Bereiche M_1 und M_2 zerlegt wird.

Zudem gilt der

MITTELWERTSATZ: Es gibt einen Punkt $(x^*, y^*) \in M$ mit

$$\iint_M f dF = f(x^*, y^*) F(M).$$

IX.3.3. Praktische Berechnung des Doppelintegrals. Für die praktische Berechnung des Doppelintegrals spielen folgende zwei Typen von Mengen eine besondere Rolle (vgl. Abb. IX.3.1):

Typ I: Es gibt ein Intervall $[a, b]$ in \mathbb{R} und zwei stetige Funktionen $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) \leq h(x)$ für alle $x \in [a, b]$ und $M = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$.

Typ II: Es gibt ein Intervall $[c, d]$ in \mathbb{R} und zwei stetige Funktionen $\ell, r : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\ell(y) \leq r(y)$ für alle $y \in [c, d]$ und $M = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \ell(y) \leq x \leq r(y)\}$.

Dann gilt für jede auf M stetige Funktion f :

M ist vom Typ I

$$\implies \iint_M f(x, y) dF = \int_a^b \left\{ \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right\} dx$$

M ist vom Typ II

$$\implies \iint_M f(x, y) dF = \int_c^d \left\{ \int_{\ell(y)}^{r(y)} f(x, y) dx \right\} dy$$

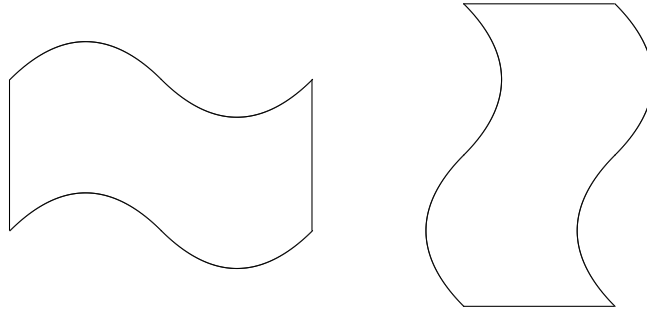


ABBILDUNG IX.3.2. Menge vom Typ I links und Menge vom Typ II rechts

BEISPIEL IX.3.4. Sei M der Viertelkreis im ersten Quadranten mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius 1

$$M = \{(x, y); x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Die Koordinaten (x_S, y_S) des Schwerpunktes von M sind gegeben durch

$$x_S = \frac{1}{F(M)} \iint_M x dF,$$

$$y_S = \frac{1}{F(M)} \iint_M y dF.$$

M ist eine Menge vom Typ I und II:

$$M = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

$$= \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}.$$

Die erste Darstellung ist günstig für die Berechnung von y_S , die zweite für diejenige von x_S :

$$y_S = \frac{1}{\frac{1}{4}\pi} \int_0^1 \left\{ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy \right\} dx$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{2} (1-x^2) dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{4}{3\pi},$$

$$\begin{aligned}
 x_S &= \frac{1}{\frac{1}{4}\pi} \int_0^1 \left\{ \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x dx \right\} dy \\
 &= \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{2} (1-y^2) dy \\
 &= \frac{4}{3\pi}.
 \end{aligned}$$

Kompliziertere Mengen zerlegt man durch achsenparallele Schnitte in endlich viele Mengen M_1, \dots, M_n vom Typ I oder II. Dann ist

$$\iint_M f dF = \iint_{M_1} f dF + \dots + \iint_{M_n} f dF$$

und jedes einzelne Integral kann wie in Beispiel IX.3.4 berechnet werden.

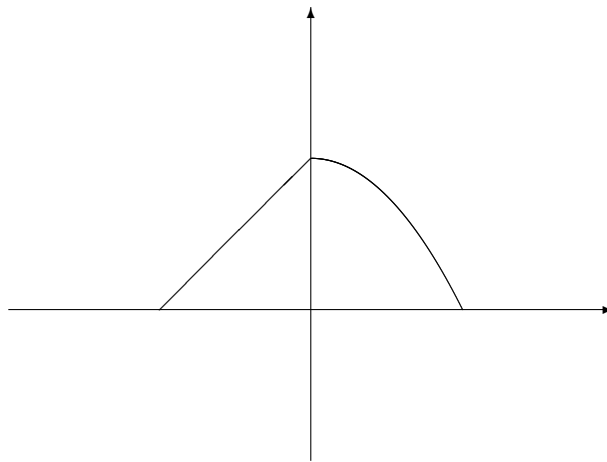


ABBILDUNG IX.3.3. Menge M aus Beispiel IX.3.5

BEISPIEL IX.3.5. Gesucht ist

$$\iint_M f dF$$

mit

$$f(x, y) = x^2 y$$

und

$$\begin{aligned}
 M &= \{(x, y) : x \geq -1, 0 \leq y \leq 1 + x\} \\
 &\quad \cap \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, y \leq 1 - x^2\}
 \end{aligned}$$

(vgl. Abb. IX.3.3). Offensichtlich ist $M = M_1 \cup M_2$ mit

$$M_1 = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1 + x\},$$

$$M_2 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x^2\}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
 \iint_M f dF &= \int_{-1}^0 \left\{ \int_0^{1+x} x^2 y dy \right\} dx + \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x^2} x^2 y dy \right\} dx \\
 &= \int_{-1}^0 \frac{1}{2} x^2 (1+x)^2 dx + \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 (1-x^2)^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 (x^2 + 2x^3 + x^4) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - 2x^4 + x^6) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} \right) \\
 &= \frac{1}{60} + \frac{4}{105} \\
 &= \frac{23}{420}.
 \end{aligned}$$

BEISPIEL IX.3.6. Der MASSENMITTELPUNKT (oder auch SCHWERPUNKT) (x_S, y_S) eines Flächenstückes M mit der Massendichte $\mu(x, y)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
 x_S &= \frac{1}{m} \iint_M x \mu(x, y) dF, \\
 y_S &= \frac{1}{m} \iint_M y \mu(x, y) dF, \\
 m &= \iint_M \mu(x, y) dF.
 \end{aligned}$$

Für $M = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq x^2\}$ und $\mu(x, y) = x^2 + y^2$ erhalten wir z.B.

$$\begin{aligned}
 m &= \int_1^2 \left\{ \int_1^{x^2} (x^2 + y^2) dy \right\} dx \\
 &= \int_1^2 \left(yx^2 + \frac{1}{3}y^3 \right) \Big|_{y=1}^{y=x^2} dx \\
 &= \int_1^2 \left(x^4 + \frac{1}{3}x^6 - x^2 - \frac{1}{3} \right) dx \\
 &= \left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{21}x^7 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x \right) \Big|_{x=1}^{x=2} \\
 &= \frac{32}{5} + \frac{128}{21} - \frac{8}{3} - \frac{2}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{21} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\
 &= \frac{31}{5} + \frac{127}{21} - \frac{8}{3} \\
 &= \frac{31}{5} + \frac{71}{21}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1006}{105} \\
x_S &= \frac{105}{1006} \int_1^2 \left\{ \int_1^{x^2} x(x^2 + y^2) dy \right\} dx \\
&= \frac{105}{1006} \int_1^2 \left(yx^3 + \frac{1}{3}y^3x \right) \Big|_{y=1}^{y=x^2} dx \\
&= \frac{105}{1006} \int_1^2 \left(x^5 + \frac{1}{3}x^7 - x^3 - \frac{1}{3}x \right) dx \\
&= \frac{105}{1006} \left(\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{24}x^8 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^2 \right) \Big|_{x=1}^{x=2} \\
&= \frac{105}{1006} \left(\frac{63}{6} + \frac{255}{24} - \frac{15}{4} - \frac{3}{6} \right) \\
&= \frac{105}{1006} \left(10 + \frac{165}{24} \right) \\
&= \frac{105}{1006} \cdot \frac{80 + 55}{8} \\
&= \frac{14175}{8048} \\
y_S &= \frac{105}{1006} \int_1^2 \left\{ \int_1^{x^2} y(x^2 + y^2) dy \right\} dx \\
&= \frac{105}{1006} \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 \right) \Big|_{y=1}^{y=x^2} dx \\
&= \frac{105}{1006} \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{4}x^8 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4} \right) dx \\
&= \frac{105}{1006} \left(\frac{1}{14}x^7 + \frac{1}{36}x^9 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x \right) \Big|_{x=1}^{x=2} \\
&= \frac{105}{1006} \left(\frac{127}{14} + \frac{511}{36} - \frac{7}{6} - \frac{1}{4} \right) \\
&= \frac{105}{1006} \left(\frac{127}{14} + \frac{460}{36} \right) \\
&= \frac{105}{1006} \cdot \frac{1143 + 1610}{126} \\
&= \frac{289065}{126756}.
\end{aligned}$$

IX.3.4. Der Satz von Green. Wir betrachten eine beschränkte und abgeschlossene Menge M in \mathbb{R}^2 , deren Rand aus endlich vielen regulären Kurvenstücken besteht. Die Kurvenstücke seien so parametrisiert, dass M immer links zur Durchlaufrichtung liegt (positiver Umlauf). Ist $\mathbf{v} : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld, so verstehen wir unter

$$\int_{\partial M} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}$$

die Summe der Kurvenintegrale über die Kurvenstücke, die den Rand ∂M von M bilden. Ist das Vektorfeld \mathbf{v} stetig differenzierbar, gilt der

SATZ VON GREEN:

$$\int_{\partial M} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \iint_M \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dF.$$

BEISPIEL IX.3.7. Wählen wir $\mathbf{v} = (0, x)^T$ oder $\mathbf{v} = (-y, 0)^T$, ergibt sich jeweils der Flächeninhalt von M :

$$F(M) = \iint_M dF = \int_{\partial M} x dy = - \int_{\partial M} y dx.$$

Ist z.B. M der Bereich, der durch die Zykloide

$$\mathbf{w}_1(t) = a \begin{pmatrix} 2\pi - t + \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

und die Strecke

$$\mathbf{w}_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi a$$

begrenzt wird, ergibt sich

$$\begin{aligned} F(M) &= - \int_{\partial M} y dx \\ &= - \int_{\mathbf{w}_1} y dx - \underbrace{\int_{\mathbf{w}_2} y dx}_{=0} \\ &= - \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) a(-1 + \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \underbrace{2 \cos t}_{f \dots = 0} + \underbrace{\cos^2 t}_{f \dots = \pi} \right) dt \\ &= 3\pi a^2. \end{aligned}$$

BEISPIEL IX.3.8. Wählen wir $\mathbf{v} = (0, \frac{1}{2}x^2)^T$ oder $\mathbf{v} = (-\frac{1}{2}y^2, 0)^T$, erhalten wir für die Komponenten des Schwerpunktes von M :

$$x_S = \frac{1}{F(M)} \iint_M x dF = \frac{1}{2F(M)} \int_{\partial M} x^2 dy,$$

$$y_S = \frac{1}{F(M)} \iint_M y dF = -\frac{1}{2F(M)} \int_{\partial M} y^2 dx.$$

Für die Menge M aus Beispiel IX.3.7 ergibt sich so z.B.

$$\begin{aligned} y_S &= -\frac{1}{6\pi a^2} \int_{\partial M} y^2 dx \\ &= -\frac{1}{6\pi a^2} \int_{\mathbf{w}_1} y^2 dx - \underbrace{\frac{1}{6\pi a^2} \int_{\mathbf{w}_2} y^2 dx}_{=0} \\ &= -\frac{1}{6\pi a^2} \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 a(-1 + \cos t) dt \\ &= \frac{a}{6\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt \\ &= \frac{a}{6\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \underbrace{3\cos t}_{f \dots = 0} + \underbrace{3\cos^2 t}_{f \dots = 3\pi} - \underbrace{\cos^3 t}_{f \dots = 0}) dt \\ &= \frac{a}{6\pi} 5\pi \\ &= \frac{5}{6} a \end{aligned}$$

und wegen der Symmetrie der Integranden

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{1}{6\pi a^2} \int_{\partial M} x^2 dy \\ &= \frac{1}{6\pi a^2} \int_{\mathbf{w}_1} x^2 dy + \underbrace{\frac{1}{6\pi a^2} \int_{\mathbf{w}_2} x^2 dy}_{=0} \\ &= \frac{1}{6\pi a^2} \int_0^{2\pi} a^2(2\pi - t + \sin t)^2 a \sin t dt \quad \left| t = s + \pi \right. \\ &= -\frac{a}{6\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi - s - \sin s)^2 \sin s ds \\ &= -\frac{a}{6\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\underbrace{\pi^2 \sin s}_{f \dots = 0} + \underbrace{s^2 \sin s}_{f \dots = 0} + \underbrace{\sin^3 s}_{f \dots = 0} \\ &\quad - 2\pi \underbrace{s \sin s}_{f \dots = 2\pi} - 2\pi \underbrace{\sin^2 s}_{f \dots = \pi} + 2 \underbrace{s \sin^2 s}_{f \dots = 0}) ds \\ &= \pi a. \end{aligned}$$

BEISPIEL IX.3.9 (SATZ VON GAUSS IN DER EBENE). Ist $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, können wir

$$\mathbf{v} = (-u_y, u_x)^T$$

wählen. Dann ist

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = u_{xx} + u_{yy} = \Delta u$$

und

$$\mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \text{grad } u \cdot \mathbf{n} ds,$$

wenn \mathbf{n} der nach außen zeigende Einheitsnormalenvektor von ∂M ist. Damit ergibt sich der Satz von Gauß in der Ebene

$$\iint_M \Delta u dF = \int_{\partial M} \text{grad } u \cdot \mathbf{n} ds.$$

IX.4. Integration über Flächen im Raum

IX.4.1. Parameterdarstellungen. Neben der Darstellung von Flächen als Graphen $z = h(x, y)$ oder Niveauflächen $F(x, y, z) = \text{const}$ von Funktionen gibt es die Parameterdarstellung. Sie ist für die Integration von auf Flächen definierten Funktionen besonders vorteilhaft. Ihr liegt die Vorstellung zugrunde, dass die Fläche durch Verformung eines Stückes der Ebene entstanden ist (vgl. Abb. IX.4.1).

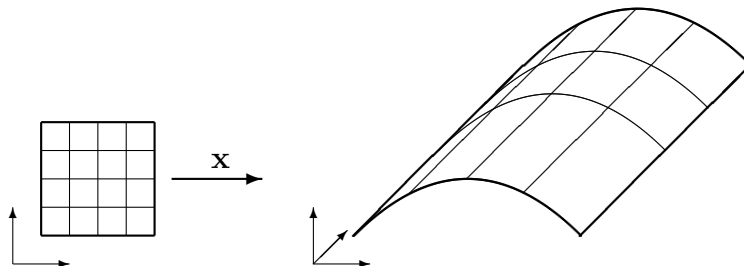


ABBILDUNG IX.4.1. Parameterdarstellung einer Fläche mit Parameterlinien

DEFINITION IX.4.1. Eine PARAMETERDARSTELLUNG eines REGULÄREN FLÄCHENSTÜCKES S im Raum ist gegeben durch eine nicht leere, offene Menge $G \subset \mathbb{R}^2$, eine nicht leere, abgeschlossene Menge $D \subset G$ und die Einschränkung auf D einer stetig differenzierbaren Abbildung

$$\mathbf{x} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \mapsto \mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))^T$$

mit folgenden Eigenschaften:

- (1) \mathbf{x} ist injektiv auf D , d.h. $\mathbf{x}(u, v) \neq \mathbf{x}(u', v')$ für alle $(u, v) \neq (u', v')$ in D .
 (2) $\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v) \neq 0$ für alle $(u, v) \in D$.

Die Bedingung (2) besagt, dass die Jacobi-Matrix

$$D\mathbf{x}(u, v) = (\mathbf{x}_u(u, v), \mathbf{x}_v(u, v))$$

für alle $(u, v) \in D$ den Rang 2 hat.

Variiert man nur einen der beiden Parameter u und v und hält den anderen fest, erhält man Kurven auf S , die sog. PARAMETERLINIEN. Die entsprechenden partiellen Ableitungen von \mathbf{x} sind die Tangentenvektoren an die Parameterlinien. Bedingung (2) besagt, dass diese Tangentenvektoren in jedem Punkt von S linear unabhängig sind. Sie spannen daher eine Ebene auf, die sog. TANGENTIALEBENE. Der Vektor $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$ steht senkrecht auf der Tangentialebene. Der normierte Vektor

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|} \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$$

heißt daher der NORMALENVEKTOR zu S in dem entsprechenden Flächenpunkt.

Aus der Identität

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$$

(vgl. Abschnitt I.4.7 (S. 27, Teil I)) folgt

$ \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v ^2 = EG - F^2$ <p>mit</p> $E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u,$ $G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v,$ $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v.$

Die Größen E, F, G heißen die METRISCHEN FUNDAMENTALGRÖSSEN von S . Insbesondere ist F genau dann gleich Null, wenn sich die Parameterlinien in einem rechten Winkel schneiden.

Der RAND ∂S des Flächenstückes S ist das Bild des Randes ∂D von D unter \mathbf{x} :

$$\partial S = \{\mathbf{x}(u, v) : (u, v) \in \partial D\}.$$

Die Oberfläche der in den technischen Anwendungen auftretenden Körper kann in der Regel nicht durch ein einziges reguläres Flächenstück dargestellt werden. Man denke etwa an einen Würfel oder eine Konservendose. Vielmehr ist die Oberfläche die Vereinigung von endlich

vielen regulären Flächenstücken, von denen je zwei an einem oder mehreren Randstücken zusammenstoßen, aber sonst keinen Punkt gemeinsam haben. Wir nennen eine solche Fläche S eine **STÜCKWEISE REGULÄRE FLÄCHE**. Ihr **RAND** besteht aus allen Randstücken, die nur zu einem Flächenstück gehören. Die Fläche heißt **GESCHLOSSEN**, wenn dieser Rand leer ist.

