V. Integralrechnung

13. Das Riemann-Integral

13.1 Definition: Es sei $I = [a, b]$ abgeschlossenes Intervall. Die Menge

$$B([a, b]) := \{f \mid f : [a, b] \to \mathbb{R}, f \text{ beschränkt}\}$$

heißt Menge der beschränkten Funktionen (auf dem Intervall $[a, b]$). Ein $(n+1)$-Tupel

$$Z_n = (x_0, \ldots, x_n)$$

heißt Zerlegung des Intervalls $[a, b]$, wenn gilt

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

(dabei ist $n \in \mathbb{N}$ beliebig). Die Punkte $x_0, \ldots, x_n$ heißen Teilpunkte von Z. Die Menge aller Zerlegungen des Intervalls $[a, b]$ wird mit $\zeta = \zeta([a, b])$ bezeichnet. Für $Z \in \zeta$ heißt

$$|Z| := \max\{x_j - x_{j-1} \mid j = 1, \ldots, n\}$$

Feinheitsmaß der Zerlegung Z und $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ das j-te Teilintervall von $Z \in \zeta$. Eine Zerlegung $Z \in \zeta$ heißt äquidistant, wenn

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_n - x_{n-1} = \frac{b-a}{n}$$

gilt.

Für Zerlegungen $Z, Z' \in \zeta$ heißt Z' Verfeinerung von Z, wenn jeder Teilpunkt von Z auch Teilpunkt von Z' ist (Schreibweise $Z \prec Z'$). Für $Z, Z' \in \zeta$ ist $Z + Z'$ diejenige Zerlegung des Intervalls $[a, b]$, die genau die Teilpunkte von Z und Z' enthält. $Z + Z'$ heißt Überlagerung von Z und Z'.

13.2 Definition: Für $f \in B([a, b])$ und $Z = (x_0, \ldots, x_n) \in \zeta$ heißt

$$\underline{S}(Z) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \inf f(I_j)$$

Untersumme von f (bzgl. der Zerlegung Z) und

$$\bar{S}(Z) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \sup f(I_j)$$

Obersumme von f (bzgl. der Zerlegung Z). Manchmal wird auch die Bezeichnung $\underline{S}(Z, f)$ bzw. $\bar{S}(Z, f)$ benutzt, um die Abhängigkeit von der Funktion f zu verdeutlichen.

13.3 Einfache Eigenschaften:

(i)

$$\begin{aligned} \underline{S}(Z,f) \ &\leq\ \bar{S}(Z,f) \\ \bar{S}(Z,-f) \ &=\ -\underline{S}(Z,f) \end{aligned}$$

(ii) Es sei $f \in B([a,b]), |f(x)| \leq K$ für alle $x \in [a,b]$ und $Z, Z' \in \zeta$ mit $Z \prec Z'$. Besitzt die Zerlegung Z' p Teilpunkte mehr als die Zerlegung Z, dann gilt:

$$\begin{aligned} \underline{S}(Z) \ &\leq\ \underline{S}(Z') \leq \underline{S}(Z) + 2pK \cdot |Z| \\ \bar{S}(Z) \ &\geq\ \bar{S}(Z') \geq \bar{S}(Z) - 2pK \cdot |Z| \end{aligned}$$

(iii) Für $f \in B([a,b]), Z, Z' \in \zeta$ gilt stets

$$\underline{S}(Z,f) \leq \bar{S}(Z',f)$$

(d.h. die Menge der Untersummen ist nach oben und die Menge der Obersummen nach unten beschränkt.)

13.4 Definition: Für $f \in B([a,b])$ heißt

$$\underline{A}(f) = \underline{\int}_{a}^{b} f(x)dx := \sup\{\underline{S}(Z,f) \mid Z \in \zeta([a,b])\}$$

unteres Riemann-Integral und

$$\bar{A}(f) := \overline{\int}_{a}^{b} f(x)dx := \inf\{\bar{S}(Z,f) \mid Z \in \zeta([a,b])\}$$

oberes Riemann-Integral. Die Funktion f heißt Riemann-integrierbar auf dem Intervall [a,b], wenn $\underline{A}(f) = \bar{A}(f)$ gilt. In diesem Fall heißt

$$A(f) = \int_a^b f(x)dx := \underline{A}(f) = \bar{A}(f)$$

Riemann-Integral von f auf dem Intervall $[a,b]$. Die Menge $[a,b]$ heißt Integrationsintervall und a (bzw. b) untere (bzw. obere) Integrationsgrenze. $R([a,b])$ bezeichnet die Menge aller beschränkten Funktionen, die auf dem Intervall $[a,b]$ Riemann-integrierbar sind.

13.5 Bemerkung: Für $f \in B([a,b])$ gilt:

(i) $\underline{A}(f) = -\bar{A}(-f)$

(ii) $\underline{A}(f) \leq \bar{A}(f)$.

13.6 Satz: (Riemannsches Integrabilitätskriterium) Es sei $f \in B([a,b])$, dann ist f Riemann-integrierbar auf dem Intervall $[a,b]$ genau dann, wenn gilt:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Zerlegung $Z \in \zeta([a,b])$ mit

$$\bar{S}(Z,f) - \underline{\mathrm{S}}(Z,f) < \varepsilon.$$

13.7 Beispiele:

(i) Die Funktion

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \ \mathbb{R} \\ x & \to \ f(x) = c \end{cases}$$

($c \in \mathbb{R}$ gegeben) ist auf jedem Intervall $[a,b]$ integrierbar und es gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = c \cdot (b-a).$$

(ii) Die Funktion

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \ \mathbb{R} \\ x & \to \ f(x) = x \end{cases}$$

ist auf jedem Intervall $[a,b]$ integrierbar und es gilt:

$$\int_a^b x dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

(iii) Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton, dann ist f auch auf dem Intervall $[a,b]$ Riemann-integrierbar.

13.8 Satz: Es sei $f \in B([a,b])$ und $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}, Z_n \in \zeta([a,b])$ eine Folge von Zerlegungen mit $\lim\limits_{n\to\infty} |Z_n| = 0$, dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \underline{\mathrm{S}}(Z_n,f) = \underline{\mathrm{A}}(f); \quad \lim_{n\to\infty} \bar{S}(Z_n,f) = \bar{A}(f).$$

13.9 Definition: Es sei $f \in B([a,b])$ und $Z = (x_0,\ldots,x_n) \in \zeta$ eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$. Für $j = 1,\ldots,n$ sei $\xi_j \in [x_{j-1},x_j]$ ein Zwischenpunkt und $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ ein zu Z passender Vektor von Zwischenpunkten. Die Summe

$$\sigma(Z,\xi) := \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

heißt Riemann-Summe (oder Zwischensumme) von f bzgl. (Z, ξ).