BEISPIEL IX.4.2 (EBENEN). Für $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ mit $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq 0$ ist

$$\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{x}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$$

eine Parameterdarstellung der Ebene durch den Punkt \mathbf{x}_0 , die von \mathbf{a} und \mathbf{b} aufgespannt wird. Es ist

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= \mathbf{a}, & \mathbf{x}_v &= \mathbf{b}, \\ E &= |\mathbf{a}|^2, & G &= |\mathbf{b}|^2, & F &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \end{aligned}$$

BEISPIEL IX.4.3 (GRAPHEN). Für den Graphen $z = h(x, y)$ mit $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ erhält man die Parameterdarstellung

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ h(u, v) \end{pmatrix}.$$

Die Parameterlinien sind die Schnitte mit den Ebenen $x = \text{const}$ bzw. $y = \text{const}$. Es ist

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ h_x \end{pmatrix}, & \mathbf{x}_v &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ h_y \end{pmatrix}, & \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v &= \begin{pmatrix} -h_x \\ -h_y \\ 1 \end{pmatrix}, \\ E &= 1 + h_x^2, & G &= 1 + h_y^2, & F &= h_x h_y. \end{aligned}$$

BEISPIEL IX.4.4 (DREHFLÄCHEN). Aus einem regulären Kurvenstück

$$t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

mit $x(t) > 0$ für alle t entsteht durch Drehung um die z -Achse um den Winkel φ_0 , $0 < \varphi_0 < 2\pi$, ein reguläres Flächenstück. Eine Parameterdarstellung ist

$$\mathbf{x}(t, \varphi) = \begin{pmatrix} x(t) \cos \varphi \\ x(t) \sin \varphi \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

Die Parameterlinien $t = \text{const}$ sind die Breitenkreise, die $\varphi = \text{const}$ die Meridiane. Es ist

$$\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \cos \varphi \\ \dot{x}(t) \sin \varphi \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_\varphi &= \begin{pmatrix} -x(t) \sin \varphi \\ x(t) \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{x}_t \times \mathbf{x}_\varphi &= \begin{pmatrix} -x(t)\dot{z}(t) \cos \varphi \\ -x(t)\dot{z}(t) \sin \varphi \\ x(t)\dot{x}(t) \end{pmatrix} \\ E &= \dot{x}(t)^2 + \dot{z}(t)^2, \\ G &= x(t)^2, \\ F &= 0.\end{aligned}$$

Da stets $F = 0$ ist, bilden die Parameterlinien ein orthogonales Netz. Da bei einer vollen Drehung, die Meridiane $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ aufeinanderfallen, ist die gesamte Drehfläche nur stückweise regulär; man nehme z.B. die beiden zu $0 \leq \varphi \leq \pi$ und $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$ gehörenden Flächenstücke.

BEISPIEL IX.4.5 (SPHÄRE). Eine Parameterdarstellung der Sphäre (Kugeloberfläche) mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius r ist

$$\mathbf{x}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \theta \\ r \sin \varphi \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Es ist

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_\varphi &= \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \cos \theta \\ r \cos \varphi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{x}_\theta &= \begin{pmatrix} -r \cos \varphi \sin \theta \\ -r \sin \varphi \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix}, \\ \mathbf{x}_\varphi \times \mathbf{x}_\theta &= \begin{pmatrix} r^2 \cos \varphi \cos^2 \theta \\ r^2 \sin \varphi \cos^2 \theta \\ r^2 \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}, \\ E &= r^2 \cos^2 \theta, \\ G &= r^2, \\ F &= 0.\end{aligned}$$

In den Polen $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ ist $\mathbf{x}_\varphi \times \mathbf{x}_\theta = 0$; längs des Halbkreises $\varphi = 0$ ist die Darstellung nicht eindeutig. Die Ausnahmemengen spielen aber als Nullmengen für die Integration in den folgenden Abschnitten keine Rolle.

BEISPIEL IX.4.6 (TORUS). Ein Torus entsteht durch Drehung um die z -Achse eines Kreises in der (x, z) -Ebene mit Radius r und Mittelpunkt $(R, 0)$ mit $0 < r < R$. Eine Parameterdarstellung ist

$$\mathbf{x}(\psi, \varphi) = \begin{pmatrix} (R + r \sin \psi) \cos \varphi \\ (R + r \sin \psi) \sin \varphi \\ r \cos \psi \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \psi, \varphi \leq 2\pi.$$

Es ist

$$\mathbf{x}_\psi = \begin{pmatrix} r \cos \psi \cos \varphi \\ r \cos \psi \sin \varphi \\ -r \sin \psi \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}_\varphi = \begin{pmatrix} -(R + r \sin \psi) \sin \varphi \\ (R + r \sin \psi) \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}_\psi \times \mathbf{x}_\varphi = \begin{pmatrix} (R + r \sin \psi)r \sin \psi \cos \varphi \\ (R + r \sin \psi)r \sin \psi \sin \varphi \\ r(R + r \sin \psi) \cos \psi \end{pmatrix}$$

$$E = r^2,$$

$$G = (R + r \sin \psi)^2,$$

$$F = 0.$$

BEISPIEL IX.4.7 (WENDELFLÄCHE). Eine Parameterdarstellung einer Wendelfläche ist

$$\mathbf{x}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ a\varphi \end{pmatrix}, \quad r_0 \leq r \leq r_1, \quad \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1$$

mit $a > 0$. Es ist

$$\mathbf{x}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_\varphi = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_r \times \mathbf{x}_\varphi = \begin{pmatrix} a \sin \varphi \\ -a \cos \varphi \\ r \end{pmatrix}$$

$$E = 1,$$

$$G = r^2 + a^2,$$

$$F = 0.$$

IX.4.2. Der Flächeninhalt. Wir wollen den Flächeninhalt eines regulären Flächenstückes S mit der Parameterdarstellung $\mathbf{x} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ berechnen. Dazu unterteilen wir die (u, v) -Ebene durch Gitterlinien $u = n2^{-k}$, $v = n2^{-k}$ mit $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$ in Quadrate der Kantenlänge 2^{-k} (vgl. Abb. IX.4.1 (S. 103)). Betrachte ein Quadrat Q , das ganz in D liegt. Der Mittelpunkt von Q habe die Koordinaten (u_0, v_0) . Das Stück $\mathbf{x}(Q)$ von S , das Q entspricht, wird approximiert durch den Ausschnitt

$$\mathbf{x}(u_0, v_0) + s\mathbf{x}_u(u_0, v_0) + t\mathbf{x}_v(u_0, v_0) \quad , \quad -2^{-k-1} \leq s, t \leq 2^{-k-1},$$

der Tangentialebene. Der Flächeninhalt dieses Ebenenstückes ist gemäß Abschnitt I.4.7 (S. 27, Teil I) gegeben durch $|\mathbf{x}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{x}_v(u_0, v_0)|2^{-2k}$,

wobei 2^{-2k} der Flächeninhalt von Q ist. Summieren wir über alle Quadrate, die in D liegen, erhalten wir eine Näherung für den Flächeninhalt von S . Wenn die Gitterweite gegen Null strebt, d.h. $k \rightarrow \infty$, konvergieren diese Näherungswerte gegen den Flächeninhalt von S . Damit erhalten wir:

Der FLÄCHENINHALT eines regulären Flächenstückes $\mathbf{x} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist

$$O(S) = \iint_D |\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| dudv.$$

Mit den metrischen Fundamentalgrößen ergibt sich

$$O(S) = \iint_D \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

BEISPIEL IX.4.8. Für die Kugel aus Beispiel IX.4.5 (S. 106) erhalten wir

$$\begin{aligned} O(S) &= \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 \cos^2(\theta) \cdot r^2 - 0} d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos \theta d\theta d\varphi \\ &= 2\pi r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \\ &= 4\pi r^2. \end{aligned}$$

BEISPIEL IX.4.9. Für den Torus aus Beispiel IX.4.6 (S. 106) ergibt sich

$$\begin{aligned} O(S) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(R + r \sin \psi)^2 - 0} d\psi d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(R + r \sin \psi) d\psi d\varphi \\ &= 2\pi r \int_0^{2\pi} (R + r \sin \psi) d\psi \\ &= 2\pi r \cdot 2\pi R \\ &= 4\pi^2 r R. \end{aligned}$$

IX.4.3. Das Oberflächenintegral einer skalaren Funktion.

Wir betrachten ein reguläres Flächenstück S mit der Parameterdarstellung $\mathbf{x} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ und eine stetige Funktion $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ auf S . Wir fassen

diese Funktion als eine Belegung auf S auf und wollen ihr dementsprechend ein Integral zuordnen. Dazu können wir wie im vorigen Abschnitt vorgehen. Wir müssen nur den Flächeninhalt des Flächenstückes über dem dortigen Quadrat Q mit dem Wert $f(\mathbf{x}(u_0, v_0))$ gewichten. Die entsprechende Summation und der Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ liefern dann:

Das OBERFLÄCHENINTEGRAL der Funktion f über dem Flächenstück S mit der Parameterdarstellung $\mathbf{x} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\iint_S f dO = \iint_D f(\mathbf{x}(u, v)) |\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)| du dv.$$

BEISPIEL IX.4.10. Wir wollen das axiale Drehmoment bzgl. der z -Achse einer Kugelschale mit Radius r , homogener Dichte und Gesamtmasse m berechnen. Dieses ist gegeben durch

$$I = \frac{1}{O(S)} \iint_S m(x^2 + y^2) dO,$$

wobei $O(S)$ die Kugeloberfläche ist. Mit Beispiel IX.4.5 (S. 106) und IX.4.8 (S. 108) ergibt sich

$$\begin{aligned} I &= \frac{m}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(r^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta)}_{=x^2+y^2} \cdot \underbrace{r^2 \cos \theta}_{=|\mathbf{x}_\varphi \times \mathbf{x}_\theta|} d\theta d\varphi \\ &= \frac{m}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^4 \cos^3 \theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{m}{4\pi r^2} 2\pi r^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta \\ &= \frac{m}{4\pi r^2} 2\pi r^4 \frac{4}{3} \\ &= \frac{2}{3} m r^2. \end{aligned}$$

BEISPIEL IX.4.11. Wir wollen den Schwerpunkt (x_S, y_S, z_S) des Teils der Fläche

$$z = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2})$$

berechnen, der von den Ebenen $x = 0$, $y = 0$ und $x + y = 1$ geschnitten wird.

Die Parameterdarstellung wird gegeben durch Beispiel IX.4.3 (S. 105) mit

$$D = \{(u, v) : u \geq 0, v \geq 0, u + v \leq 1\}$$

(Dreieck) und

$$h(u, v) = \frac{2}{3}(u^{3/2} + v^{3/2}).$$

Mit Beispiel IX.4.3 ergibt sich

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{(1+u)(1+v) - uv} = \sqrt{1+u+v}.$$

Also ist der Flächeninhalt von S

$$\begin{aligned} O(S) &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-u} \sqrt{1+u+v} \, dv \right\} du \\ &= \int_0^1 \left\{ \frac{2}{3}(1+u+v)^{\frac{3}{2}} \Big|_{v=0}^{v=1-u} \right\} du \\ &= \int_0^1 \frac{2}{3} \left\{ \sqrt{8} - (1+u)^{\frac{3}{2}} \right\} du \\ &= \frac{2}{3} \left\{ \sqrt{8} - \frac{2}{5}(1+u)^{\frac{5}{2}} \Big|_{u=0}^{u=1} \right\} \\ &= \frac{4}{15}(\sqrt{2} + 1). \end{aligned}$$

Für die x -Koordinate des Schwerpunktes ergibt sich damit

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{1}{O(S)} \iint_S x dO \\ &= \frac{15}{4(\sqrt{2} + 1)} \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-u} u \sqrt{1+u+v} \, dv \right\} du \\ &= \frac{15}{4(\sqrt{2} + 1)} \int_0^1 \frac{2}{3} u \left\{ \sqrt{8} - (1+u)^{\frac{3}{2}} \right\} du \\ &= \frac{5}{2(\sqrt{2} + 1)} \left\{ \underbrace{\sqrt{8} \int_0^1 u du}_{=\frac{1}{2}} - \underbrace{\int_0^1 u(1+u)^{\frac{3}{2}} du}_{=\frac{2}{5}[u(1+u)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{7}(1+u)^{\frac{7}{2}}] \Big|_{u=0}^{u=1}} \right\} \\ &= \frac{1}{14}(26 - 15\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen ist $y_S = x_S$.

Für die z -Koordinate erhalten wir

$$\begin{aligned} z_S &= \frac{1}{O(S)} \iint_S z dO \\ &= \frac{1}{O(S)} \left\{ \iint_S \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} dO + \iint_S \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} dO \right\} \\ &= \frac{1}{O(S)} \left\{ \iint_D \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \sqrt{1+u+v} \, dudv \right\} \end{aligned}$$

$$+ \left. \iint_D \frac{2}{3} v^{\frac{3}{2}} \sqrt{1+u+v} \, dudv \right\}.$$

Da D invariant ist unter der Vertauschung von u und v , stimmen die beiden Integrale in der letzten Zeile überein. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} z_S &= \frac{4}{3} \frac{1}{O(S)} \iint_D u^{\frac{3}{2}} \sqrt{1+u+v} \, dudv \\ &= \frac{4}{3} \frac{15}{4(\sqrt{2}+1)} \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-u} u^{\frac{3}{2}} \sqrt{1+u+v} \, dv \right\} du \\ &= \frac{5}{\sqrt{2}+1} \int_0^1 \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \left[\sqrt{8} - (1+u)^{\frac{3}{2}} \right] du \\ &= \frac{5}{\sqrt{2}+1} \frac{2}{3} \left\{ \underbrace{\int_0^1 \sqrt{8} u^{\frac{3}{2}} du}_{=\frac{2}{5}\sqrt{8}} - \int_0^1 \{u(1+u)\}^{\frac{3}{2}} du \right\}. \end{aligned}$$

Für das zweite Integral erhalten wir

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \{u(1+u)\}^{\frac{3}{2}} du \\ &= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{4} [(2u+1)^2 - 1] \right\}^{\frac{3}{2}} du \quad |t = 2u+1 \\ &= \int_1^3 \frac{1}{8} (t^2 - 1)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2} dt \\ &= \frac{1}{16} \int_1^3 (t^2 - 1)^{\frac{3}{2}} dt \\ &= \frac{1}{64} \left[t(t^2 - 1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} t(t^2 - 1)^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2} \ln(t + \sqrt{t^2 - 1}) \right] \Bigg|_{t=1}^{t=3} \\ &= \frac{1}{64} \left[3 \cdot 8^{\frac{3}{2}} - \frac{9}{2} \cdot 8^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2} \ln(\underbrace{3 + \sqrt{8}}_{=(1+\sqrt{2})^2}) \right] \\ &= \frac{3}{64} [16\sqrt{2} - \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich insgesamt

$$\begin{aligned} z_S &= \frac{5}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left\{ \frac{4}{5} \sqrt{2} - \frac{3}{64} [15\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})] \right\} \\ &= \frac{31\sqrt{2} - 15 \ln(1 + \sqrt{2})}{96(1 + \sqrt{2})}. \end{aligned}$$

IX.4.4. Transformationsformel für Gebietsintegrale. Die Parameterdarstellung eines regulären Flächenstückes in der Ebene $z = 0$ hat die Form

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Bedingung $|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| \neq 0$ ist dann äquivalent zu

$$|x_u y_v - x_v y_u| = \left| \det \begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix} \right| \neq 0.$$

Da wir die Ebene $z = 0$ mit dem \mathbb{R}^2 identifizieren können (d.h. wir ignorieren die z -Koordinate), nennen wir eine solche Abbildung eine **KOORDINATENTRANSFORMATION** des ebenen Bereiches $D : (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$. Aus dem vorigen Abschnitt folgt dann:

TRANSFORMATIONSFORMEL: Wird die Menge $D \subset \mathbb{R}^2$ unter der injektiven Abbildung $(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$ in die Menge $S \subset \mathbb{R}^2$ abgebildet und gilt $|x_u y_v - x_v y_u| \neq 0$ für alle $(u, v) \in D$, so ist für jede stetige Funktion f auf S

$$\begin{aligned} & \iint_S f(x, y) dx dy \\ &= \iint_D f(x(u, v), y(u, v)) \\ & \quad |x_u(u, v)y_v(u, v) - x_v(u, v)y_u(u, v)| du dv. \end{aligned}$$

BEISPIEL IX.4.12 (AFFINE KOORDINATEN). Für

$$\begin{aligned} x &= x_0 + au + bv, \\ y &= y_0 + cu + dv \end{aligned}$$

mit $ad - bc \neq 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} & \iint_S f(x, y) dx dy \\ &= \iint_D f(x_0 + au + bv, y_0 + cu + dv) |ad - bc| du dv. \end{aligned}$$

So wird z.B. durch die Transformation $x = au, y = bv$ mit $a > 0, b > 0$ die Ellipse

$$E = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

auf den Kreis

$$K = \{ (u, v) : u^2 + v^2 \leq 1 \}$$

abgebildet. Daher gilt für die Fläche der Ellipse

$$\begin{aligned} F(E) &= \iint_E dx dy \\ &= \iint_K ab du dv \\ &= abF(K) \\ &= \pi ab. \end{aligned}$$

BEISPIEL IX.4.13 (POLARKOORDINATEN). Für

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \iint_D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

Für das Trägheitsmoment bzgl. der y -Achse der Kreisscheibe

$$K = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

erhalten wir so z.B. bei konstanter Dichte ρ mit

$$D = \{(r, \varphi) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

den Wert

$$\begin{aligned} M &= \rho \iint_K x^2 dx dy \\ &= \rho \iint_D r^2 \cos^2 \varphi r dr d\varphi \\ &= \rho \int_0^1 \left\{ \int_0^{2\pi} r^3 \cos^2 \varphi d\varphi \right\} dr \\ &= \pi \rho \int_0^1 r^3 dr \\ &= \frac{1}{4} \pi \rho. \end{aligned}$$

BEISPIEL IX.4.14 (ELLIPTISCHE KOORDINATEN). Sie haben die Form

$$\begin{aligned} x &= a \cosh u \cos v, \\ y &= a \sinh u \sin v \end{aligned}$$

mit $a > 0$. Es ist

$$\begin{aligned} x_u y_v - x_v y_u &= a^2 [\sinh^2 u \cos^2 v + \cosh^2 u \sin^2 v] \\ &= a^2 [\cosh^2 u - \cos^2 v]. \end{aligned}$$

IX.4.5. Der Fluss eines Vektorfeldes. Wir betrachten ein reguläres Flächenstück S mit der Parameterdarstellung $\mathbf{x} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ und ein Vektorfeld $\mathbf{v} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ auf S . Wenn wir \mathbf{v} als Geschwindigkeitsfeld einer stationären Flüssigkeitsströmung interpretieren, stellt das Spatprodukt

$$[\mathbf{v}, \mathbf{x}_u du, \mathbf{x}_v dv] = [\mathbf{v}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v] dudv$$

das Volumen der Flüssigkeitsmenge dar, die pro Zeiteinheit durch das Oberflächenelement

$$dO = |\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| dudv$$

strömt. Da gemäß Abschnitt I.4.8 (S. 28, Teil I)

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v] &= \mathbf{v} \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} |\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| \end{aligned}$$

mit der Flächennormalen

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|} \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$$

aus Abschnitt IX.4.1 ist, ist dieses Flüssigkeitsvolumen gleich $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dO$.

Daher beschreibt das Integral $\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dO$ das Flüssigkeitsvolumen, das pro Zeiteinheit durch das gesamte Flächenstück strömt.

Diese Beobachtung motiviert folgende Definition:

Der FLUSS des Vektorfeldes \mathbf{v} durch das Flächenstück S mit der Parameterdarstellung $\mathbf{x} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{O} &= \iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dO \\ &= \iint_D [\mathbf{v}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v] dudv. \end{aligned}$$

BEISPIEL IX.4.15. Wir wollen den Fluss des Vektorfeldes

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2z \\ x + y \\ 0 \end{pmatrix}$$

durch die Kugel

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$$

(von innen nach außen!) berechnen. Die Parameterdarstellung ist gemäß Beispiel IX.4.5 (S. 106)

$$\mathbf{x}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \theta \\ r \sin \varphi \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Die Normale ist

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Sie zeigt in die richtige Richtung, nämlich nach außen. (Sonst müssten wir das Vorzeichen umkehren!) Gemäß Beispiel IX.4.5 ist

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v| &= \sqrt{EG - F^2} \\ &= r^2 \cos \theta. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für den gesuchten Fluss

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dO &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 2r \sin \theta \\ r \cos \theta (\cos \varphi + \sin \varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} r^2 \cos \theta d\theta \right\} d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2r^3 \underbrace{\sin \theta \cos^2 \theta}_{\int \dots d\theta = 0} \cos \varphi \right. \\ &\quad \left. + r^3 \underbrace{\cos^3 \theta}_{\int \dots d\theta = \frac{4}{3}} \sin \varphi (\cos \varphi + \sin \varphi) d\theta \right\} d\varphi \\ &= \frac{4}{3} r^3 \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin \varphi \cos \varphi}_{\int \dots d\varphi = 0} + \underbrace{\sin^2 \varphi}_{\int \dots d\varphi = \pi} d\varphi \\ &= \frac{4}{3} \pi r^3. \end{aligned}$$

IX.4.6. Der Satz von Stokes. Der Satz von Green besitzt eine Verallgemeinerung für räumliche ZWEISEITIGE FLÄCHEN, bei denen man eindeutig von einer unteren und oberen (bzw. inneren und äußeren) Seite reden kann.

Jedes reguläre Flächenstück S ist zweiseitig. Wählt man das Vorzeichen von

$$\mathbf{n} = \pm \frac{1}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|} \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$$

einheitlich für alle Punkte von S , so wird die Oberseite von S durch die Vorschrift bestimmt:

„ \mathbf{n} weist im Flächenpunkt aufgetragen aus der Oberseite heraus.“

Eine stückweise reguläre Fläche ist dann ZWEISEITIG oder ORIENTIERBAR, wenn sich die einzelnen Flächenstücke so wählen lassen, dass sich der Umlaufsinn über gemeinsame Kanten stetig fortsetzen lässt.

Die Kugel und der Zylinder sind Beispiele für solche orientierbaren Flächen. Das Möbiusband ist ein Beispiel für eine Fläche, die nicht orientierbar ist.

SATZ VON STOKES: Sei S eine orientierbare, stückweise reguläre Fläche mit überschneidungsfreier Randkurve ∂S , die so durchlaufen wird, dass S links liegt und der Umlaufsinn zusammen mit der Normalen von S eine Rechtsschraubung ergibt. Weiter sei $U \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Menge, die S enthält, und $\mathbf{v} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann ist

$$\oint_{\partial S} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dO.$$

Aus dem Satz von Stokes folgt, dass für je zwei gleich orientierte Flächen S_1, S_2 mit gleicher Randkurve gilt

$$\iint_{S_1} (\operatorname{rot} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dO = \iint_{S_2} (\operatorname{rot} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dO.$$

Außerdem ergibt sich folgende Interpretation der Rotation:

$(\operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n}$ gibt im Punkt \mathbf{x} die Zirkulation des Vektorfeldes \mathbf{v} pro Flächeneinheit an, für jedes zu \mathbf{n} senkrechte reguläre Flächenstück durch \mathbf{x} .

BEISPIEL IX.4.16. S entstehe durch den Schnitt des Zylinders

$$Z = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1\}$$

mit der Ebene

$$E = \{(x, y, z) : x + y + z = 1\};$$

die Normale weise in den ersten Oktanten. Wir wollen

$$\oint_{\partial S} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}$$

für das Vektorfeld

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y^3 \\ x^3 \\ -z^3 \end{pmatrix}$$

berechnen.

Für den direkten Weg benötigen wir eine Parametrisierung von ∂S .

Diese lautet

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1 - \cos t - \sin t \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin^3 t \\ \cos^3 t \\ -(1 - \cos t - \sin t)^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^4 t + \cos^4 t + (\cos t - \sin t)(1 - \cos t - \sin t)^3 dt. \end{aligned}$$

Die Berechnung dieses Integrals ist nicht schwierig, aber mühselig. Mit dem Satz von Stokes folgt

$$\oint_{\partial S} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dO.$$

Für die Rotation erhalten wir

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3x^2 + 3y^2 \end{pmatrix}.$$

Eine Parameterdarstellung von S ist

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 - u - v \end{pmatrix}$$

mit $(u, v) \in K$ und der Einheitskreisscheibe K . Es ist

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{x}_v &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Normale weist also in die richtige Richtung. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} &= \iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dO \\ &= \iint_K \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3u^2 + 3v^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dudv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_K 3(u^2 + v^2) dudv \quad \left| \begin{array}{l} u = r \cos \varphi, \\ v = r \sin \varphi \end{array} \right. \\
&= \int_0^1 \left\{ \int_0^{2\pi} 3r^2 r d\varphi \right\} dr \\
&= 2\pi \frac{3}{4} \\
&= \frac{3}{2}\pi.
\end{aligned}$$

IX.5. Integration über dreidimensionale Bereiche

IX.5.1. Das Volumen. Wir wollen einer beschränkten Menge $M \subset \mathbb{R}^3$ ein Volumen zuordnen. Falls M ein Quader ist, soll dies das Produkt der Kantenlängen sein. Dazu gehen wir analog zu den ebenen Bereichen in Abschnitt IX.3.1 (S. 93) vor und unterteilen den Raum durch Koordinatenebenen parallel zu den Ebenen $x = n2^{-k}$, $y = n2^{-k}$, $z = n2^{-k}$ mit $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$ in Würfel mit der Kantenlänge 2^{-k} und dem Volumen 2^{-3k} . Dann bezeichne $s_k(M)$ und $S_k(M)$ die Summe der Volumina aller Würfel, die ganz in M enthalten sind, und diejenige aller Würfel, die mindestens einen Punkt mit M gemeinsam haben. Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned}
s_k(M) &\leq S_k(M), \\
s_k(M) &\leq s_{k+1}(M), \\
S_{k+1}(M) &\leq S_k(M)
\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Daher besitzen die beiden Folgen $(s_k(M))_{k \in \mathbb{N}}$ und $(S_k(M))_{k \in \mathbb{N}}$ jeweils einen Grenzwert $V_i(M)$ bzw. $V_a(M)$. Falls beide übereinstimmen, nennen wir M RIEMANN-MESSBAR und den gemeinsamen Grenzwert das VOLUMEN $V(M)$ von M :

$$V(M) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k(M) = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(M).$$

Besteht eine Menge N nur aus endlich vielen Punkten, regulären Kurvenstücken und regulären Flächenstücken, so ist $V(N) = 0$. Man nennt N daher eine NULLMENGE.

Ist M messbar und N eine Nullmenge, so sind $M \cup N$ und $M \setminus N$ auch messbar und es gilt

$$V(M \cup N) = V(M), \quad V(M \setminus N) = V(M).$$

Für unsere Zwecke können wir uns auf sog. REGULÄRE Bereiche M beschränken, die folgende Eigenschaften haben:

- M ist abgeschlossen und beschränkt.
- Der Rand ∂M von M besteht aus endlich vielen regulären Flächenstücken.
- Das Innere $M \setminus \partial M$ von M ist eine nicht leere, offene Menge.

Man kann zeigen:

Jeder im obigen Sinne reguläre Bereich M ist Riemannmessbar mit positivem Volumen $V(M) > 0$.

IX.5.2. Das Dreifachintegral. Sei M ein regulärer Bereich in \mathbb{R}^3 und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wie im vorigen Abschnitt unterteilen wir den Raum in Würfel der Kantenlänge 2^{-k} . Diejenigen Würfel, die ganz in M liegen, nummerieren wir von 1 bis n_k . Für den i -ten Würfel bezeichnet \mathbf{x}_i den Mittelpunkt. Mit diesen Bezeichnungen können wir die Riemann-Summe

$$Z_k = \sum_{i=1}^{n_k} f(\mathbf{x}_i) 2^{-3k}$$

betrachten. Man kann zeigen, dass die Folge $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Den Grenzwert nennen wir das DREIFACH- oder VOLUMENINTEGRAL von f über M und bezeichnen es mit

$$\iiint_M f dV \quad \text{oder} \quad \iiint_M f dx dy dz.$$

Für das Dreifachintegral gelten die gleichen Rechenregeln wie für Doppelintegrale und Integrale in \mathbb{R} .

IX.5.3. Praktische Berechnung des Dreifachintegrals. Für die praktische Rechnung wichtige Mengen $M \subset \mathbb{R}^3$ lassen sich häufig als „Zylinder“ über einem ebenen Grundbereich D in einer der Koordinatenebenen darstellen. Liegt z.B. D in der (x, y) -Ebene, bedeutet dies, dass es zwei stetige Funktionen g und h auf D gibt, sodass M die Form hat

$$M = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, g(x, y) \leq z \leq h(x, y)\}.$$

Ist f eine stetige Funktion auf M , gilt dann für das Dreifachintegral von f über M

$$\iiint_M f dV = \iint_D \left\{ \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, z) dz \right\} dx dy.$$

Damit ist die Berechnung des Dreifachintegrals auf diejenige eines Integrals in \mathbb{R} und eines Doppelintegrals zurückgeführt. Ähnliche Formeln gelten, wenn D in der (x, z) - oder (y, z) -Ebene liegt.

BEISPIEL IX.5.1. Wir wollen das Volumen der Menge M berechnen, die von dem Ellipsoid

$$E = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

und dem Kegel

$$K = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \right\}$$

berandet wird und in dem Bereich $z \geq 0$ liegt. Da sich Ellipsoid und Kegel in der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$$

schneiden, lässt sich M darstellen als

$$M = \left\{ (x, y, z) : (x, y) \in D, \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \leq \frac{z}{c} \leq \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \right\}$$

mit

$$D = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Damit erhalten wir für das Volumen von M

$$\begin{aligned} V(M) &= \iint_D \left\{ \int_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} dz \right\} dx dy \\ &= c \iint_D \left\{ \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \right\} dx dy. \end{aligned}$$

Zur Berechnung des Doppelintegrals führen wir die Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} x &= ar \cos \varphi \\ y &= br \sin \varphi \end{aligned}$$

mit $0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ aus. Die Determinante der Jacobi-Matrix ist

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} a \cos \varphi & -ar \sin \varphi \\ b \sin \varphi & br \cos \varphi \end{pmatrix} \\ &= abr. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} V(M) &= c \iint_D \left\{ \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \right\} dx dy \\ &= c \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left\{ \int_0^{2\pi} [\sqrt{1 - r^2} - r] abrd\varphi \right\} dr \\ &= 2\pi abc \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r\sqrt{1 - r^2} - r^2 dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi abc \left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}r^3 \right] \Big|_{r=0}^{r=\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{2}{3}\pi abc \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \right] \\
&= \frac{1}{3}\pi abc (2 - \sqrt{2}).
\end{aligned}$$

IX.5.4. Die Transformationsformel für Volumenintegrale.

Wir betrachten zwei reguläre Bereiche U und M in \mathbb{R}^3 . Unter einer KOORDINATENTRANSFORMATION von U auf M verstehen wir eine stetig differenzierbare Abbildung $\mathbf{x} : U \ni (u, v, w)^T \mapsto \mathbf{x}(u, v, w) \in M$ mit den Eigenschaften:

- \mathbf{x} ist injektiv.
- Die Vektoren $\mathbf{x}_u(u, v, w)$, $\mathbf{x}_v(u, v, w)$, $\mathbf{x}_w(u, v, w)$ sind für alle $(u, v, w)^T \in U$ linear unabhängig.

Ein Quader $u_0 \leq u \leq u_0 + \Delta u$, $v_0 \leq v \leq v_0 + \Delta v$, $w_0 \leq w \leq w_0 + \Delta w$ in U wird durch \mathbf{x} in erster Approximation abgebildet auf ein Spat ausgehend vom Punkt $\mathbf{x}(u_0, v_0, w_0)$ aufgespannt von den Vektoren $\mathbf{x}_u(u_0, v_0, w_0)\Delta u$, $\mathbf{x}_v(u_0, v_0, w_0)\Delta v$ und $\mathbf{x}_w(u_0, v_0, w_0)\Delta w$. Das Volumen dieses Spates ist gemäß Abschnitt I.4.8 (S. 28, Teil I)

$$\begin{aligned}
\Delta V &= |[\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_w]| \Delta u \Delta v \Delta w \\
&= |\det(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_w)| \Delta u \Delta v \Delta w.
\end{aligned}$$

Die Determinante

$$\det(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_w) = \det \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix}$$

heißt JACOBI-DETERMINANTE oder FUNKTIONALDETERMINANTE der Transformation. Setzt man obige Formel für ΔV in die entsprechenden Riemannschen Summen ein, erhält man:

TRANSFORMATIONSFORMEL FÜR VOLUMENINTEGRALE:
Entsteht der reguläre Bereich $M \subset \mathbb{R}^3$ durch die Koordinatentransformation $\mathbf{x} : (u, v, w)^T \mapsto \mathbf{x}(u, v, w)$ aus dem regulären Bereich U , so gilt für jede stetige Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ auf M die Transformationsformel

$$\begin{aligned}
&\iiint_M f(x, y, z) dx dy dz \\
&= \iiint_U f(\mathbf{x}(u, v, w)) |\det(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_w)| du dv dw.
\end{aligned}$$

BEISPIEL IX.5.2 (AFFINE KOORDINATEN). Für die Transformation $\mathbf{x} = A\mathbf{u} + \mathbf{x}_0$ mit $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und $\det A \neq 0$ erhalten wir

$$\iiint_M f(\mathbf{x}) dx dy dz = \iiint_U f(A\mathbf{u} + \mathbf{x}_0) |\det A| du dv dw.$$

Das Ellipsoid

$$M = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq r^2 \right\}$$

mit $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ ist das Bild der Kugel

$$K = \{(u, v, w) : u^2 + v^2 + w^2 \leq r^2\}$$

unter der Transformation

$$\mathbf{x} : (u, v, w)^T \mapsto (au, bv, cw)^T.$$

Dies entspricht

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= 0, \\ A &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\det A = abc$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} V(M) &= \iiint_M dx dy dz \\ &= \iiint_K abc du dv dw \\ &= \frac{4}{3} \pi r^3 abc. \end{aligned}$$

BEISPIEL IX.5.3 (ZYLINDERKOORDINATEN). Dies ist die Transformation

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi, \\ z &= z. \end{aligned}$$

Die Funktionaldeterminante ist

$$\det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r.$$

Also ist

$$\iiint_M f dx dy dz = \iiint_U f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz.$$

Der Zylinder

$$M = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$$

habe z.B. die Massenverteilung

$$f(x, y, z) = z^2(x^2 + y^2).$$

Dann ist die Gesamtmasse

$$\begin{aligned} M &= \iiint_M f dx dy dz \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^2 z^2 r^2 r dz \right\} d\varphi \right\} dr \\ &= \frac{8}{3} 2\pi \int_0^1 r^3 dr \\ &= \frac{4}{3} \pi. \end{aligned}$$

BEISPIEL IX.5.4 (KUGELKOORDINATEN). Dies ist die Transformation

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \cos \theta, \\ y &= r \sin \varphi \cos \theta, \\ z &= r \sin \theta. \end{aligned}$$