Satz 13.10: Eine Funktion $f \in B([a,b])$ ist auf dem Intervall $[a,b]$ Riemann-integrierbar, genau dann, wenn es ein $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt, so dass gilt:

Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|\sigma(Z, \xi) - \alpha| < \varepsilon$$

für jede Zerlegung Z und für jeden zu Z passenden Vektor von Zwischenpunkten ξ mit Feinheitsmaß $|Z| < \delta$.

13.11 Folgerung: Es sei $f \in B([a,b])$, dann gilt: f ist Riemann-integrierbar auf dem Intervall $[a,b]$ genau dann, wenn für jede Folge $(Z_n, \xi^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ von Zerlegungen $Z_n \in \zeta$ und Zwischenpunkten $\xi^{(n)}$ (passend zu Z_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} |Z_n| = 0$ die Folge $(\sigma(Z_n, \xi^{(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist. In diesem Fall liefern alle Folgen denselben Grenzwert, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(Z_n, \xi^{(n)}) = A(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

13.12 Satz: (1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) Die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar auf dem Intervall $[a,b]$ und f' sei Riemann-integrierbar auf dem Intervall $[a,b]$, dann gilt:

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

13.13 Vereinbarungen:

(1) Schreibweise:

$$\int_a^b f'(x)dx = f(x)|_a^b = f(b) - f(a)$$

(2) Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ (I Intervall) hat auf I eine Stammfunktion F, wenn es eine differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ gibt mit $F' = f$. Der Satz 13.12 lautet in diesem Fall für $f \in R([a,b])$:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

13.14 Beispiele:

(i) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{6}.$

(ii) Für $a < b, \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ gilt:

$$\int_a^b x^\alpha dx = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

(iii) Für $0 < a < b$ gilt:

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \log b - \log a$$

(iv) Für $-\frac{\pi}{2} \leq a < b \leq \frac{\pi}{2}$ gilt

$$\int_a^b \sin x dx = \cos a - \cos b$$

(v) Für $0 < a < b$ gilt:

$$\int_a^b \log x dx = a - b + b \log b - a \log a.$$

13.15 Satz: Es sei $f \in B([a,b])$ und $a < c < b$, dann gilt:

$$f \in R([a,b]) \iff f \in R([a,c]) \wedge f \in R([c,b]).$$

In diesem Fall ist dann:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Wir vereinbaren außerdem die folgenden Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \int_b^a f(x)dx &:= -\int_a^b f(x)dx \quad (\text{falls } a < b) \\ \int_a^a f(x)dx &:= 0; \int_{\bar{a}}^a f(x)dx := 0; \int_a^{\bar{a}} f(x)dx := 0. \end{aligned}$$

13.16 Satz: Es seien $f, g \in R([a,b]); \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dann gilt:

(i) $\alpha \cdot f + \beta \cdot g \in R([a,b])$ und

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

(ii) Ist $g(x) \geq f(x)$ für alle $x \in [a, b]$, dann ist

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

13.17 Definition und Satz: Es sei $\gamma \in (0, 1]$ und I ein Intervall. Eine Funktion $H : I \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig der Ordnung γ, wenn es eine Konstante $L > 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in I$ gilt:

$$|H(x) - H(y)| \leq L|x - y|^\gamma.$$

Ist $H : [-K, K] \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig der Ordnung $\gamma = 1$ und $f \in R([a, b])$ mit $f([a, b]) \subset [-K, K]$, so ist $H \circ f$ Riemann-integrierbar auf dem Intervall $[a, b]$.

13.18 Beispiele: Es seien f, g Riemann-integrierbar auf dem Intervall $[a, b]$, dann gilt:

(i) $f \cdot g$ ist auf dem Intervall $[a, b]$ Riemann-integrierbar.

(ii) $|f|$ ist auf dem Intervall $[a, b]$ Riemann-integrierbar.

(iii) ist $|f(x)| \geq \delta > 0$ für alle $x \in [a, b]$, dann ist auch die Funktion $1/f$ auf dem Intervall $[a, b]$ Riemann-integrierbar.

13.19 Bemerkung: Ist $f \in R([a, b])$, so gilt

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

13.20 Satz: Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall $[a, b]$ Riemann-integrierbar und $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$, dann gilt:

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a).$$

Die Zahl

$$\mu := \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)dx$$

heißt Mittelwert von f auf dem Intervall $[a, b]$.

13.21 Satz: Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei auf dem Intervall $[a, b]$ beschränkt und Riemann-integrierbar. Dann ist die durch

$$F : \begin{cases} [a, b] & \to \mathbb{R} \\ x & \to F(x) := \int_a^x f(t)dt \end{cases}$$

definierte Funktion auf dem Intervall $[a, b]$ stetig. Ist außerdem die Funktion f im Punkt $x_0 \in [a, b]$ stetig, dann ist F in x_0 differenzierbar und es gilt:

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

13.22 Satz: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall $[a, b]$ stetig, dann ist f auf dem Intervall $[a, b]$ auch Riemann-integrierbar.

13.23 Satz: (2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf dem Intervall $[a, b]$. Dann ist die durch

$$(*) \qquad F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

definierte Funktion F auf dem Intervall $[a, b]$ differenzierbar und es gilt: $F'(x) = f(x)$. D.h. die durch $(*)$ definierte Funktion ist eine Stammfunktion von f.

13.24 Satz: Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stetigen Funktionen $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, die gleichmäßig auf dem Intervall $[a, b]$ gegen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f Riemann-integrierbar und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

13.25 Beispiele:

(i) Für $|x| < 1$ gilt:

$$\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2} \int_{-x}^{x} \frac{dt}{1+t} dt = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots$$

(ii) Die durch

$$f_n : \begin{cases} [0, 1] & \to \mathbb{R} \\ x & \to f_n(x) = 2nxe^{-nx^2} \end{cases}$$

definierte Funktionenfolge konvergiert auf $[0, 1]$ <u>nicht</u> gleichmäßig, aber punktweise gegen die Funktion

$f : [0, 1] \to \mathbb{R}; x \to f(x) = 0$. Außerdem gilt:

$$1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq 0 = \int_0^1 f(x)dx.$$

13.26 Satz: (partielle Integration) Die Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar auf dem Intervall $[a, b]$ und es sei $f \cdot g' \in R([a, b])$, $f' \cdot g \in R([a, b])$. Dann ist

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) \mid_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

13.27 Satz: (Substitutionsregel) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktion. Ist die Funktion $\varphi : [a, b] \to I$ stetig differenzierbar (d.h. $f \in C^1([a, b])$), dann gilt:

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx.$$

13.28 Beispiele:

(i) Für $n \in \mathbb{N}0$ sei

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx$$

dann gilt für $n \geq 2 : I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$

(ii)

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}$$

(iii) Für $p, q \in \mathbb{N}$ gilt:

$$I_{pq} := \int_0^1 x^p(1-x)^q dx = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