Die Funktionaldeterminante ist

$$\det \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \cos \theta & -r \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & r \cos \theta \end{pmatrix} = r^2 \cos \theta.$$

Also ist

$$\begin{aligned} &\iiint_M f dx dy dz \\ &= \iiint_U f(r \cos \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \theta) r^2 \cos \theta dr d\varphi d\theta. \end{aligned}$$

Für die Massenverteilung

$$f(x, y, z) = z^2(x^2 + y^2)$$

in der Einheitskugel ergibt sich so z.B. die Gesamtmasse

$$\begin{aligned} M &= \iiint_M f dx dy dz \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{r^2 \sin^2 \theta}_{=z^2} \underbrace{r^2 \cos^2 \theta}_{=x^2+y^2} r^2 \cos \theta d\theta \right\} d\varphi \right\} dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \underbrace{\int_0^1 r^6 dr}_{=\frac{1}{7}} \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^3 \theta d\theta}_{=\frac{4}{15}} \\
&= \frac{8}{105} \pi.
\end{aligned}$$

IX.5.5. Der Satz von Gauß. Wir betrachten einen regulären Bereich $M \subset \mathbb{R}^3$, dessen Rand ∂M aus endlich vielen regulären Flächenstücken besteht, eine offene Menge O , die M enthält, und ein auf O stetig differenzierbares Vektorfeld $\mathbf{v} : O \rightarrow \mathbb{R}^3$. In jedem Punkt von ∂M bezeichne \mathbf{n} den nach außen weisenden Einheitsnormalenvektor. Dann gilt:

GAUSSSCHER INTEGRALSATZ:

$$\iiint_M \operatorname{div} \mathbf{v} dV = \iint_{\partial M} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dO.$$

BEISPIEL IX.5.5. Der Fluss des Vektorfeldes

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2z \\ x + y \\ 0 \end{pmatrix}$$

durch die Oberfläche der Kugel

$$K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

beträgt

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial K} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dO &= \iiint_K \operatorname{div} \mathbf{v} dV \\
&= \iiint_K 1 dV \\
&= \frac{4}{3} \pi.
\end{aligned}$$

BEISPIEL IX.5.6. Der Fluss des Vektorfeldes

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ x^2y \\ y \end{pmatrix}$$

durch die Oberfläche des Zylinders

$$M = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, |z| \leq 1\}$$

beträgt

$$\iint_{\partial M} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dO = \iiint_M \operatorname{div} \mathbf{v} dV$$

$$\begin{aligned}
&= \iiint_M x^2 + y^2 dx dy dz \quad (\text{Zylinderkoordinaten}) \\
&= \int_0^1 \left\{ \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{-1}^1 r^2 r dz \right\} d\varphi \right\} dr \\
&= 4\pi \int_0^1 r^3 dr \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

BEISPIEL IX.5.7 (KONTINUITÄTSGLEICHUNG DER STRÖMUNGSMECHANIK). Sei \mathbf{v} das Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit mit der räumlich und zeitlich variablen Dichte ρ . Wir betrachten einen beliebigen räumlichen Bereich M im Strömungsgebiet. Durch die Oberfläche von M tritt pro Zeiteinheit die Masse

$$\iint_{\partial M} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dO$$

aus. Wegen der Massenerhaltung muss dies gleich der zeitlichen Änderung der Masse sein. Dieses ist

$$-\frac{d}{dt} \iiint_M \rho dV.$$

(Minuszeichen, da der Fluss aus M heraus betrachtet wird!) Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
0 &= \underbrace{\iint_{\partial M} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dO}_{=\iint_M \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV} + \underbrace{\frac{d}{dt} \iiint_M \rho dV}_{=\iint_M \frac{\partial \rho}{\partial t} dV} \\
&= \iiint_M \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right\} dV.
\end{aligned}$$

Da diese Identität für jeden noch so kleinen Bereich M gilt, kann man aus ihr punktweise die Kontinuitätsgleichung der Strömungsmechanik

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

folgern.

Setzen wir im Gaußschen Integralsatz für \mathbf{v} den Gradienten einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion f ein, erhalten wir wegen

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$$

die Identität

$$\iiint_M \Delta f dV = \iint_{\partial M} \operatorname{grad} f \cdot \mathbf{n} dO = \iint_{\partial M} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} dO.$$

Ist f eine skalare Funktion und \mathbf{v} ein Vektorfeld, ergibt sich aus der Produktregel

$$\operatorname{div}(f\mathbf{v}) = f \operatorname{div} \mathbf{v} + (\operatorname{grad} f) \cdot \mathbf{v}.$$

Setzen wir $f\mathbf{v}$ an Stelle von \mathbf{v} im Gaußschen Integralsatz ein, erhalten wir hieraus ein mehrdimensionales Analogon zur partiellen Integration:

$$\iiint_M f \operatorname{div} \mathbf{v} dV = \iint_{\partial M} f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dO - \iiint_M \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} f dV.$$

KAPITEL X

Gewöhnliche Differentialgleichungen II Systeme

X.1. Existenz- und Eindeutigkeitsätze

X.1.1. Grundbegriffe. Wir erweitern die Begriffe aus Abschnitt VI.1.1 (S. 213, Teil I) auf Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen, d.h. gDglen bei denen die Lösung eine vektorwertige Funktion $\mathbf{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$ ist. Dazu seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, k und n positive natürliche Zahlen und $\mathbf{f} : I \times \mathbb{R}^{nk} \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine gegebene Funktion. Ein SYSTEM GEWOEHNLICHER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN n -TER ORDNUNG kurz GDGL n -TER ORDNUNG ist ein Ausdruck der Form

$$\mathbf{y}^{(n)} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{y}^{(n-1)}),$$

bei dem die gesuchte Lösung \mathbf{y} ihre Werte im \mathbb{R}^k hat. Offensichtlich entsprechen die gDglen aus Kapitel VI dem Spezialfall $k = 1$.

Eine Funktion $\mathbf{y} : J \rightarrow \mathbb{R}^k$ heißt eine LÖSUNG der gDgl, wenn das Intervall J im Intervall I enthalten ist und wenn für alle $x \in J$ gilt

$$\mathbf{y}^{(n)}(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x), \dots, \mathbf{y}^{(n-1)}(x)).$$

Unter einem ANFANGSWERTPROBLEM kurz AWP verstehen wir eine gDgl n -ter Ordnung wie oben angegeben zusammen mit n Bedingungen der Form

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{y}(x_0) & = & \mathbf{y}_0 \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{y}^{(n-1)}(x_0) & = & \mathbf{y}_{n-1} \end{array}$$

Dabei sind $x_0 \in I$ und $\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_{n-1} \in \mathbb{R}^k$ ein gegebener Anfangspunkt und gegebene Anfangswerte.

Eine Funktion \mathbf{y} heißt eine LÖSUNG des AWP, wenn es positive Zahlen ε_1 und ε_2 gibt, so dass \mathbf{y} auf $(x_0 - \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_2)$ n -mal differenzierbar ist, dort die gDgl löst und die Anfangsbedingungen erfüllt.

BEISPIEL X.1.1. Wir betrachten eine Population bestehend aus einer Beute und einem Räuber. Die Größe der Beute- bzw. Räuberpopulation zur Zeit t sei $x(t)$ bzw. $y(t)$. Die Beute habe eine konstante Vermehrungsrate und eine Sterberate, die proportional zur Größe der Räuberpopulation ist. Die Räuber haben eine konstante Sterberate und eine Wachstumsrate, die proportional zur Größe der Beutepopulation

ist. Dann genügen x, y der gDgl

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha x - \beta xy \\ \dot{y} &= -\gamma y + \delta xy\end{aligned}$$

mit positiven Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Zur Zeit $t = 0$ erfüllen sie die Anfangsbedingung

$$\begin{aligned}x(0) &= x_0, \\ y(0) &= y_0.\end{aligned}$$

X.1.2. Reduktion der Ordnung. Ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen der Ordnung n im \mathbb{R}^k kann stets auf ein System erster Ordnung im \mathbb{R}^{nk} reduziert werden. Dazu definiert man für

$$\mathbf{y}^{(n)} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{y}^{(n-1)})$$

die vektorwertige Funktion $\mathbf{z} : I \rightarrow \mathbb{R}^{nk}$ durch

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{y}' \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

und die Funktion $\mathbf{F} : I \times \mathbb{R}^{nk} \rightarrow \mathbb{R}^{nk}$ durch

$$\mathbf{F}(x, \mathbf{z}) = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{z}_{n-1} \\ \mathbf{f}(x, \mathbf{z}) \end{pmatrix}.$$

Dabei bezeichnet \mathbf{z}_j die Komponenten $jk + 1, \dots, (j + 1)k$ von \mathbf{z} . Dann ist $\mathbf{y} : J \rightarrow \mathbb{R}^k$ genau dann eine Lösung der gDgl

$$\mathbf{y}^{(n)} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{y}^{(n-1)}),$$

wenn $\mathbf{z} : J \rightarrow \mathbb{R}^{nk}$ eine Lösung der gDgl

$$\mathbf{z}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{z})$$

ist.

Wegen dieser Reduktion der Ordnung können wir uns bei den theoretischen Ergebnissen der folgenden Abschnitte auf gDglen erster Ordnung beschränken. Für die praktische Rechnung ist es aber nicht immer empfehlenswert eine gDgl n -ter Ordnung auf ein entsprechendes System 1-ter Ordnung zu transformieren.

BEISPIEL X.1.2. Die Schwingungsgleichung

$$\ddot{x} + r\dot{x} + \omega^2 x = f(t)$$

geht mit

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$$

in das System erster Ordnung

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}} &= \begin{pmatrix} y_2 \\ f(t) - ry_2 - \omega^2 y_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -r \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

über.

X.1.3. Lipschitz-stetige Funktionen. Für den Existenz- und Eindeutigkeitssatz des nächsten Abschnittes benötigen wir den Begriff der Lipschitz-Stetigkeit. Dazu bezeichnen $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $\mathbf{f} : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion.

DEFINITION X.1.3. (1) Die Funktion $\mathbf{f} : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt GLEICHMÄSSIG LIPSCHITZ-STETIG (bzgl. U) auf $I \times U$, wenn es eine Zahl $L \geq 0$ gibt mit

$$\|\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(x, \mathbf{z})\| \leq L \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| \quad \text{für alle } x \in I, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in U.$$

Dabei bezeichnet $\|\cdot\|$ irgendeine Norm auf \mathbb{R}^n . Die kleinst mögliche Zahl $L \geq 0$, für die die obige Abschätzung gilt, heißt die LIPSCHITZ-KONSTANTE von \mathbf{f} .

(2) Die Funktion $\mathbf{f} : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt LIPSCHITZ-STETIG (bzgl. U) auf $I \times U$, wenn es zu jedem $\mathbf{y}_0 \in U$ eine offene Menge $V \subset U$ gibt mit $\mathbf{y}_0 \in V$, so dass \mathbf{f} auf $I \times V$ gleichmäßig Lipschitz-stetig ist.

Eine Lipschitz-stetige Funktion ist immer stetig. Die Umkehrung gilt nicht, wie das folgende Beispiel zeigt.

BEISPIEL X.1.4. Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(y) = \sqrt{|y|}$$

ist stetig, aber nicht Lipschitz-stetig. Denn andernfalls, müsste es ein $\varepsilon > 0$ und ein $L \geq 0$ geben mit

$$|f(y) - f(0)| \leq L|y - 0| \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R} \text{ mit } |y| \leq \varepsilon.$$

Dies ist aber äquivalent dazu, dass der Differenzenquotient

$$\frac{|f(y) - f(0)|}{|y - 0|}$$

in einer Umgebung der Null beschränkt ist. Aber die Folge

$$\frac{|f(\frac{1}{n}) - f(0)|}{|\frac{1}{n} - 0|} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = \sqrt{n}$$

ist unbeschränkt.

Die Beobachtung aus obigem Beispiel gilt allgemein: Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig, wenn der Differenzenquotient

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

für alle $x, y \in I$, $x \neq y$ beschränkt ist. Dies ist sicher dann der Fall, wenn f auf I differenzierbar ist. Allgemein gilt:

Ist $\mathbf{f} : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ bzgl. der zweiten Variablen differenzierbar, so ist \mathbf{f} Lipschitz-stetig.

X.1.4. Der Satz von Picard-Lindelöf. Wie Beispiel VI.1.6 (S. 216, Teil I) zeigt, gibt es AWP mit mehreren Lösungen. Dies liegt an der fehlenden Lipschitz-Stetigkeit der dortigen Funktion f (vgl. Beispiel X.1.4).

SATZ VON PICARD-LINDELÖF: Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $\mathbf{f} : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig. Dann gibt es zu jedem $x_0 \in I$ und jedem $\mathbf{y}_0 \in U$ ein $\varepsilon > 0$, so dass das AWP

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)) \quad \text{für alle } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

$$\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$$

eine eindeutige Lösung besitzt.

BEWEISIDEE. Offensichtlich ist $\mathbf{y} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ genau dann ein Lösung des AWP, wenn für alle $x \in I$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(x) - \mathbf{y}_0 &= \mathbf{y}(x) - \mathbf{y}(x_0) \\ &= \int_{x_0}^x \mathbf{y}'(t) dt \\ &= \int_{x_0}^x \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) dt. \end{aligned}$$

Durch geeignete Wahl von $\varepsilon > 0$ und einer offenen Menge $V \subset U$ mit $\mathbf{y}_0 \in V$ kann man erreichen, dass \mathbf{f} auf $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \times V$ gleichmäßig Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante L und dass $L\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ gilt. Bezeichne mit X die Menge aller stetigen Funktionen auf $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ mit Werten in V . X ist ein normierter Vektorraum mit der Norm

$$\|\mathbf{y}\|_X = \max_{|x-x_0| \leq \varepsilon} |\mathbf{y}(x)|,$$

wobei $|\cdot|$ die Euklidische Norm auf \mathbb{R}^n ist. Auf X definiert man eine Abbildung Φ durch

$$\Phi(\mathbf{y})(x) = \mathbf{y}_0 + \int_{x_0}^x \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) dt.$$

Dann ist \mathbf{y} genau dann eine Lösung des AWP, wenn \mathbf{y} ein Fixpunkt von Φ ist, d.h.

$$\Phi(\mathbf{y}) = \mathbf{y}.$$

Wegen der Lipschitz-Stetigkeit von \mathbf{f} erhält man für je zwei Funktionen $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\Phi(\mathbf{y}) - \Phi(\mathbf{z})\|_X &= \max_{|x-x_0| \leq \varepsilon} \left| \int_{x_0}^x \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) - \mathbf{f}(t, \mathbf{z}(t)) dt \right| \\ &\leq \max_{|x-x_0| \leq \varepsilon} \left| \int_{x_0}^x \underbrace{|\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) - \mathbf{f}(t, \mathbf{z}(t))|}_{\leq L|\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}(t)|} dt \right| \\ &\leq \max_{|x-x_0| \leq \varepsilon} \left| \int_{x_0}^x \underbrace{L|\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}(t)|}_{\leq \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_X} dt \right| \\ &\leq L|x - x_0| \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_X \\ &\leq L\varepsilon \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_X \\ &\leq \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_X. \end{aligned}$$

Dies besagt, dass Φ eine KONTRAKTION ist. Wir bezeichnen nun mit \mathbf{z}_0 die Funktion, die konstant gleich \mathbf{y}_0 ist, und definieren die Folge $(\mathbf{z}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch

$$\mathbf{z}_{i+1} = \Phi(\mathbf{z}_i) \quad i = 0, 1, \dots$$

Da Φ eine Kontraktion ist, kann man zeigen, dass die Folge $(\mathbf{z}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen ein $\mathbf{y} \in X$ konvergiert und dass diese Funktion der eindeutige Fixpunkt von Φ und damit die eindeutige Lösung des AWP ist. \square

Aus der Lipschitz-Stetigkeit folgt auch die stetige Abhängigkeit der Lösung einer AWP von den Anfangswerten:

STETIGE ABHÄNGIGKEIT VON DEN ANFANGSWERTEN:
Die Funktion $\mathbf{f} : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei gleichmäßig Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L . Dann gilt für jedes $x_0 \in I$ und je zwei Lösungen $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ der gDgl

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$$

die Abschätzung

$$|\mathbf{y}_1(x) - \mathbf{y}_2(x)| \leq |\mathbf{y}_1(x_0) - \mathbf{y}_2(x_0)| e^{L|x-x_0|}$$

für alle $x \in I$.

X.2. Differentialgleichungen 1. Ordnung

X.2.1. Exakte Differentialgleichungen. Wir betrachten Differentialgleichungen der Form

$$a(x, y) + b(x, y)y' = 0.$$

Dabei sind $a, b : G \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen auf einer offenen, sternförmigen Menge $G \subset \mathbb{R}^2$. Diese gDgl heißt EXAKT, wenn das Vektorfeld

$$\mathbf{v} : G \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (a(x, y), b(x, y))^T$$

ein Gradientenfeld ist, d.h. wenn es eine Stammfunktion $U : G \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$a = U_x, \quad b = U_y.$$

Da G sternförmig ist, ist gemäß Abschnitt IX.2.4 (S. 87) die gDgl exakt, wenn gilt

$$a_y = b_x.$$

Falls die gDgl exakt und U eine Stammfunktion ist, ist die gDgl wegen der Kettenregel äquivalent zu

$$0 = \frac{d}{dx}U(x, y(x)) = U_x + U_y y'.$$

Also ist jede Lösung der gDgl eine Niveaulinie

$$\{(x, y) : U(x, y) = c\}$$

der Stammfunktion. Für eine gegebene Anfangsbedingung

$$y(x_0) = y_0$$

ist die Konstante c durch

$$U(x_0, y_0) = c$$

bestimmt. Falls $U_y(x_0, y_0) \neq 0$ ist, kann wegen des Satzes über implizite Funktionen (vgl. Abschnitt VIII.3.5 (S. 53)) die Gleichung

$$U(x, y) = U(x_0, y_0)$$

in einer Umgebung von x_0 nach y aufgelöst werden.