13.29 Beispiel: (Wallissche Produktformel)

(i) $\displaystyle \frac{\pi}{2} = \lim_{k\to\infty} \prod_{j=1}^{k} \frac{(2j)^2}{(2j-1)(2j+1)}$

(ii) $\displaystyle \sqrt{\pi} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k!)^2 2^{2k}}{(2k)!\sqrt{k}}$

13.30 Satz: (Stirlingsche Formel)

(i) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1$

(ii) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $\vartheta_n \in (0, 1)$, so dass

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\exp(\frac{\vartheta_n}{12n}).$$

14. Unbestimmte und uneigentliche Integrale

14.1 Definition: Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $F, f : I \to \mathbb{R}$ Funktionen. Die Abbildung F heißt Stammfunktion oder unbestimmtes Integral von f auf dem Intervall I, falls F auf I differenzierbar ist und für alle $x \in I$ gilt

$$F'(x) = f(x).$$

Beachte: Sind F_1, F_2 Stammfunktionen von f auf dem Intervall I, dann existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $F_1(x) = F_2(x) + c$ für alle $x \in I$. Alle in diesem Abschnitt auftretenden Gleichungen mit unbestimmten Integralen sind wie folgt zu interpretieren: Es besteht Gleichheit bei Wahl einer passenden Stammfunktion.

Schreibweise: $\int f(x)dx$ bzw. $\int f dx$ bezeichne irgendeine Stammfunktion.

14.2 Satz : Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, dann besitzt f eine Stammfunktion auf I.

14.3 Rechenregeln für Stammfunktionen: Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f, g : I \to \mathbb{R}$ Funktionen.

(a) Haben f, g auf I eine Stammfunktion, so hat für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Funktion $\alpha f + \beta g$ eine Stammfunktion und es gilt

$$\int (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx.$$

(b) Sind f und g auf I differenzierbar und hat $f' \cdot g$ eine Stammfunktion auf I, dann hat auch $f \cdot g'$ eine Stammfunktion auf I und es gilt

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

(partielle Integration).

(c) Ist $I_1 \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $\varphi : I_1 \to I$ differenzierbar und hat f eine Stammfunktion F auf I, dann hat auch $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ auf I_1 eine Stammfunktion und es gilt

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = (F \circ \varphi)(t) = \int f(x)dx \,|_{x=\varphi(t)}$$

(Substitutionsregel).

(d) Ist $I_1 \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $\varphi : I_1 \to I$ differenzierbar mit $\varphi'(t) \neq 0 \quad \forall\, t \in I_1$ und hat $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ eine Stammfunktion G auf I_1, dann hat auch f eine Stammfunktion auf I und es gilt

$$\int f(x)dx = (G \circ \varphi^{-1})(x) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \,|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

(Substitutionsregel).

14.4 Tabelle einiger Stammfunktionen:

$f(x)$	$F(x) = \int f(x)dx$	Definitionsbereich
$x^k, k \in \mathbb{Z}, k \neq -1$	$\frac{x^{k+1}}{k+1}$	$x \in \mathbb{R}$ für $k \geq 0$, $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ für $k \leq -2$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$x \in \mathbb{R}^+$
$\frac{1}{x}$	$\log \lvert x \rvert$	$x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	
$\sin x$	$-\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	
$\tan x$	$-\log \lvert \cos x \rvert$	
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$x \in \mathbb{R}\backslash\{(k+\frac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$\cot x$	$\log \lvert \sin x \rvert$	
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$	$x \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$\sinh x$	$\cosh x$	
$\cosh x$	$\sinh x$	$x \in \mathbb{R}$
$\tan hx$	$\log(\cosh x)$	
$\cot hx$	$\log \lvert \sinh x \rvert$	$x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$x \in (-1, 1)$

14.5 Beispiele:

(i) $\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x$

(ii) $\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x)$

(iii) $\displaystyle\int \frac{dt}{3t-2} = \frac{1}{3} \log |3t-2|$

(iv) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} = 6(\sqrt[6]{x} - \arctan \sqrt[6]{x})$

14.6 Integration rationaler Funktionen: Es seien P, Q Polynome vom Grad m bzw. $n \in \mathbb{N}$ und

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

eine rationale Funktion. Gesucht ist eine Stammfunktion von R. Ist $m \geq n$, liefert Division die Darstellung

$$R(x) = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}$$

wobei P_1, P_2 Polynome sind und der Grad von P_2 kleiner als der Grad von Q ist. Da die Bestimmung einer Stammfunktion von P_1 trivial ist, setzen wir O.B.d.A. $m < n$ voraus. Es gilt (vgl. Heuser, Analysis I, Kap. 69):
Es existierten Konstanten $c, \lambda_1, \ldots, \lambda_r, a_1, b_1, \ldots, a_s, b_s \in \mathbb{R}$ $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}0, \beta_1, \ldots, \beta_s \in \mathbb{N}0$, so dass das Polynom Q die Darstellung

$$(*) \qquad Q(x) = c \prod_{j=1}^{r} (x - \lambda_j)^{\alpha_j} \prod_{j=1}^{s} (x^2 + a_j x + b_j)^{\beta_j}$$

besitzt. Dabei gilt $n = \sum_{j=1}^r \alpha_j + 2 \sum_{j=1}^s \beta_j$, die Konstanten $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sind die paarweise verschiedenen reellen Nullstellen von Q mit Multiplizitäten $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ und die Polynome $D_j(x) = x^2 + a_j x + b_j$ haben keine reellen Nullstellen. Die Darstellung $(*)$ ist eindeutig und mit dieser Darstellung hat die rationale Funktion R die folgende **Partialbruchzerlegung**

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{\alpha_j} \frac{A_i^{(j)}}{(x - \lambda_j)^i} + \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{\beta_j} \frac{B_i^{(j)} x + C_i^{(j)}}{D_j(x)^i}.$$

Für die Bestimmung der Stammfunktion $\int R(x) dx$ sind daher die Stammfunktionen der in der Partialbruchzerlegung auftretenden Funktionen zu ermitteln.

14.7 Berechnung der bei der Partialbruchzerlegung auftretenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-c} = \log |x-c|$

(ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-c)^p} = \frac{(-1)}{p-1}\frac{1}{(x-c)^{p-1}} \qquad (p>1)$

(iii) $\displaystyle\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{2}{\sqrt{D}} \arctan \frac{2ax+b}{\sqrt{D}}$ falls $D = 4ac-b^2 > 0$ (Man beachte, dass der Fall $D \leq 0$ in der Partialbruchzerlegung nicht auftritt, da das Polynom ax^2+bx+c in diesem Fall reelle Nullstellen besitzt).

(iv) Für $I_{p+1} := \displaystyle\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{p+1}}$ mit $D = 4ac-b^2$, $a \neq 0$, gilt die Rekursionsformel

$$I_{p+1} = \frac{2ax+b}{pD(ax^2+bx+c)^p} + (2-\frac{1}{p})\frac{2a}{D}I_p; \quad p \geq 1$$

(v) Für $J_{p+1} := \displaystyle\int \frac{xdx}{(ax^2+bx+c)^{p+1}}$ mit $D = 4ac-b^2$, $a \neq 0$, gilt die Rekursionsformel

$$J_{p+1} = -\frac{bx+2c}{pD(ax^2+bx+c)^p} - (2-\frac{1}{p})\frac{b}{D}I_p; \quad p \geq 1$$

wobei I_p in (iv) definiert ist.

14.8 Beispiele:

(i) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^4-x}dx = -\log|x| + \frac{2}{3}\log|x-1| + \frac{1}{6}\log|x^2+x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$

(ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$

(iii) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx = -2\log|\cos\frac{x}{2}|$

14.9 Definition:

(i) Es sei $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar auf $[a,c]$ für jedes $c > a$. f heißt uneigentlich Riemann-integrierbar über $[a,\infty)$ (Schreibweise $f \in R([a,\infty))$), wenn der Grenzwert

$$I := \lim_{c\to\infty} \int_a^c f(x)dx$$

existiert. In diesem Fall sagt man, dass das uneigentliche Integral

$$(*) \qquad \int_a^\infty f(x)dx$$

konvergiert (bzw. existiert) und bezeichnet damit den obigen Grenzwert. Falls dieser Grenzwert nicht existiert, heißt das Integral divergent. Das Integral in $(*)$ heißt absolut konvergent, wenn $\int_a^\infty |f(x)|dx$ konvergent ist.

(ii) Es sei $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ nicht beschränkt und $f \in R([a, c])$ für jedes $c \in (a, b)$. f heißt uneigentlich Riemann-integrierbar über $[a, b)$ wenn der Grenzwert

$$J := \lim_{c \to b-0} \int_a^c f(x)dx$$

existiert. In diesem Fall sagt man, dass das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)dx$ konvergiert (bzw. existiert) und bezeichnet J mit $\int_a^b f(x)dx$. Andernfalls heißt das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)dx$ divergent.

Beachte:

(a) Ist f beschränkt auf $[a, b)$ und $f \in R([a, c])$ für jedes $c \in (a, b)$, dann ist $f \in R([a, b])$ und J ist einfach das Riemann-Integral von f über $[a, b]$.

(b) Absolute Konvergenz eines uneigentlichen Integrals $\int_a^b f(x)dx$ wird wie in 14.9(i) definiert.

(c) Das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx$$

wird analog zu 14.9(i) definiert. Analog zu 14.9(ii) ist das uneigentliche Integral

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a+0} \int_c^b f(x)dx$$

definiert.

14.10 Beispiele:

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$

(ii) Das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\beta}$$

ist für $\beta \geq 1$ divergent und für $\beta < 1$ konvergent mit Wert $(1-\beta)^{-1}$.

(iii) Das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$$

ist für $\alpha \leq 1$ divergent und für $\alpha > 1$ konvergent mit Wert $(\alpha - 1)^{-1}$.

14.11 Beachte: Die folgenden Sätze werden nur für den Fall 14.9(i) angegeben. Es gelten aber analoge Resultate für den Fall 14.9(ii).

14.12 Satz: Es seien f, g uneigentlich Riemann-integrierbare Funktionen über $[a, \infty)$, dann gilt:

(i) Für jedes $b > a$ ist f uneigentlich Riemann-integrierbar über $[b, \infty)$ und es ist:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^\infty f(x)dx$$

(ii)

$$\lim_{b\to\infty} \int_b^\infty f(x)dx = 0$$

(iii) Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, \infty)$, dann ist:

$$\int_a^\infty f(x)dx \leq \int_a^\infty g(x)dx$$

14.13 Satz: Es sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar auf $[a, c]$ für jedes $c > a$, dann gilt: $\int_a^\infty f(x)dx$ ist konvergent $\iff$ Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $x_0 > a$, so dass $\forall\ x', x'' > x_0$ gilt:

$$|\int_{x'}^{x''} f(t)dt| < \varepsilon.$$

14.14 Folgerung: Ist $\int_a^\infty f(x)dx$ absolut konvergent, dann ist das uneigentliche Integral auch konvergent und es gilt:

$$|\int_a^\infty f(x)dx| \leq \int_a^\infty |f(x)|dx.$$

14.15 Satz: (Majoranten/Minorantenkriterium) Die Funktionen $g, f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ seien Riemann-integrierbar auf $[a, c]$ für jedes $c > a$ und es sei $b > a$.

(i) Ist $|f(x)| \leq g(x)$ für alle $x \geq b$ und ist $\int_b^\infty g(x)dx$ konvergent, dann ist das uneigentliche Integral $\int_b^\infty f(x)dx$ absolut konvergent.

(ii) Ist $f(x) \geq g(x) \geq 0$ für alle $x \geq b$ und ist $\int_b^\infty g(x)dx$ divergent, dann ist das uneigentliche Integral $\int_b^\infty f(x)dx$ divergent.

14.16 Bezeichnungen: Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$ und die uneigentlichen Integrale

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx \quad \text{und} \quad \int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

seien konvergent. Man setzt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

[Man beachte, dass wegen Satz 14.12 die linke Seite unabhängig von der Wahl von a ist!]

$$\int_{\infty}^{a} f(x)dx = -\int_{a}^{\infty} f(x)dx; \int_{a}^{-\infty} f(x)dx = -\int_{-\infty}^{a} f(x)dx.$$

Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar auf jedem Intervall $[a', b'] \subset (a, b)$. Weiter sei f weder in einer rechtsseitigen Umgebung von a noch in einer linksseitigen Umgebung von b beschränkt und es seien für ein $c \in (a, b)$ die uneigentlichen Integrale

$$\int_{c}^{b} f(x)dx \quad \text{und} \quad \int_{a}^{c} f(x)dx$$

konvergent, dann setzt man

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx$$

[dieser Wert ist unabhängig von der Wahl der Konstanten c]. Es sei $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar auf jedem Intervall $[a', b'] \subset [a, \infty)$ und in einer rechtsseitigen Umgebung von a unbeschränkt. Existieren für $c > a$ die uneigentlichen Integrale

$$\int_{a}^{c} f(x)dx \quad \text{und} \quad \int_{c}^{\infty} f(x)dx$$

so setzt man

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$$

(eine analoge Definition gilt für $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$).