Insgesamt erhalten wir somit:

Lösung der gDgl

$$a(x, y) + b(x, y)y' = 0.$$

(1) Teste auf Exaktheit, d.h. gilt

$$a_y = b_x?$$

(2) Falls die gDgl exakt ist, bestimme eine Stammfunktion U , d.h. eine Funktion U mit

$$a = U_x, \quad b = U_y.$$

(3) Für $c \in \mathbb{R}$ löse die Gleichung

$$U(x, y) = c$$

nach y auf.

(4) Bei vorgegebenen Anfangsbedingungen $y(x_0) = y_0$ ist

$$c = U(x_0, y_0).$$

BEISPIEL X.2.1. Betrachte das AWP

$$\begin{aligned} 2xy + (2y + x^2)y' &= 0 \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} a(x, y) &= 2xy, \\ b(x, y) &= 2y + x^2 \end{aligned}$$

und

$$a_y = 2x = b_x.$$

Also ist die gDgl exakt. Zur Bestimmung einer Stammfunktion U gehen wir wie in Abschnitt IX.2.5 (S. 90) vor. Unbestimmte Integration von a liefert

$$U(x, y) = x^2y + c(y).$$

Einsetzen in die Bedingung $U_y = b$ ergibt

$$\begin{aligned} x^2 + c'(y) &= 2y + x^2 \\ \implies c'(y) &= 2y \\ \implies c(y) &= y^2 + \gamma. \end{aligned}$$

Also ist

$$U(x, y) = x^2y + y^2$$

eine Stammfunktion. Wegen $U(0, 1) = 1$ ist die Lösung des AWP gegeben durch die Gleichung

$$x^2y(x) + y(x)^2 = 1.$$

Die quadratische Gleichung (für y !)

$$y^2 + x^2y = 1$$

hat die Lösungen

$$y_{1,2} = -\frac{1}{2}x^2 \pm \sqrt{\frac{1}{4}x^4 + 1}.$$

Also sind

$$y_{1,2}(x) = \frac{1}{2}(-x^2 \pm \sqrt{x^4 + 4})$$

Kandidaten für die Lösung des AWP. Wegen der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ kommt nur die Lösung

$$y(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{x^4 + 4} - x^2)$$

in Frage.

X.2.2. Der integrierende Faktor. Wir betrachten wieder eine gDgl der Form

$$a(x, y) + b(x, y)y' = 0,$$

interessieren uns aber für den Fall, dass die gDgl nicht exakt ist, d.h. $a_y \neq b_x$. Manchmal gibt es eine Funktion $M : G \rightarrow \mathbb{R}$, so dass die gDgl

$$M(x, y)a(x, y) + M(x, y)b(x, y)y' = 0$$

exakt ist. Falls $M(x, y) \neq 0$ ist für alle $(x, y) \in G$, hat diese exakte gDgl die gleiche Lösungsmenge wie die ursprüngliche gDgl, und wir können die Methoden des vorigen Abschnittes anwenden. Eine Funktion M der beschriebenen Art heißt **INTEGRIERENDER FAKTOR**.

Aus der Bedingung, dass die neue gDgl exakt sein soll, ergibt sich eine partielle Differentialgleichung für M :

$$\begin{aligned} & (aM)_y = (bM)_x \\ \iff & a_y M + aM_y = b_x M + bM_x \\ \iff & bM_x - aM_y = (a_y - b_x)M. \end{aligned}$$

Diese partielle Differentialgleichung für M ist im allgemeinen schwerer zu lösen als die ursprüngliche gDgl. Manchmal hat man aber Glück und kann eine Lösung M „raten“. „Bewährte“ Kandidaten hierfür sind von der Form

$$\begin{array}{ll} m(x), & m(y), \\ m(x+y), & m(x-y), \\ m(x^2+y^2), & m(x^2-y^2), \\ m(x \cdot y) & \end{array}$$

mit einer Funktion $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

BEISPIEL X.2.2. Betrachte die gDgl

$$x^2y^3 + y + (x^3y^2 - x)y' = 0.$$

Es ist

$$\begin{aligned} a(x, y) &= x^2y^3 + y, \\ b(x, y) &= x^3y^2 - x. \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} a_y &= 3x^2y^2 + 1, \\ b_x &= 3x^2y^2 - 1 \end{aligned}$$

ist die gDgl nicht exakt. Auf der Suche nach einem integrierenden Faktor machen wir den Ansatz $M(x, y) = m(xy)$. Die partielle Differentialgleichung für M hat dann die Form

$$\begin{aligned} 2m &= (a_y - b_x)M \\ &= bM_x - aM_y \\ &= (x^3y^2 - x)ym' - (x^2y^3 + y)xm' \\ &= -2xym'. \end{aligned}$$

Mit $u = xy$ geht dies über in die gDgl

$$-\frac{1}{u}m = m'$$

mit der Lösung (Trennung der Variablen!)

$$m(u) = \frac{1}{u}.$$

Also ist

$$M(x, y) = \frac{1}{xy}$$

ein integrierender Faktor. Die neue gDgl lautet

$$xy^2 + \frac{1}{x} + (x^2y - \frac{1}{y})y' = 0.$$

Für die Stammfunktion U erhalten wir

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int (xy^2 + \frac{1}{x})dx + c(y) \\ &= \frac{1}{2}x^2y^2 + \ln(x) + c(y). \end{aligned}$$

Einsetzen in die Gleichung

$$U_y = x^2y - \frac{1}{y}$$

ergibt

$$\begin{aligned} x^2y + c'(y) &= U_y \\ &= x^2y - \frac{1}{y} \\ \implies c'(y) &= -\frac{1}{y} \\ \implies c(y) &= -\ln(y) + c. \end{aligned}$$

Also ist

$$U(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + \ln\left(\frac{x}{y}\right) + c,$$

und die allgemeine Lösung y unserer gDgl ist implizit gegeben durch die Gleichung

$$\frac{1}{2}x^2y^2 + \ln\left(\frac{x}{y}\right) = c.$$

BEISPIEL X.2.3. Wir betrachten das Räuber-Beute Modell aus Beispiel X.1.1 (S. 127)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x - \beta xy && \text{Beute} \\ \dot{y} &= -\gamma y + \delta xy && \text{Räuber.} \end{aligned}$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit $y(-\gamma + \delta x)$ und die zweite Gleichung mit $x(\alpha - \beta y)$ und subtrahieren die Ergebnisse. Das liefert

$$(-\gamma + \delta x)y\dot{x} - (\alpha - \beta y)x\dot{y} = 0.$$

Das Vektorfeld

$$\mathbf{v}(x, y) = \begin{pmatrix} y(-\gamma + \delta x) \\ -x(\alpha - \beta y) \end{pmatrix}$$

ist wegen

$$\mathbf{v}_{1,y} = -\gamma + \delta x \neq -\alpha + \beta y = \mathbf{v}_{2,x}$$

kein Gradientenfeld. Für das Vektorfeld

$$\mathbf{w}(x, y) = \frac{1}{xy}\mathbf{v}(x, y)$$

erhalten wir dagegen

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{1,y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\gamma}{x} + \delta\right) \\ &= 0 \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\alpha}{y} + \beta\right) \\ &= \mathbf{w}_{2,x}. \end{aligned}$$

Also ist \mathbf{w} ein Gradientenfeld. Eine Stammfunktion ist

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int \left(\delta - \frac{\gamma}{x}\right) dx + c(y) \\ &= \delta x - \gamma \ln x + c(y). \end{aligned}$$

Einsetzen in

$$U_y = -\frac{\alpha}{y} + \beta$$

ergibt

$$\begin{aligned} c'(y) &= -\frac{\alpha}{y} + \beta \\ \implies c(y) &= -\alpha \ln y + \beta y. \end{aligned}$$

Also sind die Lösungen $(x(t), y(t))$ des Räuber-Beute Modells Niveaulinien der Form

$$U(x, y) = \delta x - \gamma \ln x - \alpha \ln y + \beta y = c.$$

Da die Exponentialfunktion bijektiv ist, können wir statt U auch die Funktion $F = \exp \circ (-U)$ betrachten und erhalten die Niveaulinien

$$\frac{x^\gamma}{e^{\delta x}} \cdot \frac{y^\alpha}{e^{\beta y}} = c.$$

Dies sind eiförmige Kurven im ersten Quadranten. Ist

$$\begin{aligned} x(0) &= \frac{\gamma}{\delta} \\ y(0) &= \frac{\alpha}{\beta}, \end{aligned}$$

so ist die Lösung $(x(t), y(t))$ konstant. Andernfalls liegt sie auf der Niveaulinie mit passendem c .

Man kann zeigen, dass die Lösung periodisch ist, d.h. es gibt ein $T > 0$ mit

$$\begin{aligned} x(t+T) &= x(t) \\ y(t+T) &= y(t) \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Die mittlere Populationsgröße über eine Periode T ist

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt && \text{Beute} \\ \bar{y} &= \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt && \text{Räuber.} \end{aligned}$$

Man kann diese Größen bestimmen, ohne die Periode T und die Lösung $(x(t), y(t))$ explizit zu kennen. Dazu dividiert man die Beutegleichung durch x und integriert von 0 bis T . Dies liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \ln x(T) - \ln x(0) && \left| \text{wegen } x(T) = x(0) \right. \\ &= \int_0^T \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} dt \\ &= \int_0^T \alpha - \beta y(t) dt \\ &= \alpha T - \beta \int_0^T y(t) dt \\ &= \alpha T - \beta T \bar{y}. \end{aligned}$$

Also ist

$$\bar{y} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Verfährt man analog mit der Räubergleichung, erhält man

$$\bar{x} = \frac{\gamma}{\delta}.$$

Die mittlere Populationsgröße der Beute (des Räubers) hängt also nur vom Verhältnis der Wachstums- zur Sterberate des Räubers (der Beute) ab.

Dies hat interessante Konsequenzen. Wollen wir z.B. die Beute durch ein Gift, das auch für den Räuber schädlich ist, reduzieren, müssen wir α durch $\alpha - \varepsilon$ und γ durch $\gamma + \varepsilon$ ersetzen. Für die mittlere Populationsgröße erhalten wir dann

$$\bar{x} = \frac{\gamma + \varepsilon}{\delta}$$

$$\bar{y} = \frac{\alpha - \varepsilon}{\delta}.$$

Unsere Maßnahme ist also kontraproduktiv: die mittlere Größe der Beutepopulation nimmt sogar zu.

X.3. Systeme linearer Differentialgleichungen

X.3.1. Grundlegende Eigenschaften. Wir betrachten Systeme gDglen der Form

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{f}(x).$$

Dabei sind $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ eine matrixwertige und $\mathbf{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine vektorwertige Funktion auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Obige gDgl heißt HOMOGEN, falls $\mathbf{f} = 0$ ist, andernfalls heißt sie INHOMOGEN.

Da die Zuordnung $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{y}' - A(x)\mathbf{y}$ linear ist, gelten die gleichen Beobachtungen wie in Abschnitt VI.3.1 (S. 229, Teil I):

- Sind \mathbf{y}_1 und \mathbf{y}_2 zwei Lösungen der inhomogenen gDgl, so ist $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2$ eine Lösung der homogenen gDgl.
- Ist \mathbf{y}_p eine partikuläre Lösung der inhomogenen gDgl und \mathbf{y}_h die allgemeine Lösung der homogenen gDgl, so ist $\mathbf{y}_p + \mathbf{y}_h$ die allgemeine Lösung der inhomogenen gDgl.
- Sind \mathbf{y}_1 und \mathbf{y}_2 zwei Lösungen der homogenen gDgl und α_1, α_2 reelle Zahlen, so ist $\alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2$ auch eine Lösung der homogenen gDgl.

Wegen dieser Beobachtungen gehen wir bei der Lösung obiger gDgl wie in Abschnitt VI.3:

Wir bestimmen separat die allgemeine Lösung der homogenen gDgl und eine partikuläre Lösung der inhomogenen gDgl und setzen daraus die allgemeine Lösung der inhomogenen gDgl zusammen.

X.3.2. Fundamentalsysteme. Wir betrachten die homogene lineare gDgl

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$$

mit $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$. Wie im vorigen Abschnitt bemerkt, ist die Lösungsmenge dieser gDgl ein Vektorraum. Wir behaupten, dass dieser Vektorraum die Dimension n hat. Zum Nachweis dieser Behauptung gehen wir wie folgt vor.

Die Abbildung $F : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$F(x, \mathbf{z}) = A(x)\mathbf{z}$$

ist linear und damit Lipschitz-stetig. Daher besitzt das AWP

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' &= A(x)\mathbf{y} \\ \mathbf{y}(x_0) &= \mathbf{y}_0 \end{aligned}$$

zu jedem $x_0 \in I$ und jedem $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung. Wir halten im Folgenden x_0 fest. Zu den Anfangswerten $\mathbf{y}_0 = \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{y}_0 = \mathbf{e}_n$ erhalten wir dann jeweils eine eindeutige Lösung $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$, d.h.

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'_i &= A(x)\mathbf{y}_i \\ \mathbf{y}_i(x) &= \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

für $i = 1, \dots, n$. Dabei sind $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ die kanonischen Einheitsvektoren des \mathbb{R}^n . Offensichtlich sind die Vektoren $\mathbf{y}_1(x_0), \dots, \mathbf{y}_n(x_0)$ linear unabhängig.

Wir nehmen nun an, dass sie für ein $x_1 \neq x_0$ linear abhängig seien. Dann gibt es Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ mit

$$\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0$$

und

$$\alpha_1 \mathbf{y}_1(x_1) + \dots + \alpha_n \mathbf{y}_n(x_1) = \mathbf{0}.$$

Setze

$$\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{y}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{y}_n.$$

Dann löst \mathbf{u} das AWP

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= A(x)\mathbf{u} \\ \mathbf{u}(x_1) &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Da dieses AWP die eindeutige Lösung $\mathbf{0}$ hat, folgt $\mathbf{u}(x) = \mathbf{0}$ für alle $x \in I$. Insbesondere folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x_0) = \mathbf{0} &\implies \mathbf{0} = \alpha_1 \mathbf{y}_1(x_0) + \dots + \alpha_n \mathbf{y}_n(x_0) \\ &= \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n. \end{aligned}$$

Also ist $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Dies ist ein Widerspruch. Daher sind die Vektoren $\mathbf{y}_1(x), \dots, \mathbf{y}_n(x)$ für alle $x \in I$ linear unabhängig.

Hieraus folgt, dass der Lösungsraum mindestens die Dimension n hat.

Um zu zeigen, dass die Dimension gleich n ist, müssen wir jede beliebige Lösung \mathbf{y} der gDgl als Linearkombination von $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ darstellen können. Sei also \mathbf{y} irgendeine Lösung der gDgl. Da $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ eine Basis des \mathbb{R}^n ist, gibt es dann Zahlen β_1, \dots, β_n mit

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(x_0) &= \beta_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \beta_n \mathbf{e}_n \\ &= \beta_1 \mathbf{y}_1(x_0) + \dots + \beta_n \mathbf{y}_n(x_0).\end{aligned}$$

Setze

$$\mathbf{v} = \beta_1 \mathbf{y}_1 + \dots + \beta_n \mathbf{y}_n$$

und

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{y}.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}\mathbf{w}' &= A\mathbf{w} \\ \mathbf{w}(x_0) &= 0\end{aligned}$$

Da dieses AWP die eindeutige Lösung $\mathbf{w} = 0$ hat, folgt

$$\mathbf{y} = \beta_1 \mathbf{y}_1 + \dots + \beta_n \mathbf{y}_n.$$

Das war zu zeigen.

Wir fassen zusammen:

Die Lösungsmenge der gDgl

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$$

ist ein n -dimensionaler Vektorraum. Eine Basis wird von den Lösungen $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ der AWPe

$$\mathbf{y}'_i = A(x)\mathbf{y}_i$$

$$\mathbf{y}_i(x_0) = \mathbf{e}_i$$

mit $i = 1, \dots, n$ gebildet.

Jede Basis des Lösungsraumes nennt man ein FUNDAMENTALSISTEM für die homogene gDgl. Obige Überlegungen zeigen, wie man ein Fundamentalsystem konstruieren kann.

Ist $\mathbf{y}_1(x), \dots, \mathbf{y}_n(x)$ ein Fundamentalsystem für die homogene gDgl, so ist die Determinante

$$W(x) = \det(\mathbf{y}_1(x), \dots, \mathbf{y}_n(x))$$

für alle $x \in I$ von Null verschieden. W heißt die WRONSKI-DETERMINANTE des Fundamentalsystems. Man kann die Wronski-Determinante

bestimmen, ohne das Fundamentalsystem explizit zu kennen. Man kann nämlich zeigen, dass für beliebiges $x_0 \in I$ gilt

$$W(x) = W(x_0) \exp \left(\int_{x_0}^x \text{Spur } A(s) ds \right)$$

mit

$$\text{Spur } A(s) = A_{11}(s) + A_{22}(s) + \dots + A_{nn}(s).$$

X.3.3. Variation der Konstanten. Wir wollen eine partikuläre Lösung der inhomogenen gDgl

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{f}(x)$$

bestimmen. Dazu gehen wir ähnlich wie in Abschnitt VI.2.2 (S. 221, Teil I) vor. Sei $\mathbf{y}_1(x), \dots, \mathbf{y}_n(x)$ ein Fundamentalsystem für die homogene Gleichung. Die Matrix

$$Y(x) = (\mathbf{y}_1(x), \dots, \mathbf{y}_n(x))$$

ist dann für alle $x \in I$ regulär. Wir machen nun den Ansatz

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_p(x) &= c_1(x)\mathbf{y}_1(x) + \dots + c_n(x)\mathbf{y}_n(x) \\ &= Y(x)\mathbf{c}(x) \end{aligned}$$

mit unbestimmten Funktionen $c_1, \dots, c_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ und

$$\mathbf{c}(x) = (c_1(x), \dots, c_n(x))^T.$$

Setzen wir diesen Ansatz in die inhomogene gDgl ein und beachten, dass $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ die homogene gDgl lösen, erhalten wir die Bedingung

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{y}'_p - A(x)\mathbf{y}_p - \mathbf{f}(x) \\ &= \sum_{i=1}^n \{c_i(x) \underbrace{\mathbf{y}'_i(x)}_{=A(x)\mathbf{y}_i(x)} + c'_i(x)\mathbf{y}_i(x)\} \\ &\quad - \sum_{i=1}^n c_i(x)A(x)\mathbf{y}_i(x) - \mathbf{f}(x) \\ &= \sum_{i=1}^n c'_i(x)\mathbf{y}_i(x) - \mathbf{f}(x) \\ &= Y(x)\mathbf{c}'(x) - \mathbf{f}(x). \end{aligned}$$

Da $Y(x)$ regulär ist, folgt

$$\mathbf{c}'(x) = Y(x)^{-1}\mathbf{f}(x).$$

Diese gDgl für \mathbf{c} kann durch komponentenweise Integration gelöst werden. Dies liefert die gesuchte partikuläre Lösung.

BEISPIEL X.3.1. Wir betrachten die gDgl

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

Gemäß Beispiel X.3.2 (S. 144) in Abschnitt X.3.4 (s.u.) ist

$$\mathbf{y}_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{y}_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem für die homogene gDgl. (Prüft man hier durch Einsetzen nach!) Es ist

$$Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{4x} \\ e^{2x} & -e^{4x} \end{pmatrix}$$

$$\implies Y(x)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-2x} \\ e^{-4x} & -e^{-4x} \end{pmatrix}.$$

Damit lautet die gDgl für \mathbf{c}

$$\mathbf{c}'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-2x}(x+x^2) \\ e^{-4x}(x-x^2) \end{pmatrix}.$$

In einer Nebenrechnung erhalten wir durch partielle Integration für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $k \in \mathbb{N}^*$

$$\int e^{ax} x^k dx = \frac{1}{a} e^{ax} x^k - \frac{k}{a} \int e^{ax} x^{k-1} dx.$$

Damit ergibt sich

$$\mathbf{c}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-2x}[-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}] + e^{-2x}[-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}] \\ e^{-4x}[-\frac{1}{4}x - \frac{1}{16}] - e^{-4x}[-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}] \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-2x}[-\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}] \\ e^{-4x}[\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}] \end{pmatrix}.$$

Als partikuläre Lösung erhalten wir somit

$$\mathbf{y}_p(x) = Y(x)\mathbf{c}(x)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}x^2 - \frac{9}{8}x - \frac{17}{32} \\ -\frac{3}{4}x^2 - \frac{7}{8}x - \frac{15}{32} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{64} \begin{pmatrix} 8x^2 + 36x + 17 \\ 24x^2 + 28x + 15 \end{pmatrix}.$$

X.3.4. Homogene Systeme mit konstanter Matrix: Der symmetrische Fall. Wir betrachten die gDgl

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$$

mit einer symmetrischen Matrix A , d.h. $A^T = A$. Gemäß Abschnitt II.4.8 (S. 87, Teil I) besitzt A genau n reelle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, wobei Eigenwerte gemäß ihrer Vielfachheit gezählt werden, mit zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$, die normiert und paarweise orthogonal sind, d.h.

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i = 1$$

für $i = 1, \dots, n$, und

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j = 0$$

für $i \neq j$. Setze

$$U = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n).$$

U ist orthogonal, d.h.

$$U^T U = U U^T = I.$$

Zur Bestimmung einer Lösung \mathbf{y} der gDgl setzen wir

$$\mathbf{z} = U^T \mathbf{y}.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{z}' &= U^T \mathbf{y}' \\ &= U^T A \mathbf{y} \\ &= U^T A \underbrace{U U^T}_{=I} \mathbf{y} \\ &= U^T A U \mathbf{z} \\ &= D \mathbf{z} \end{aligned}$$

mit

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Die gDgl für \mathbf{z} besitzt offensichtlich das Fundamentalsystem

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1 &= e^{\lambda_1 x} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{z}_2 &= e^{\lambda_2 x} \mathbf{e}_2 \\ &\vdots \\ \mathbf{z}_n &= e^{\lambda_n x} \mathbf{e}_n. \end{aligned}$$

Wegen

$$U \mathbf{e}_i = \mathbf{u}_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

ergibt sich hieraus das Fundamentalsystem

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1 &= e^{\lambda_1 x} \mathbf{u}_1 \\ &\vdots \\ \mathbf{y}_n &= e^{\lambda_n x} \mathbf{u}_n \end{aligned}$$

für die ursprüngliche gDgl.

Wir fassen zusammen:

Bestimmung eines Fundamentalsystems für die gDgl

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$$

mit einer symmetrischen Matrix A :

- (1) Bestimme alle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von A (mit Berücksichtigung der Vielfachheit) und dazu gehörige normierte, paarweise orthogonale Eigenvektoren $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$.
- (2) Das Fundamentalsystem ist

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1 &= e^{\lambda_1 x} \mathbf{u}_1 \\ &\vdots \\ \mathbf{y}_n &= e^{\lambda_n x} \mathbf{u}_n \end{aligned}$$

BEISPIEL X.3.2. Wir betrachten die gDgl

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$$

Das charakteristische Polynom von A lautet

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ -1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} &= (\lambda - 3)^2 - 1 \\ &= (\lambda - 3 - 1)(\lambda - 3 + 1) \\ &= (\lambda - 4)(\lambda - 2). \end{aligned}$$

Also hat A die Eigenwerte 2 und 4. Die Bestimmungsgleichung für einen Eigenvektor zum Eigenwert 2 lautet

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u} = 0 \implies \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Bestimmungsgleichung für einen Eigenvektor zum Eigenwert 4 ist

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{v} = 0 \implies \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Das Fundamentalsystem lautet daher (vgl. Beispiel X.3.1 (S. 142))

$$\mathbf{y}_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{y}_2(x) = \frac{1}{2} e^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

X.3.5. Homogene Systeme mit konstanter Matrix: Der allgemeine Fall. Wir betrachten die gDgl

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$$

mit einer nicht symmetrischen Matrix A .

Im Vergleich zum vorigen Abschnitt treten jetzt zwei Probleme auf:

- Die Matrix A hat i.a. komplexe Eigenwerte.
- Die Matrix A ist u.U. nicht diagonalisierbar, d.h. sie besitzt Eigenwerte, deren algebraische Vielfachheit größer ist als ihre geometrische Vielfachheit.

Das erste Problem lösen wir, indem wir wie in Abschnitt VI.3.2 (S. 229, Teil I) auch komplexe Lösungen betrachten. Bei dem zweiten Problem hilft uns das Konzept der Hauptvektoren aus Abschnitt II.4.10 (S. 89, Teil I).

Sei dazu $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A und $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ ein zugehöriger Hauptvektor der Stufe ℓ , $\ell \geq 1$, d.h.

$$(A - \lambda I)^\ell \mathbf{v} = 0,$$

$$(A - \lambda I)^{\ell-1} \mathbf{v} \neq 0.$$

Wegen

$$\frac{d}{dx} e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$$

liefert Einsetzen von

$$\mathbf{y}(t) = e^{\lambda x} \left[\mathbf{v} + x(A - \lambda I)\mathbf{v} + \frac{x^2}{2!} (A - \lambda I)^2 \mathbf{v} + \dots \right. \\ \left. + \frac{x^{\ell-1}}{(\ell-1)!} (A - \lambda I)^{\ell-1} \mathbf{v} \right]$$

in die gDgl

$$\mathbf{y}' - A\mathbf{y} = \lambda e^{\lambda x} \left[\mathbf{v} + x(A - \lambda I)\mathbf{v} + \dots + \frac{x^{\ell-1}}{(\ell-1)!} (A - \lambda I)^{\ell-1} \mathbf{v} \right] \\ + e^{\lambda x} \left[(A - \lambda I)\mathbf{v} + \dots + \frac{x^{\ell-2}}{(\ell-2)!} (A - \lambda I)^{\ell-1} \mathbf{v} \right] \\ - e^{\lambda x} \left[A\mathbf{v} + xA(A - \lambda I)\mathbf{v} + \dots + \frac{x^{\ell-1}}{(\ell-1)!} A(A - \lambda I)^{\ell-1} \mathbf{v} \right] \\ = e^{\lambda x} [(\lambda I - A)\mathbf{v} + x(\lambda I - A)(A - \lambda I)\mathbf{v} +$$

$$\begin{aligned}
& \dots + \frac{x^{\ell-1}}{(\ell-1)!}(\lambda I - A)(A - \lambda I)^{\ell-1}\mathbf{v}] \\
& + e^{\lambda x}[(A - \lambda I)\mathbf{v} + \dots + \frac{x^{\ell-2}}{(\ell-2)!}(A - \lambda I)^{\ell-1}\mathbf{v}] \\
& = -e^{\lambda x} \frac{x^{\ell-1}}{(\ell-1)!}(A - \lambda I)^{\ell}\mathbf{v} \\
& = 0.
\end{aligned}$$

Also ist \mathbf{y} eine Lösung der gDgl.

Da gemäß Abschnitt II.4.10 (S. 89, Teil I) eine Basis des \mathbb{C}^n existiert, die aus lauter Hauptvektoren von A besteht, erhalten wir ein Fundamentalsystem *komplexer* Lösungen, wenn wir zu jedem dieser Hauptvektoren und dem entsprechenden Eigenwert obige Konstruktion durchführen.

Das charakteristische Polynom $\det(A - \lambda I)$ hat lauter reelle Koeffizienten. Damit ist mit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ auch $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert und beide haben die gleiche algebraische Vielfachheit. Bezeichne mit m die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes λ und mit

$$\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$$

und

$$\tilde{\mathbf{y}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{y}}_m$$

die mit obiger Konstruktion gewonnenen Lösungen der gDgl zu den Eigenwerten λ und $\bar{\lambda}$ und den zugehörigen Hauptvektoren. Dann kann man zeigen, dass

$$\operatorname{Re} \mathbf{y}_1, \operatorname{Im} \mathbf{y}_1, \dots, \operatorname{Re} \mathbf{y}_m, \operatorname{Im} \mathbf{y}_m$$

und

$$\operatorname{Re} \tilde{\mathbf{y}}_1, \operatorname{Im} \tilde{\mathbf{y}}_1, \dots, \operatorname{Re} \tilde{\mathbf{y}}_m, \operatorname{Im} \tilde{\mathbf{y}}_m$$

die gleichen Vektorräume erzeugen. Daher erhalten wir ein Fundamentalsystem *reeller* Lösungen, wenn wir bei jedem Paar $\lambda, \bar{\lambda}$ von komplexen Eigenwerten die Real- und Imaginärteile der komplexen Lösungen zu λ betrachten.

Zusammenfassend erhalten wir folgende Vorschrift:

Bestimmung eines Fundamentalsystems der gDgl

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$$

mit einer nicht symmetrischen Matrix A :

- (1) Bestimme alle Eigenwerte von A .
- (2) Bestimme eine Basis $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ des \mathbb{C}^n aus Hauptvektoren von A .

- (3) Für jeden Vektor \mathbf{v}_i und zugehörigen Eigenwert λ setze

$$\mathbf{y}(x) = e^{\lambda x} [\mathbf{v}_i + \dots + \frac{x^{\ell-1}}{(\ell-1)!} (A - \lambda I)^{\ell-1} \mathbf{v}_i],$$

wobei ℓ die Stufe von \mathbf{v}_i ist.

- (4) Für jedes Paar $\lambda, \bar{\lambda}$ komplexer Eigenwerte bestimme $\operatorname{Re} \mathbf{y}$ und $\operatorname{Im} \mathbf{y}$ für alle Lösungen \mathbf{y} zum Eigenwert λ aus Teil (3).

BEISPIEL X.3.3. Wir betrachten die gDgl

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$$

Das charakteristische Polynom lautet

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -2 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda(\lambda-3)(\lambda-1) + 1 + 2 + (\lambda-3) - \lambda - 2(\lambda-1) \\ &= -\lambda(\lambda-3)(\lambda-1) - 2(\lambda-1) \\ &= -(\lambda-1)[\lambda(\lambda-3) + 2] \\ &= -(\lambda-1)[\lambda^2 - 3\lambda + 2] \\ &= -(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-2) \\ &= -(\lambda-1)^2(\lambda-2). \end{aligned}$$

Die Bestimmungsgleichung für einen Eigenvektor zum Eigenwert 2 ist

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{u} = 0 \\ \implies & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u} = 0 \\ \implies & \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Bestimmungsgleichung für einen Eigenvektor zum Eigenwert 1 lautet

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v} = 0 \\ \implies & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v} = 0 \\ \implies & \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Insbesondere hat der Eigenwert 1 die algebraische Vielfachheit 2 und die geometrische Vielfachheit 1. Die Bestimmungsgleichung für einen Hauptvektor der Stufe 2 zum Eigenwert 1 lautet

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{w} = 0 \\ \implies & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{w} = 0 \\ \implies & \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} (I - A)\mathbf{w} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{w} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

erhalten wir das Fundamentalsystem

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1(x) &= e^{2x} \mathbf{u} \\ &= e^{2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{y}_2(x) &= e^x \mathbf{v} \\ &= e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_3(x) &= e^x[\mathbf{w} + x(A - I)\mathbf{w}] \\
&= e^x[\mathbf{w} - x(I - A)\mathbf{w}] \\
&= e^x \begin{pmatrix} 1 - x \\ 1 - x \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

BEISPIEL X.3.4. Wir betrachten die gDgl

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$$

Das charakteristische Polynom lautet

$$\begin{aligned}
&\det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\
&= -\lambda^3 - 4 + 2\lambda \\
&= -(\lambda + 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) \\
&= -(\lambda + 2)[(\lambda - 1)^2 + 1] \\
&= -(\lambda + 2)(\lambda - 1 + i)(\lambda - 1 - i).
\end{aligned}$$

Die Bestimmungsgleichung für einen Eigenvektor zum Eigenwert -2 ist

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{u} = 0 \\
\Rightarrow &\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{u} = 0 \\
\Rightarrow &\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Für den Eigenwert $1 + i$ ergibt sich die Bestimmungsgleichung

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} -1 - i & 2 & 0 \\ 0 & -1 - i & 2 \\ -1 & 1 & -1 - i \end{pmatrix} \mathbf{v} = 0 \\
\Rightarrow &\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 - i \\ 0 & -1 - i & 2 \\ 0 & 1 - i & 2i \end{pmatrix} \mathbf{v} = 0 \\
\Rightarrow &\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 + 2i \\ 2i \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir das Fundamentalsystem

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_1(x) &= e^{-2x} \mathbf{u} \\
 &= e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
 \mathbf{y}_2(x) &= \operatorname{Re} [e^{(1+i)x} \mathbf{v}] \\
 &= \operatorname{Re} \left[e^x [\cos x + i \sin x] \begin{pmatrix} 4 \\ 2 + 2i \\ 2i \end{pmatrix} \right] \\
 &= e^x \begin{pmatrix} 4 \cos x \\ 2 \cos x - 2 \sin x \\ -2 \sin x \end{pmatrix}, \\
 \mathbf{y}_3(x) &= \operatorname{Im} [e^{(1+i)x} \mathbf{v}] \\
 &= \operatorname{Im} \left[e^x [\cos x + i \sin x] \begin{pmatrix} 4 \\ 2 + 2i \\ 2i \end{pmatrix} \right] \\
 &= e^x \begin{pmatrix} 4 \sin x \\ 2 \cos x + 2 \sin x \\ 2 \cos x \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

X.3.6. Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Wir betrachten gDglen der Form

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = f(x).$$

Gemäß Abschnitt X.1.2 (S. 128) können wir die gDgl auch als System 1. Ordnung schreiben. Dazu definieren wir

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

\mathbf{z} genügt dann der gDgl

$$\mathbf{z}' = A\mathbf{z} + \mathbf{F}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Auf diese gDgl können wir die Ergebnisse der vorigen Abschnitte anwenden. Das charakteristische Polynom von A lautet

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

Für eine k -fache Nullstelle λ von p erhalten wir daher für die homogene gDgl n -ter Ordnung die Lösungen

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{\lambda x} \\ y_2(x) &= x e^{\lambda x} \\ &\vdots \\ y_k(x) &= x^{k-1} e^{\lambda x}. \end{aligned}$$

Diese sind für $\lambda \in \mathbb{R}$ reell.

Falls λ komplex ist, ist $\bar{\lambda}$ auch eine Nullstelle gleicher Vielfachheit, und die reellen Lösungen lauten mit $\lambda = \alpha + i\omega$

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{\alpha x} \cos(\omega x), & y_2(x) &= e^{\alpha x} \sin(\omega x), \\ y_3(x) &= x e^{\alpha x} \cos(\omega x), & y_4(x) &= x e^{\alpha x} \sin(\omega x), \\ &\vdots & &\vdots \\ y_{2k-1}(x) &= x^{k-1} e^{\alpha x} \cos(\omega x), & y_{2k}(x) &= x^{k-1} e^{\alpha x} \sin(\omega x). \end{aligned}$$

Für die Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen gDgl n -ter Ordnung gehen wir wie in Abschnitt X.3.3 (S. 141) vor. Die Matrix Y hat jetzt die Form

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix},$$

wobei y_1, \dots, y_n ein Fundamentalsystem für die homogene gDgl n -ter Ordnung ist. Die Koeffizienten c_1, \dots, c_n in dem Ansatz

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + \dots + c_n(x)y_n(x)$$

sind wegen

$$\mathbf{F}(x) = f(x)\mathbf{e}_n$$

gegeben durch

$$c_i(x) = (-1)^{n-i} \int \frac{\det Y_i(x)}{\det Y(x)} f(x) dx,$$

wobei die Matrix Y_i durch Streichen der i -ten Spalte und der n -ten Zeile der Matrix Y entsteht.