14.17 Beispiel: Für jedes $\alpha > 0$ ist das uneigentliche Integral

$$\Gamma(\alpha) := \int_{0}^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

konvergent. Die so auf der positiven reellen Achse definierte Funktion heißt <u>Gamma-Funktion.</u> Es gilt:

(i) $\forall\ \alpha > 0 : \Gamma(\alpha + 1) = \Gamma(\alpha) \cdot \alpha$

(ii) $\forall\, n \in \mathbb{N} : \Gamma(n) = (n-1)!$

14.18 Integralkriterium für unendliche Reihen: Es sei $p \in \mathbb{N}, f : [p, \infty) \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar auf jedem Intervall $[p, x] (x \geq p)$, monoton fallend und $f(x) \geq 0 \;\forall\, x \geq p$. Dann gilt:

$$\int_p^\infty f(x)dx \text{ konvergiert} \iff \sum_{n=p}^\infty f(n) \text{ konvergiert.}$$

Im Fall der Konvergenz gilt:

$$(*) \qquad \sum_{n=p+1}^\infty f(n) \leq \int_p^\infty f(x)dx \leq \sum_{n=p}^\infty f(n).$$

14.19 Beispiel: Die Reihe

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\log n)^c}$$

ist für $c > 1$ konvergent und für $c \leq 1$ divergent.

14.20 Beispiel:

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

15. Das Riemann-Stieltjes Integral

15.1 Definition: Es seien $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ Funktionen, $f \in B[a,b], Z = (x_0, \ldots, x_n)$ eine Zerlegung von $[a,b]$ mit zugehörigem Zwischenwertvektor $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Die Summe

$$S_\alpha(f, Z, \xi) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})]$$

heißt Riemann-Stieltjessche Summe von f bzgl. α und Z (RS-Summe). Konvergiert für jede Folge $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zerlegungen mit $|Z_n| \to 0$ und zugehörigen Zwischenvektoren $\xi^{(n)}$ die RS-Folge $(S_\alpha(f, Z, \xi^{(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen – und damit ein und denselben – Grenzwert, so bezeichnet man diesen als Riemann-Stieltjes-Integral (RS-Integral) von f über $[a,b]$ bzgl. α.
Schreibweisen

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x); \int_a^b fd\alpha; \int_a^b fd\alpha(x)$$

$R_\alpha[a,b]$ bezeichnet die Menge aller Funktionen, die über $[a,b]$ bzgl. der Funktion α Riemann-Stieltjes integrierbar sind.

15.2 Bemerkung: Das Riemann-Stieltjes-Integral ist bzgl. Integrand und Integrator linear, d.h.

(i) $f \in R_\alpha[a,b], g \in R_\alpha[a,b] \Rightarrow f + g \in R_\alpha[a,b]$ und es gilt:

$$\int_a^b (f+g)(x)d\alpha(x) = \int_a^b f(x)d\alpha(x) + \int_a^b g(x)d\alpha(x)$$

(ii) $f \in R_\alpha[a,b] \cap R_\beta[a,b] \Rightarrow f \in R_{\alpha+\beta}[a,b]$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x)d[\alpha(x) + \beta(x)] = \int_a^b f(x)d\alpha(x) + \int_a^b f(x)d\beta(x)$$

(iii) $f \in R_\alpha[a,b], c \in \mathbb{R} \Rightarrow c \cdot f \in R_\alpha[a,b], f \in R_{c\cdot\alpha}[a,b]$ und es gilt

$$\int_a^b c \cdot f(x)d\alpha(x) = \int_a^b f(x)d(c \cdot \alpha(x)) = c \cdot \int_a^b f(x)d\alpha(x).$$

15.3 Beispiele:

(1) Ist α konstant, dann ist jedes f Riemann-Stieltjes integrierbar über $[a,b]$ bzgl. α und es gilt:

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = 0$$

(2) Es sei $\lfloor x \rfloor := \sup\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}$, dann gilt für jede stetige Funktion f auf $[0,m] (m \in \mathbb{N})$:

$$\int_0^m f(x) d\lfloor x \rfloor = \sum_{k=1}^m f(k)$$

D.h. jede endliche Summe kann als Riemann-Stieltjes-Integral geschrieben werden.

(3)

$$\int_0^1 x dx^2 = \frac{2}{3}$$

15.4 Satz: (partielle Integration) Ist f Riemann-Stieltjes-integrierbar auf $[a,b]$ bzgl. α, dann ist auch α Riemann-Stieltjes-integrierbar auf dem Intervall $[a,b]$ bzgl. f und es gilt

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) + \int_a^b \alpha(x) df(x) = f(x)\alpha(x) \mid_a^b = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) \ .$$

15.5 Bemerkung: Es werden analoge Bezeichnungen verwendet und es gelten analoge Eigenschaften wie in Abschnitt 13 und 14. So wird z.B. die Riemann-Stieltjes-Obersumme (bzgl. α und Z) definiert als

$$\bar{S}_\alpha(Z,f) := \sum_{j=1}^n \sup f(I_j) \cdot (\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})).$$

Entsprechend definiert man oberes und unteres Riemann-Stieltjes-Integral (vgl. 13.4) und $f \in R_\alpha[a,b]$ genau dann, wenn diese übereinstimmen! Außerdem gelten die Analoga von Satz 13.6, 13.8, 13.10 und 13.15 für die entsprechenden Größen in der Riemann-Stieltjes-Theorie.

Beispiele:

(1) f ist Riemann-Stieltjes-integrierbar über $[a,b]$ bzgl. der Funktion α genau dann, wenn gilt:
Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine Zerlegung Z von $[a,b]$, so dass für die Riemann-Stieltjes Ober- und Untersumme von f bzgl. α und Z gilt

$$|\bar{S}_\alpha(Z,f) - \underline{S}_\alpha(Z,f)| < \varepsilon.$$

(2) Ist $a < c < b$, dann gilt: $f \in R_\alpha[a,b] \Rightarrow f \in R_\alpha[a,c] \cap R_\alpha[c,b]$. Außerdem ist

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^c f(x) d\alpha(x) + \int_c^b f(x) d\alpha(x).$$

15.6 Satz: Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und α monoton, dann ist f Riemann-Stieltjes-integrierbar auf $[a, b]$ bzgl. α.

15.7 Satz: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton und $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton und stetig, dann ist f auf $[a, b]$ Riemann-Stieltjes-integrierbar bzgl. α.

15.8 Bemerkung: Es seien $\alpha, f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Funktionen, $f \in R_\alpha[a, b]$. Unterscheiden sich f und g nur an endlich vielen Stellen $z_1, \ldots, z_k \in [a, b]$ und ist α in diesen Punkten stetig, dann gilt $g \in R_\alpha[a, b]$ und

$$\int_a^b g(x) d\alpha(x) = \int_a^b f(x) d\alpha(x).$$

Beachte: Im Fall des Riemann-Integrals ist $\alpha(x) = x$ und die Stetigkeit der Funktion α damit automatisch erfüllt.