BEISPIEL X.3.5. Betrachte die gDgl

$$y''' - y'' - y' + y = x.$$

Das charakteristische Polynom lautet

$$\begin{aligned}\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 &= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) \\ &= (\lambda - 1)^2(\lambda + 1).\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}y_1(x) &= e^x, \\ y_2(x) &= xe^x, \\ y_3(x) &= e^{-x}\end{aligned}$$

ein Fundamentalsystem für die homogene Gleichung. Für die Matrizen Y und Y_1, Y_2, Y_3 erhalten wir

$$\begin{aligned}Y(x) &= \begin{pmatrix} e^x & xe^x & e^{-x} \\ e^x & (x+1)e^x & -e^{-x} \\ e^x & (x+2)e^x & e^{-x} \end{pmatrix} \\ \implies \det Y(x) &= e^x \det \begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & x+1 & -1 \\ 1 & x+2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 4e^x \\ Y_1(x) &= \begin{pmatrix} xe^x & e^{-x} \\ (x+1)e^x & -e^{-x} \end{pmatrix} \\ \implies \det Y_1(x) &= -2x - 1 \\ Y_2(x) &= \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{pmatrix} \\ \implies \det Y_2(x) &= -2 \\ Y_3(x) &= \begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{pmatrix} \\ \implies \det Y_3(x) &= e^{2x}.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die partikuläre Lösung der inhomogenen gDgl

$$\begin{aligned}y_p(x) &= e^x \int \frac{1}{4} e^{-x} (-2x - 1) x dx \\ &\quad - xe^x \int -\frac{2}{4} e^{-x} x dx \\ &\quad + e^{-x} \int \frac{1}{4} e^{-x} e^{2x} x dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{2}{4}(-x^2 - 2x - 2) - \frac{1}{4}(-x - 1) \\
&\quad + \frac{2}{4}x(-x - 1) \\
&\quad + \frac{1}{4}(x - 1) \\
&= x + 1.
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen gDgl lautet dementsprechend

$$y(x) = x + 1 + ae^x + bxe^x + ce^{-x}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

X.4. Stabilität

X.4.1. Motivation. Wir betrachten das AWP

$$\begin{aligned}
\text{(X.4.1)} \quad & \mathbf{y}' = A\mathbf{y} \\
& \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0
\end{aligned}$$

mit einer symmetrischen $n \times n$ Matrix A .

Gemäß Abschnitt X.1.4 (S. 130) besitzt dieses AWP zu jedem Anfangswert \mathbf{y}_0 eine eindeutige Lösung, die stetig von dem Anfangswert abhängt. Um die Abhängigkeit von dem Anfangswert zu betonen, bezeichnen wir diese Lösung mit $\mathbf{y}(t; \mathbf{y}_0)$.

Gemäß Abschnitt X.1.4 folgt für alle $t > 0$ und zwei beliebige Anfangswerte $\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0$

$$\text{(X.4.2)} \quad \|\mathbf{y}(t; \mathbf{u}_0) - \mathbf{y}(t; \mathbf{v}_0)\| \leq e^{Lt} \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_0\|$$

mit

$$L = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ ist EW von } A\}.$$

Diese Abschätzung besagt, dass die Lösung des AWP (X.4.1) zwar stetig von den Anfangswerten abhängt, dass aber Lösungen zu verschiedenen Anfangswerten exponentiell schnell auseinander laufen können. Die folgenden Beispiele zeigen, dass diese Abschätzung den allgemeinen Fall zwar korrekt widerspiegelt, dass sie aber in Spezialfällen viel zu pessimistisch ist.

BEISPIEL X.4.1. Wir betrachten das AWP (X.4.1) mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für den Anfangswert $\mathbf{y}_0 = 0$ erhalten wir natürlich die Lösung

$$\mathbf{y}(t; \mathbf{y}_0) = 0 \quad \text{für alle } t > 0.$$

Die Eigenwerte von A sind offensichtlich ± 1 . Damit ergibt sich in Abschätzung (X.4.2) $L = 1$, und wir erhalten für einen beliebigen Anfangswert $\mathbf{u}_0 \neq 0$ die Abschätzung

$$\text{(X.4.3)} \quad \|\mathbf{y}(t; \mathbf{u}_0)\| \leq e^t \|\mathbf{u}_0\|.$$

Wir wählen nun den Anfangswert

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da

$$A\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0$$

ist, lautet die Lösung des AWP (X.4.1)

$$\mathbf{y}(t; \mathbf{v}_0) = e^t \mathbf{v}_0 \quad \text{für alle } t > 0.$$

Für diesen Anfangswert ist also die Abschätzung (X.4.3) scharf.

Wir betrachten nun den Anfangswert

$$\mathbf{w}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Da

$$A\mathbf{w}_0 = -\mathbf{w}_0$$

ist, lautet die Lösung des AWP (X.4.1)

$$\mathbf{y}(t; \mathbf{w}_0) = e^{-t} \mathbf{w}_0 \quad \text{für alle } t > 0.$$

Insbesondere ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t; \mathbf{w}_0) = 0.$$

Die Abschätzung (X.4.3) ist also in diesem Fall viel zu pessimistisch.

BEISPIEL X.4.2. Wir betrachten jetzt das AWP (X.4.1) mit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Für $\mathbf{y}_0 = 0$ ist wieder $\mathbf{y}(t; \mathbf{y}_0) = 0$ für alle $t > 0$.

Eine leichte Rechnung zeigt, dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ein Eigenvektor zum Eigenwert } -2 \text{ und}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{ein Eigenvektor zum Eigenwert } -4 \text{ ist.}$$

Daher ergibt die Abschätzung (X.4.2) für einen beliebigen Anfangswert $\mathbf{u}_0 \neq 0$

$$(X.4.4) \quad \|\mathbf{y}(t; \mathbf{u}_0)\| \leq e^{4t} \|\mathbf{u}_0\|.$$

Andererseits folgt aus Abschnitt X.3.5 (S. 145)

$$\mathbf{y}(t; \mathbf{u}_0) = \alpha e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

wobei die Zahlen α, β eindeutig bestimmt sind durch die Bedingung

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{u}_0.$$

Daher gilt für alle Anfangswerte \mathbf{u}_0

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t; \mathbf{u}_0) = 0.$$

Die Abschätzung (X.4.4) ist also in jedem Fall viel zu pessimistisch.

Ziel der folgenden Abschnitte ist es, die in den Beispielen X.4.1 und X.4.2 beobachteten Phänomene genauer zu beschreiben.

X.4.2. Stabilitätsbegriffe. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, eine offene, nicht leere Menge und $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf $\mathbb{R} \times U$ Lipschitz-stetig bzgl. U . Für beliebiges $t_0 \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{y}_0 \in U$ betrachten wir das AWP

$$(X.4.5) \quad \begin{aligned} \mathbf{y}' &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{y}_0. \end{aligned}$$

Gemäß dem Satz von Picard-Lindelöf aus Abschnitt X.1.4 (S. 130) besitzt das AWP (X.4.5) eine eindeutige Lösung. Wir bezeichnen diese mit $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$ und setzen voraus, dass sie für alle Zeiten $t \geq t_0$ existiert. Ist speziell $t_0 = 0$, so lassen wir im folgenden das Argument t_0 weg.

DEFINITION X.4.3. (1) Die Lösung $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$ von (X.4.5) heißt LJAPUNOV-STABIL oder kurz STABIL, wenn es ein $R > 0$ und $C > 0$ gibt, so dass für alle \mathbf{y}_1 mit $\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_0\| \leq R$ und alle $t \geq t_0$ gilt

$$\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_1)\| \leq C \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_1\|.$$

Andernfalls heißt die Lösung $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$ INSTABIL.

(2) Die Lösung $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$ heißt ASYMPTOTISCH STABIL, wenn es ein $R > 0$ und eine stetige, nicht negative Funktion $\gamma : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = 0$$

gibt, so dass für alle \mathbf{y}_1 mit $\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_0\| \leq R$ und alle $t \geq t_0$ gilt

$$\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_1)\| \leq \gamma(t) \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}_1\|.$$

BEMERKUNG X.4.4. Ljapunov-Stabilität der Lösung $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$ bedeutet, dass für alle Anfangswerte \mathbf{y}_1 nahe bei \mathbf{y}_0 die Lösungen $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$ und $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_1)$ für $t \rightarrow \infty$ nicht auseinander laufen. Asymptotische Stabilität bedeutet, dass diese Lösungen für $t \rightarrow \infty$ sogar ineinander laufen (vgl. Abb. X.4.1).

BEISPIEL X.4.5. Die Nulllösung $\mathbf{y}(t; 0)$ aus Beispiel X.4.1 ist nicht stabil. Die Nulllösung aus Beispiel X.4.2 ist asymptotisch stabil.

X.4.3. Stabilitätskriterien. Wir betrachten zunächst lineare AWP mit konstanten Koeffizienten. Aus den Abschnitten X.3.4 (S. 143) und X.3.5 (S. 145) folgt:

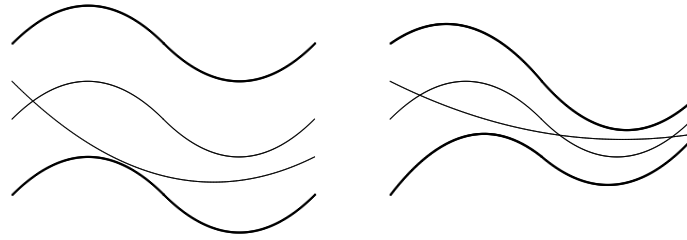


ABBILDUNG X.4.1. Stabile (links) und asymptotisch stabile (rechts) Lösungen einer Differentialgleichung

STABILITÄTSKRITERIUM FÜR LINEARE AWP MIT KONSTANTEN KOEFFIZIENTEN: Sei A eine reelle, nicht notwendig symmetrische $n \times n$ Matrix. Für $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ bezeichne $\mathbf{y}(t; \mathbf{y}_0)$ die Lösung des AWP

$$(X.4.6) \quad \begin{aligned} \mathbf{y}' &= A\mathbf{y} \\ \mathbf{y}(0) &= \mathbf{y}_0. \end{aligned}$$

- (1) Die Realteile der Eigenwerte von A seien alle nicht positiv. Zusätzlich sei für alle Eigenwerte mit verschwindendem Realteil die algebraische gleich der geometrischen Vielfachheit. Dann ist jede Lösung von (X.4.6) Ljapunov-stabil.
- (2) Die Realteile der Eigenwerte A seien alle negativ. Dann ist jede Lösung von (X.4.6) asymptotisch stabil.
- (3) A habe einen Eigenwert mit positivem Realteil. Dann ist jede Lösung von (X.4.6) instabil.

BEISPIEL X.4.6. Die Matrix aus Beispiel X.4.1 hat die Eigenwerte ± 1 . Daher ist für jeden Anfangswert \mathbf{y}_0 die Lösung $\mathbf{y}(t; \mathbf{y}_0)$ des AWP nicht stabil. Die Matrix aus Beispiel X.4.2 dagegen hat lauter negative Eigenwerte. Daher ist für jeden Anfangswert \mathbf{y}_0 die Lösung $\mathbf{y}(t; \mathbf{y}_0)$ des AWP asymptotisch stabil.

Die folgenden beiden Ergebnisse sagen etwas aus über das Stabilitätsverhalten der Lösungen von (X.4.5), wenn (X.4.5) eine „kleine Störung“ einer linearen gDgl mit konstanten Koeffizienten ist. Diese Ergebnisse werden typischerweise genutzt, um das Stabilitätsverhalten einer Linearisierung einer allgemeinen gDgl um eine Lösung zu untersuchen.

STABILITÄT BELIEBIGER LÖSUNGEN FÜR STÖRUNGEN LINEARER AWP MIT KONSTANTEN KOEFFIZIENTEN: Seien

A eine reelle $n \times n$ Matrix, $\mathbf{g} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion und $t_0 \in \mathbb{R}$. Es gelte:

- Alle Eigenwerte von A haben negativen Realteil.
- Es gibt eine stetige, nicht negative Funktion $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = 0$$

und

$$\|\mathbf{g}(t, \mathbf{u}) - \mathbf{g}(t, \mathbf{v})\| \leq k(t) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

für alle $t \geq t_0$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Dann ist jede Lösung des AWP (X.4.5) mit

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(t, \mathbf{x})$$

asymptotisch stabil.

STABILITÄT DER NULLLÖSUNG FÜR STÖRUNGEN LINEARER AWP MIT KONSTANTEN KOEFFIZIENTEN: Seien A eine reelle $n \times n$ Matrix, $\mathbf{g} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion und $t_0 \in \mathbb{R}$. Es gelte:

- Alle Eigenwerte von A haben negativen Realteil.
- Es gibt eine stetige, nicht negative Funktion $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $k(0) = 0$ und

$$\|\mathbf{g}(t, \mathbf{u})\| \leq k(\|\mathbf{u}\|) \|\mathbf{u}\|$$

für alle $t \geq t_0$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$.

Dann ist die Lösung des AWP (X.4.5) mit

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(t, \mathbf{x})$$

und $\mathbf{y}_0 = 0$ asymptotisch stabil.

X.4.4. Autonome Systeme. Die Stabilitätskriterien des vorigen Abschnittes lassen sich besonders leicht auf autonome AWP anwenden. Wir betrachten daher in diesem Abschnitt speziell AWP der Form

$$(X.4.7) \quad \begin{aligned} \mathbf{y}' &= \mathbf{F}(\mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(0) &= \mathbf{y}_0 \end{aligned}$$

mit stetig differenzierbarer Funktion $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Ist \mathbf{y}_0 eine Nullstelle von \mathbf{F} , d.h.

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}_0) = 0,$$

so folgt sofort, dass die Lösung von (X.4.7) konstant ist:

$$\mathbf{y}(t; \mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Ist umgekehrt $\mathbf{y}(t; \mathbf{y}_0)$ eine stationäre Lösung von (X.4.7), d.h., gibt es ein $t_1 \in \mathbb{R}$ mit

$$\mathbf{y}'(t_1; \mathbf{y}_0) = 0,$$

so gilt

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}(t_1; \mathbf{y}_0)) = 0,$$

und aus dem Eindeutigkeitssatz folgt

$$\mathbf{y}(t; \mathbf{y}_0) = \mathbf{y}(t_1; \mathbf{y}_0) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Stationäre Lösungen von (X.4.7) sind also genau diejenigen Lösungen, die zu einem Anfangswert \mathbf{y}_0 mit $\mathbf{F}(\mathbf{y}_0) = 0$ gehören. Daher heißen die Nullstellen von \mathbf{F} auch RUHEPUNKTE des AWP (X.4.7). Der folgende Satz charakterisiert die Stabilität solcher Ruhepunkte. Er folgt aus der Stabilität der Nulllösung von Störungen linearer AWP mit konstanten Koeffizienten.

STABILITÄT VON RUHEPUNKTEN AUTONOMER AWP: Sei \mathbf{y}_0 ein Ruhepunkt von (X.4.7).

(1) Die Jacobi Matrix $D\mathbf{F}(\mathbf{y}_0)$ habe lauter Eigenwerte mit negativem Realteil. Dann ist die stationäre Lösung $\mathbf{y}(t; \mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_0$ von (X.4.7) asymptotisch stabil.

(2) Die Jacobi Matrix $D\mathbf{F}(\mathbf{y}_0)$ habe einen Eigenwert mit positivem Realteil. Dann ist die stationäre Lösung $\mathbf{y}(t; \mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_0$ von (X.4.7) instabil.

BEISPIEL X.4.7. Betrachte das gedämpfte mathematische Pendel

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \lambda \sin x = 0$$

mit $\alpha > 0$, $\lambda > 0$. Die zugehörige gDgl 1. Ordnung ist

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -2\alpha v - \lambda \sin x. \end{aligned}$$

Diese ist von der Form (X.4.7) mit

$$\mathbf{F}(x, v) = \begin{pmatrix} v \\ -\lambda \sin x - 2\alpha v \end{pmatrix}.$$

Die Nullstellen sind genau die Punkte

$$(x_k, v_k) = (k\pi, 0), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Die Jacobi Matrix ist

$$\begin{aligned} D\mathbf{F}(x_k, v_k) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda \cos x_k & -2\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(-1)^k \lambda & -2\alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und hat die Eigenwerte $-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \lambda(-1)^k}$. Für gerades k sind beide Eigenwerte negativ; für ungerades k ist ein Eigenwert positiv und einer negativ. Mithin sind die Ruhepunkte zu geradem k asymptotisch stabil und die zu ungeradem k instabil.

BEISPIEL X.4.8. Betrachte (X.4.7) mit $n = 2$ und

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} -x^2 - y \\ -x + y^2 \end{pmatrix}.$$

Aus

$$\mathbf{F}(x, y) = 0$$

folgt

$$x = y^2$$

und

$$\begin{aligned} 0 &= -y^4 - y \\ &= -y(y^3 + 1). \end{aligned}$$

Also sind die Nullstellen

$$(0, 0) \quad \text{und} \quad (1, -1).$$

Für die Jacobi Matrix ergibt sich

$$D\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} -2x & -1 \\ -1 & 2y \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{aligned} D\mathbf{F}(0, 0) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\implies \text{Eigenwerte } \pm 1, \\ D\mathbf{F}(1, -1) &= \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &\implies \text{Eigenwerte } -3, -1. \end{aligned}$$

Also ist $(0, 0)$ instabil und $(1, -1)$ asymptotisch stabil.

Das folgende Beispiel zeigt, dass im Fall von rein imaginären Eigenwerten keine Aussage über die Stabilität von Ruhepunkten möglich ist.

BEISPIEL X.4.9. Betrachte (X.4.7) mit $n = 2$ und

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} -y + x^3 \\ x + y^3 \end{pmatrix}.$$

Der einzige Ruhepunkt ist $\mathbf{y}_0 = (0, 0)$, und

$$D\mathbf{F}(\mathbf{y}_0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hat die Eigenwerte $\pm i$. Sei $\mathbf{u}(t)$ eine Lösung von (X.4.7) zu einem Anfangswert $\mathbf{u}_0 \neq (0, 0)$. Für

$$r(t)^2 = \|\mathbf{u}(t)\|^2 = u_1(t)^2 + u_2(t)^2$$

folgt dann

$$\begin{aligned} r\dot{r} &= u_1\dot{u}_1 + u_2\dot{u}_2 \\ &= u_1(-u_2 + u_1^3) + u_2(u_1 + u_2^3) \\ &= u_1^4 + u_2^4 \\ &> 0. \end{aligned}$$

Also ist $\dot{r}(t) > 0$ und die Lösung läuft von $\mathbf{y}_0 = (0, 0)$ weg, d.h., \mathbf{y}_0 ist instabil.

Betrachte nun (X.4.7) mit $n = 2$ und

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} -y - x^3 \\ x - y^3 \end{pmatrix}.$$

Wieder ist $\mathbf{y}_0 = (0, 0)$ der einzige Ruhepunkt, und

$$D\mathbf{F}(\mathbf{y}_0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hat wieder die Eigenwerte $\pm i$. Für $\mathbf{u}(t)$ und $r(t)$ wie oben folgt jetzt

$$\begin{aligned} r\dot{r} &= u_1\dot{u}_1 + u_2\dot{u}_2 \\ &= u_1(-u_2 - u_1^3) + u_2(u_1 - u_2^3) \\ &= -u_1^4 - u_2^4 \\ &< 0. \end{aligned}$$

Also ist $\dot{r}(t) < 0$ und die Lösung läuft in \mathbf{y}_0 hinein, d.h., \mathbf{y}_0 ist stabil.

Zusammenfassung

VII Potenzreihen

1. Reihen

Definition; Partialsummen; Konvergenz; geometrische Reihe; harmonische Reihe; alternierende harmonische Reihe; absolute und bedingte Konvergenz; alternierende harmonische Reihe ist bedingt konvergent; absolut konvergent \implies konvergent; konvergent \implies Reihenglieder bilden Nullfolge; Leibnizkriterium; Majorantenkriterium; Quotientenkriterium; Summen und Vielfache konvergenter Reihen; Cauchy-Produkt

2. Potenzreihen

Definition; Konvergenzradius; Bestimmung des Konvergenzradius: mittels Quotienten, mittels Wurzeln; Verhalten am Rand des Konvergenzbereiches; Potenzreihen stellen Funktionen dar; gliedweise Differentiation von Potenzreihen; gliedweise Integration von Potenzreihen; Potenzreihen der Exponential-, Logarithmus-, trigonometrischen und inversen trigonometrischen Funktionen; Binomialreihe; Potenzreihen mit beliebigem Entwicklungspunkt; Koeffizientenvergleich

3. Taylorreihen

Taylorpolynom; Taylorformel; Restglied; Extremwerttest; Taylorreihe; Darstellung von Funktionen durch Taylorreihen; Taylorreihen der hyperbolischen und der inversen trigonometrischen Funktionen

4. Anwendungen

Grenzwertbestimmung, Näherungsformeln und Integration mittels Taylorreihen; Taylorreihenansatz zur Lösung gDglen

VIII Differentiation von Funktionen in mehreren Variablen

1. Kurven im \mathbb{R}^n

Parameterdarstellung einer Kurve; Tangentialvektor; Anfangs- und Endpunkt einer Kurve; reguläre Kurven; Bogenlänge; Länge; begleitendes Dreibein; Hauptnormalen- und Binormalenvektor; Krümmung; Torsion; Krümmung und Torsion einer Schraubenfeder

2. Reellwertige Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher

Betrag eines Vektors; offener Ball mit Mittelpunkt \mathbf{a} und Radius r ; innere Punkte; Randpunkte; abgeschlossene Mengen; beschränkte Mengen; kompakte Mengen; Beispiele; Niveaumengen; Graphen; Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen mehrerer Veränderlicher; stetige Funktionen nehmen auf kompakten Mengen ihr Minimum und Maximum an; partielle Ableitungen; Gradient; stetige

partielle Differenzierbarkeit; Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen; totale Ableitung und lineare Approximation; totale Differenzierbarkeit; stetig total differenzierbar \iff stetig partiell differenzierbar; Näherungsberechnung; Richtungsableitungen; Kettenregel; Transformation auf ebene und räumliche Polarkoordinaten; Laplace-Operator und seine Darstellung in kartesischen Koordinaten und Polarkoordinaten

3. Anwendungen der Differentiation

Gradient gibt Richtung des stärksten Anstiegs; Gradientenverfahren zur Bestimmung von Maxima und Minima; Tangenten; Tangentialebene; Normalendarstellung der Tangentialebene; Taylorformel für Funktionen mehrerer Veränderlicher; Taylorpolynom; Hesse-Matrix; Schmiegequadriken; Satz über implizite Funktionen; Bestimmung der Ableitung impliziter Funktionen; Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme; lokale Extrema; stationäre Punkte; lokales Extremum \implies stationärer Punkt; Extremwerttest mittels der Hesse-Matrix; Extrema unter Nebenbedingungen; Lagrange-Multiplikatoren; Bestimmen der Extrema auf kompakten Mengen

4. Vektorwertige Funktionen

Differentiation; Jacobi-Matrix; Newtonverfahren zur Lösung nicht linearer Gleichungssysteme; Kettenregel; Basiswechsel; räumliche Skalaren- und Vektorfelder; starre Drehungen; Zentralfelder; laminare Rohrströmung; Gradient; Divergenz; Rotation; Laplace-Operator; Nabla-Operator; Koordinateninvarianz von Divergenz, Gradient und Rotation; wirbel- und quellfreie Felder

IX Integration von Funktionen in mehreren Variablen

1. Parameterintegrale

eigentliche und uneigentliche Parameterintegrale; Gammafunktion; Besselfunktionen; Fourier-Transformation; Differentiation von eigentlichen Parameterintegralen; Besselsche Differentialgleichung; Differentiation bei variablen Integrationsgrenzen; Differentiation von uneigentlichen Parameterintegralen; Ableitungen der Gammafunktion

2. Kurvenintegrale

Kurvenintegral einer skalaren Funktion; Rechenregeln; Trägheitsmomente; Schwerpunkt; Kurvenintegral eines Vektorfeldes; geschlossene Kurven; Gradientenfeld; Potential; Stammfunktion; Satz von Poincaré; Methoden zur Bestimmung einer Stammfunktion

3. Integration über ebene Bereiche

Flächeninhalt; messbare Mengen; Nullmengen; Doppel- oder Gebietsintegral; geometrische Deutung; Rechenregeln; Mittelwertsatz; praktische Berechnung von Doppelintegralen; Satz von Green; Anwendungen; Satz von Gauß in der Ebene

4. Integration über Flächen im Raum

Parameterdarstellung einer Fläche; Tangentialebene; Normalenvektor; metrische Fundamentalgrößen; Rand einer Fläche; Drehflächen; Sphäre; Torus; Wendelfläche; Flächeninhalt; Oberflächenintegral einer skalaren Funktion; Transformationsformel für Gebietsintegrale; affine Koordinaten; Polarkoordinaten; elliptische Koordinaten; Fluss eines Vektorfeldes; orientierbare Flächen; Beispiele; Möbiusband ist nicht orientierbar; Satz von Stokes; Anwendungen

5. Integration über dreidimensionale Bereiche

Volumen; Nullmengen; reguläre Mengen; Dreifach- oder Volumenintegral; praktische Berechnung von Dreifachintegralen; Jacobi- oder Funktionaldeterminante; Transformationsformel für Volumenintegrale; affine Koordinaten; Zylinderkoordinaten; Kugelkoordinaten; Satz von Gauß; Anwendungen; Kontinuitätsgleichungen der Strömungsmechanik

X Gewöhnliche Differentialgleichungen II: Systeme

1. Existenz- und Eindeutigkeitsätze

Gewöhnliche Differentialgleichung n -ter Ordnung; Anfangswertproblem; Lösung; Reduktion der Ordnung; Schwingungsgleichung; Lipschitz-stetige Funktionen; Zusammenhang mit Differenzierbarkeit; Satz von Picard-Lindlöf; stetige Abhängigkeit der Lösung eines Anfangswertproblems von den Anfangsbedingungen

2. Differentialgleichungen 1. Ordnung

Exakte Differentialgleichungen; Lösung exakter Differentialgleichungen; integrierende Faktoren; Methoden zur Bestimmung integrierender Faktoren; Räuber-Beute-Modelle

3. Systeme linearer Differentialgleichungen

Homogene und inhomogene Gleichungen; partikuläre Lösung; allgemeine Lösungen; Fundamentalsysteme und ihre Bestimmung; Wronski-Determinante; Methode der Variation der Konstanten; homogene Systeme mit konstanter, symmetrischer Matrix; homogene Systeme mit konstanter, allgemeiner Matrix; lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

4. Stabilität

Motivation der Problemstellung; Ljapunov-Stabilität; asymptotische Stabilität; Instabilität; Stabilität von linearen Systemen mit konstanter Matrix; Stabilität von gestörten linearen Systemen; autonome Systeme und ihre Stabilität

Index

- $o(\cdot)$, 41
- ∇ , 75
- $\|\cdot\|$, 129
- ∂ , 104
- \mathbf{B} , 32
- $B_r(\mathbf{a})$, 35
- $C^0(D, \mathbb{R})$, 41
- $C^k(D, \mathbb{R})$, 41
- Δ , 73
- Df , 67
- $F(M)$, 94
- Γ_f , 36
- H_f , 51
- $L(\mathbf{x})$, 31
- \mathbf{N} , 32
- \mathbf{T} , 31
- $T_n(f; x_0)$, 20, 50
- $V(M)$, 118
- div, 73
- ds , 31
- f_{x_i} , 38
- grad, 39
- \iint_M , 95
- \iiint_M , 119
- ∂D , 35
- $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, 38
- $\partial_{\mathbf{v}} f$, 44
- rot, 73
- $s(t)$, 31
- τ , 33

- abgeschlossen, 35
- abgeschlossene Menge, 35
- absolut konvergente Reihe, 8
- Affensattel, 52
- affine Koordinaten, 112, 121
- alternierende harmonische Reihe, 8
- Anfangspunkt, 30
- Anfangswertproblem, 127
- asymptotisch stabil, 155
- AWP, 127

- Ball, 35
- Basiswechsel, 70
- bedingt konvergente Reihe, 8
- begleitendes Dreibein, 31
- beschränkt, 36
- beschränkte Menge, 36
- Besselfunktion, 77
- Bild, 29
- Binomialreihe, 17
- Binormalenvektor, 32
- Bogenlänge, 31

- Cauchy-Produkt, 11

- Definitionsbereich, 29
- Differentiation von Potenzreihen, 14
- Divergenz, 73
- Doppelintegral, 95
- Drehfläche, 105
- Dreifachintegral, 119

- ebene Polarkoordinaten, 45
- eigentliches Parameterintegral, 77
- elliptische Koordinaten, 113
- elliptischer Punkt, 52
- Endpunkt, 30
- Eulersche Gammafunktion, 77
- exakte Differentialgleichung, 132
- Extremstellen-Test, 57
- Extremwert-Test, 21

- Feldlinie, 71
- flacher Punkt, 52
- Flächeninhalt, 94, 108
- Fluss, 114
- Fourier-Transformierte, 77
- Fundamentalsystem, 140
- Funktionaldeterminante, 121

- Gammafunktion, 77
- Gaußscher Integralsatz, 124
- gDgl n -ter Ordnung, 127

- Gebietsintegral, 95
 geometische Reihe, 7
 geschlossene Kurve, 86
 geschlossene Fläche, 105
 gleichmäßig Lipschitz-stetig, 129
 Glieder einer Reihe, 7
 globales Maximum, 57
 globales Minimum, 57
 Gradient, 39, 73
 Gradientenfeld, 87
 Gradientenverfahren, 47
 Graph, 36, 105
 Gravitationskraft, 72
 Grenzwert, 37
- Hagen, G., 72
 harmonische Reihe, 8
 Hauptnormalenvektor, 32
 Hesse-Matrix, 51
 homogene Differentialgleichung, 138
 hyperbolischer Punkt, 52
- inhomogene Differentialgleichung,
 138
 innerer Punkt, 35
 instabil, 155
 Integration von Potenzreihen, 15
 integrierender Faktor, 134
- Jacobi-Determinante, 121
 Jacobi-Matrix, 67
- Kettenregel, 45, 70
 Koeffizienten einer Potenzreihe, 12
 kompakt, 36
 kompakte Menge, 36
 Kontinuitätsgleichung der
 Strömungsmechanik, 125
 Kontraktion, 131
 konvergente Reihe, 7
 Konvergenzradius, 12
 konvex, 89
 Koordinateninvarianz, 74
 Koordinatentransformation, 112, 121
 Krümmung, 32
 Krümmungsvektor, 32
 Kugelkoordinaten, 123
 Kurve, 30, 82
 Kurvenintegral, 82, 85
 Kurvenstück, 30
- Länge, 31
 Lagrange-Funktion, 61
 Lagrange-Multiplikator, 61
- laminare Rohrströmung, 72
 Laplace-Operator, 46, 73
 Leibniz-Kriterium, 9
 linear approximierbar, 41, 67
 Lipschitz-Konstante, 129
 Lipschitz-stetig, 129
 Ljapunov-stabil, 155
 lokales Extremum, 57
 lokales Maximum, 57
 lokales Minimum, 57
- Majorantenkriterium, 9
 Massenmittelpunkt, 84, 99
 messbar, 118
 metrische Fundamentalgrößen, 104
 Mittelwertsatz, 83
- Nabla-Operator, 75
 Newton, I., 72
 Newtonverfahren, 68
 Niveaumenge, 36
 Normalenvektor, 104
 notwendige Charakterisierung lokaler
 Extrema, 57
 Nullmenge, 94, 118
- Oberflächenintegral, 109
 offen, 35
 offene Menge, 35
 offener Ball, 35
 orientierbar, 116
- parabolischer Punkt, 52
 Parameterdarstellung, 103
 Parameterintegral, 77
 Parameterlinie, 104
 Partialsumme, 7
 partiell differenzierbar, 39
 partielle Ableitung, 38
 Poiseuille, J. L. M., 72
 Polarkoordinaten, 67, 113
 Potential, 87
 Potenzreihe, 12
- quasilinear, 68
 quasilineare Abbildung, 68
 Quelldichte, 73
 Quotientenkriterium, 10
- räumliche Kugelkoordinaten, 46
 Rand, 35, 104
 Randpunkt, 35
 regulär, 118
 reguläres Flächenstück, 103

- reguläres Kurvenstück, 30
- Reihe, 7
- Richtungsabteilung, 44
- Riemann-messbar, 94, 118
- Rotation, 73
- Ruhepunkt, 158

- Satz über implizite Funktionen, 54
- Satz von Gauß, 102
- Satz von Green, 101
- Satz von Picard-Lindelöf, 130
- Satz von Poincaré, 89
- Satz von Stokes, 116
- Schmiegeebene, 32
- Schmiegequadratik, 52
- Schwerpunkt, 84, 99
- Skalarenfeld, 71
- skalares Bogenelement, 31
- Sphäre, 106
- Spur, 30
- stabil, 155
- Stabilität beliebiger Lösungen für
 - Störungen linearer AWP mit konstanten Koeffizienten, 156
- Stabilität der Nulllösung für
 - Störungen linearer AWP mit konstanten Koeffizienten, 157
- Stabilität von Ruhepunkten
 - autonomer AWP, 158
- Stabilitätskriterium für lineare AWP
 - mit konstanten Koeffizienten, 156
- Stammfunktion, 87
- starre Drehung, 71
- stationärer Punkt, 57
- statische Momente, 84
- sternförmig, 89
- stetig, 37
- stetig partiell differenzierbar, 39
- stückweise reguläre Fläche, 105
- System gewöhnlicher
 - Differentialgleichungen n-ter Ordnung, 127

- Tangentenvektor, 31
- Tangentialebene, 48, 104
- Tangentialvektor, 30
- Taylor-Formel, 20, 50
- Taylor-Polynom, 20, 50
- Taylor-Reihe, 21
- Test für die totale
 - Differenzierbarkeit, 42
- Torsion, 33
- Torsionsvektor, 33
- Torus, 106
- total differenzierbar, 41, 67
- Trägheitsmomente, 84
- Transformationsformel, 112
- Transformationsformel für
 - Volumenintegrale, 121

- uneigentliches Parameterintegral, 77
- Urbildraum, 29

- Vektorfeld, 71
- vektorielles Bogenelement, 31
- Vertauschbarkeitskriterium für
 - partielle Ableitungen, 40
- Volumen, 118
- Volumenintegral, 119

- wegunabhängig, 87
- Wendelfläche, 107
- Wirbeldichte, 73
- Wronski-Determinante, 140

- zentrales Kraftfeld, 72
- Zentralfeld, 92
- Zentralkraft, 88
- zweiseitig, 116
- zweiseitige Fläche, 115
- Zylinderkoordinaten, 122