15.9 Satz: Es sei $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und differenzierbar. Sind $f, \alpha' : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar auf $[a, b]$, dann ist f auf $[a, b]$ bzgl. α Riemann-Stieltjes-integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^b f(x) \alpha'(x) dx.$$

15.10 Beispiele:

(i) Es sei $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und stetig differenzierbar, dann gilt für $k \in \mathbb{N}0$,

$$\int_a^b F^k(x) dF(x) = \frac{1}{k+1}(F^{k+1}(b) - F^{k+1}(a)).$$

(ii)

$$\int_1^2 x d \log x = 1.$$

(iii) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(a) = f(b) = 0$ und $\int_a^b f^2(x) dx = 1$, dann ist

$$\int_a^b x f(x) f'(x) dx = -\frac{1}{2}.$$

15.11 Satz: Es sei $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion, d.h. es gibt $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$ und Konstanten $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$, so dass α die Darstellung

$$\alpha(x) = \sum_{j=1}^k c_j I_{(x_{j-1}, x_j)}(x) \quad \forall\ x \in [a, b] \backslash \{x_0, \ldots, x_n\}$$

besitzt. Dann ist jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bzgl. α Riemann-Stieltjes-integrierbar und es gilt mit $\alpha_0 = c_1 - \alpha(a), \alpha_j = c_{j+1} - c_j, j = 1, \dots, k-1, \alpha_k = \alpha(b) - c_k$

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j f(x_j).$$

D.h. das Riemann-Stieltjes-Integral ist gleich der Summe der Funktionswerte an den Sprungstellen multipliziert mit den entsprechenden Sprunghöhen.

15.12 Beispiel: Für $p, n \in \mathbb{N}$ sei $S_p(n) = \sum_{j=1}^n j^p$, dann gilt die Rekursion

$$\begin{aligned} S_1(n) &= \frac{n(n+1)}{2} \\ S_p(n) &= \frac{1}{p+1}\left[n(n+1)^p - \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k-1} S_k(n)\right] \end{aligned}$$

15.13 Satz: Es seien $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ Funktionen, $f \in R_\alpha[a,b]$ und α monoton wachsend. Außerdem sei $\varphi : [A,B] \to [a,b]$ streng monoton wachsend und stetig mit $\varphi(A) = a, \varphi(B) = b$, dann ist $f \circ \varphi \in R_{\alpha\circ\varphi}[A,B]$ und es gilt

$$\int_A^B (f \circ \varphi(x))d(\alpha \circ \varphi)(x) = \int_a^b f(x)d\alpha(x).$$

15.14 Beispiele:

(1) Unter Differenzierbarkeitsannahmen liefert Satz 15.13 für $\alpha(x) = x$ Satz 13.27, d.h.

$$\int_A^B f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(A)}^{\varphi(B)} f(x)dx$$

(2)

$$\int_1^2 x de^x = \int_e^{e^2} \log y dy = e^2.$$

15.15 Übung: Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ auf $[a,b]$ Riemann-Stieltjes-integrierbar bzgl. $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ und α monoton wachsend. Dann gilt die Höldersche Ungleichung (für alle $p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)

(1) $$\left|\int_a^b f(x)g(x)d\alpha(x)\right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p d\alpha(x)\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q d\alpha(x)\right)^{1/q}$$

und die Dreiecksungleichung

$$(2)\quad \left(\int_a^b (f(x)+g(x))^2 d\alpha(x)\right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b f^2(x)d\alpha(x)\right)^{1/2} + \left(\int_a^b g^2(x)d\alpha(x)\right)^{1/2}.$$

15.16 Bemerkung: Es existiert eine Theorie uneigentlicher Riemann-Stieltjes-Integrale, wie in Abschnitt 14 für den Fall $\alpha(x) = x$ (Riemann-Integral) dargestellt. Z.B. definiert man, falls $f \in R_\alpha[a,b]$ für alle $b > 0$

$$\int_a^\infty f(x)d\alpha(x) = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)d\alpha(x)$$

(falls dieser Grenzwert existiert). Ist $\alpha : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ Treppenfunktion mit Sprüngen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ an den Stellen $x_0, x_1, \ldots$ so kann man (wie in 15.11) zeigen

$$\int_a^\infty f(x)d\alpha(x) = \sum_{k=1}^\infty \alpha_k f(x_k)$$

und damit auch unendliche Summen als Integral auffassen.

16. Fourierreihen

16.1 Satz: Die trigonometrische Reihe

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

sei auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ gleichmäßig konvergent mit Wert $f(x)$, dann gelten für die Koeffizienten die <u>Euler-Fourierschen Formeln:</u>

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

16.2 Hilfssatz:

$$\begin{aligned}
(*) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)dx &= \quad 0 \quad \forall\, n, m = 0, 1, \ldots \\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \neq m \\ \pi & \text{falls } n = m \geq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

16.3 Definition: Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Funktion [d.h. $f(x + 2\pi) = f(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$] und Riemann-integrierbar auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$. Die Zahlen

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \quad n = 0, 1, \ldots \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \quad n = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

heißen <u>Fourierkoeffizienten</u> der Funktion f und die zugehörige trigonometrische Reihe

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Fourierreihe von f.

<u>Beachte:</u> Diese Reihe muß weder konvergieren, noch muß im Fall der Konvergenz ihr Wert gleich $f(x)$ sein. Schreibweise:

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

16.4 Beispiele: Die Übertragung der Definition 16.3 auf andere Intervalle der Länge 2π ist offensichtlich. Z.B. gilt:

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2}$ für $x \in (0, 2\pi)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} = \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12}$ für $x \in [0, 2\pi]$

Insbesondere gilt:

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

16.5 Beispiele: (Alle Funktionen werden auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ betrachtet und dann 2π-periodisch fortgesetzt.)

(i) $\displaystyle x \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(nx)}{n}$

(ii) $\displaystyle |x| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$

(iii) $\displaystyle x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4\cos(nx)}{n^2}$

Die Frage, ob diese Fourierreihen konvergieren und im Fall der Konvergenz die entsprechende Funktion auf der linken Seite liefern, wird in Beispiel 16.11 beantwortet.

16.6 Satz: (Beste Approximation von f durch trigonometrische Reihen im quadratischen Mittel) Es sei f Riemann-integrierbar auf $[-\pi, \pi]$,

$$S_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

die n-te Partialsumme ihrer Fourierreihe und

$$T_n := \{\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx) \mid \alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}\}$$

die Menge aller <u>trigonometrischen Polynome von Grad n.</u> Dann gilt:

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (f - S_n)^2(x)dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} (f - t)^2(x)dx \quad \forall\, t \in T_n$

(2) Besselsche Gleichung

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f - S_n)^2(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \pi\Big[\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\Big]$$

(3) Besselsche Ungleichung

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$$

16.7 Satz:(Konvergenz im quadratischen Mittel) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische und auf $[-\pi, \pi]$ Riemann-integrierbare Funktion, dann konvergiert die Fourierreihe von f im quadratischen Mittel gegen f, d.h.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (S_n(x) - f(x))^2 dx = 0$

und es gilt die Parsevalsche Gleichung

(2) $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$

16.8 Beispiel: Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodisch und

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } -\pi \leq x < 0 \\ 1 & \text{für } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

dann konvergiert die Fourierreihe von f

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}$$

<u>nicht</u> punktweise gegen f auf $[-\pi, \pi]$ aber im quadratischen Mittel.

16.9 Satz: Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige und 2π-periodische Funktion, die auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ stückweise stetig differenzierbar sei. D.h. es existiert eine Zerlegung $Z_r = \{t-1, \ldots, t_r\}$ des Intervalls $[-\pi, \pi]$ mit

$$-\pi = t_0 < t_1 < \ldots < t_{r-1} < t_r = \pi,$$

so dass $f_{|[t_{j-1}, t_j]} \in C^1([t_{j-1}, t_j])$ für alle $j = 1, \ldots, r$ gilt. Dann konvergiert die Fourierreihe von f gleichmäßig auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ gegen f.

16.10 Bemerkung: In Satz 16.9 kann auf die Stetigkeit von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verzichtet werden. Genauer: Ist f stückweise stetig differenzierbar, so konvergiert die Fourierreihe von f gleichmäßig gegen f auf jedem kompakten Intervall, das keine Unstetigkeitsstelle von f enthält.

16.11 Beispiele: (vgl. Beispiel 16.5)

(1) Für alle $x \in (-\pi, \pi)$ gilt:

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(nx)}{n}$$

(2) Für alle $x \in [-\pi, \pi]$ gilt:

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$$

(3) Für alle $x \in [-\pi, \pi]$ gilt:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(nx)}{n^2}$$

VI Differentialrechnung für Funktionen in mehreren Veränderlichen

17 Normierte Vektorräume

17.1 Definition: Es sei E ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ heißt Norm auf E falls sie die folgenden Eigenschaften besitzt

(a) Für alle $x \in E$ gilt: $\|x\| \geq 0$ (Nichtnegativität)

(b) $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (Definitheit)

(c) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}, x \in E : \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ (Homogenität)

(d) Für alle $x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)

Ist E mit einer Norm versehen, so heißt $(E, \|\cdot\|)$ normierter Vektorraum. Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf E heißen äquivalent, falls es Zahlen $\alpha, \beta > 0$ gibt, so dass gilt:

$$\forall\ x \in E : \alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1$$

17.2 Beispiele: Der $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n)^T \mid x_j \in \mathbb{R}; j = 1, \ldots, n\}$ mit der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation ist ein Vektorraum. Für $p \in [1, \infty)$ sei

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p};$$

für $p = \infty$ setzen wir

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Dann definiert $\|\cdot\|_p$ für jedes $p \in [1, \infty]$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Wichtige Spezialfälle sind:

$$p = 1 : \quad \|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \quad \text{Betragssummennorm}$$

$$p = 2 : \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\right)^{1/2} \quad \text{Euklidnorm}$$

$$p = \infty : \quad \|x\|_\infty = \max_{j=1}^{n} |x_j| \quad \text{Maximumsnorm}$$

Alle hier definierten Normen sind äquivalent und es gilt

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p$$

17.3 Beispiel: $E = C([a,b])$ sei der Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a,b]$, dann definiert die Abbildung $\| \cdot \| : C([a,b]) \to \mathbb{R}$,

$$\|f\| := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

eine Norm auf $C([a,b])$, die <u>Supremumsnorm</u> genannt wird.

17.4 Definition: Es seien $(E_j, \| \cdot \|_j) \quad j = 1, \ldots, p$ normierte Vektorräume. Mit der koordinatenweisen Addition

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_p + y_p \end{pmatrix} \qquad (x_j, y_j \in E_j; j = 1, \ldots, p)$$

und komponentenweisen Skalarmultiplikation ($\alpha \in \mathbb{R}$)

$$\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_p \end{pmatrix} \qquad (x_j \in E_j; j = 1, \ldots, p)$$

wird auch $E_1 \times \ldots \times E_p$ zu einem Vektorraum. Mit der Definition

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max\{\|x_j\|_j \mid 1 \leq j \leq p\}$$

wird auf $E_1 \times \ldots \times E_p$ eine Norm eingeführt, die ebenfalls als <u>Maximumsnorm</u> bezeichnet wird (man vergleiche diese Definition für $E_j = \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$ mit Beispiel 17.2).

17.5 Definition: Es sei $(E, \| \cdot \|)$ ein normierter Vektorraum. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in E$ heißt konvergent genau dann, wenn es ein $x \in E$ gibt, so dass gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \quad \text{so dass } \forall\, n \geq n_0 : \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

<u>Schreibweise:</u> $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$. Der Begriff des Häufungswertes wird wie in Definition 6.0 erklärt und es gilt auch das Analogon von Satz 6.2.

17.6 Beispiel:

(1) Sind $(x_n)_{\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in E, $\alpha \in \mathbb{R}$, dann sind auch $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\alpha x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) &= \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n \\ \lim_{n\to\infty} \alpha x_n &= \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} x_n \end{aligned}$$

(2) Es sei $(C([a,b]), \|\cdot\|)$ der mit der Supremumsnorm versehene Vektorraum (vgl. Beispiel 17.3) der auf dem Intervall $[a,b]$ stetigen Funktionen, $f, f_n \in C([a,b])(n \in \mathbb{N})$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f$$

genau dann, wenn die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f auf $[a,b]$ gleichmäßig konvergiert .

17.7 Definition und Satz: Es sei $(E, \|\cdot\|)$ normierter Vektorraum. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_n \in E$ heißt <u>Cauchy-Folge</u> genau dann, wenn gilt:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N},\ \text{so dass}\ \forall\ n, m \geq n_0 : \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

In einem normierten Vektorraum ist jede konvergente Folge auch eine Cauchy-Folge (die Umkehrung ist i.a. falsch).

17.8 Definition: Ein normierter Vektorraum heißt <u>Banachraum</u> (bzw. vollständig), wenn jede Cauchy-Folge auch konvergent ist.

17.9 Beispiele:

(1) $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ist Banachraum (bzw. vollständig).

(2) Der Vektorraum $C([a,b])$ versehen mit der Supremumsnorm (vgl. Beispiel 17.3) ist ein Banachraum.

(3) Versieht man den Vektorraum $C([a,b])$ mit der Norm

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|dx,$$

so ist der normierte Vektorraum $(C([a,b]), \|\cdot\|_1)$ <u>nicht</u> vollständig.

17.10 Lemma: Es seien $(E_j, \|\cdot\|_j)$ normierte Vektorräume ($j = 1, \ldots, p$) und $(E_1 \times \ldots \times E_p, \|\cdot\|_\infty)$ der in 17.4 definierte normierte Vektorraum (mit der Maximumsnorm versehen). Dann gilt:

$$x^{(n)} := \begin{pmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{pn} \end{pmatrix} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

genau dann, wenn für jedes $j = 1, \ldots, p$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_{jn} = x_j$$

(d.h. die Konvergenz in $E_1 \times \ldots \times E_p$ ist äquivalent zu der Konvergenz der einzelnen Koordinaten).

17.11 Satz: $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum für jedes $n \in \mathbb{N}$.

17.12 Satz: Zwei beliebige Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ auf $\mathbb{R}^p$ sind äquivalent, d.h. es gibt positive Konstanten α und β mit

$$\alpha\|x\|' \leq \|x\| \leq \beta\|x\|'$$

für alle $x \in \mathbb{R}^p$.

17.13 Folgerung:

- Konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzgl. einer Norm auf $\mathbb{R}^p$, so auch bzgl. jeder anderen Norm.
- Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge bzgl. einer Norm auf $\mathbb{R}^p$, so auch bzgl. jeder anderen Norm.
- $(\mathbb{R}^p, \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum für <u>jede</u> Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^p$.

17.14 Definition: $(E, \|\cdot\|)$ sei ein normierter Vektorraum. Für $\varepsilon > 0, x_0 \in E$ heißt

$$U_\varepsilon(x_0) := \{x \in E| \quad \|x - x_0\| < \varepsilon\}$$

<u>ε-Umgebung (ε-Kugel) um x_0.</u> $\dot{U}_\varepsilon(x_0) = U_\varepsilon(x_0)\backslash\{x_0\}$ heißt <u>punktierte ε-Umgebung.</u> Eine Menge $S \subset E$ heißt <u>beschränkt,</u> wenn es ein $r > 0$ gibt, so dass $S \subset U_r(0)$ gilt.

17.15 Definition: $(E, \|\cdot\|)$ sei ein normierter Vektorraum und $A \subset E$ eine Menge. Ein Punkt $x_0 \in A$ heißt <u>innerer Punkt</u> von A genau dann, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $U_\varepsilon(x_0) \subset A$ gilt. Die Menge

$$A^0 := \{x \in A \mid x \quad \text{ist innerer Punkt von } A\}$$

heißt <u>Inneres von A.</u>
Die Menge A heißt

- <u>offen</u> $:\iff A \subset A^0 \iff A = A^0$
- <u>abgeschlossen</u> $:\iff E \backslash A$ ist offene Menge

Ein Punkt $x \in E$ heißt <u>Häufungspunkt von A</u> genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\dot{U}_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset.$$

Wir definieren

$$H(A) := \{x \in E \mid x \quad \text{ist Häufungspunkt von } A\}$$

und bezeichnen mit

$$\bar{A} = A \cup H(A)$$

die <u>abgeschlossene Hülle von A.</u> Ein Punkt $x \in E$ heißt Randpunkt von A genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:

$$U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \quad \text{und} \quad U_\varepsilon(x) \cap (E \backslash A) \neq \emptyset.$$

Die Menge

$$\partial A := \{x \in E \mid x \quad \text{ist Randpunkt von } A\}$$

heißt <u>Rand</u> der Menge A. Ein Element $x \in E$ heißt <u>isolierter Punkt von A</u> genau dann, wenn $x \in A \backslash H(A)$ gilt.

17.16 Beispiel: Es sei $(E, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ und

$$A = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid 4x_1^2 - x_2^2 > 1\},$$

dann ist A offen,

$$\partial(A) = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid 4x_1^2 - x_2^2 = 1\}$$

und es gilt

$$\bar{A} = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid 4x_1^2 - x_2^2 \geq 1\} = H(A).$$

17.17 Satz: (vgl. Satz 8.4) Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum.
Die Vereinigung (der Durchschnitt) beliebig vieler offener (abgeschlossener) Mengen ist offen (abgeschlossen).
Der Durchschnitt (die Vereinigung) endlich vieler offener (abgeschlossener) Mengen ist offen (abgeschlossen).

17.18 Satz: Es sei $(E, \|\cdot\|)$ normierter Vektorraum, $A \subset E$

- A^0 ist offen
- $\bar{A}$ ist abgeschlossen
- $\bar{A} = \bigcap\limits_{\substack{F \supset A \\ F \text{ abgeschlossen}}} F$
- $x \in H(A) \iff$ es gibt eine Folge $x_n \in A\backslash\{x\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$
- A abgeschlossen $\iff H(A) \subset A$

17.19 Definition: Es sei E ein normierter Vektorraum, Λ eine Indexmenge und für $\lambda \in \Lambda$ sei $O_\lambda \subset E$ eine offene Menge. Das Mengensystem $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ heißt eine offene Überdeckung von A, falls gilt

$$A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda.$$

Die Menge A heißt kompakt, falls jede offene Überdeckung von A eine endliche Teilüberdeckung von A enthält. D.h. es gibt eine endliche Menge $L \subset \Lambda$ mit

$$A \subset \bigcup_{\lambda \in L} O_\lambda.$$

Die Menge A heißt folgenkompakt, falls jede Folge in A eine konvergente Teilfolge besitzt, die gegen einen Punkt aus A konvergiert.

17.20 Satz: Es sei E ein normierter Vektorraum und $\emptyset \neq A \subset E$. A ist genau dann folgenkompakt, wenn jede unendliche Teilmenge von A einen Häufungspunkt in A besitzt.

17.21 Satz: Eine Menge in einem normierten Vektorraum ist genau dann kompakt, wenn sie folgenkompakt ist.

17.22 Satz: Jede kompakte Menge in einem normierten Vektorraum ist beschränkt und abgeschlossen.

17.23 Beispiel:[Die Umkehrung von Satz 17.22 ist falsch!] Es sei

$$B(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ beschränkt}\}$$

der Vektorraum der reellwertigen und beschränkten Funktionen und durch

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| \ \mid \ x \in \mathbb{R}\}$$

eine Norm auf $B(\mathbb{R})$ definiert. Dann ist die Menge

$$A := \{f \in B(\mathbb{R}) \mid \|f\| \leq 1\}$$

abgeschlossen und beschränkt aber nicht kompakt.

Beachte: $A = \overline{U_1(0)}$ heißt abgeschlossene Einheitskugel.

17.24 Beispiel: Ist A kompakte Menge in einem normierten Vektorraum und $S \subset A$ abgeschlossen, dann ist auch S kompakt.

17.25 Satz: Es seien $(E_1, \|\cdot\|_1), \ldots, (E_n, \|\cdot\|_n)$ normierte Vektorräume $A_j \subset E_j (j = 1, \ldots, n)$ und der Produktraum $E_1 \times \ldots \times E_n$ mit der Maximumsnorm versehen (vgl. Bsp. 17.4).

(1) Sind $A_1, \ldots, A_n$ offen, dann ist auch $A_1 \times \ldots \times A_n$ offen.

(2) Sind $A_1, \ldots, A_n$ abgeschlossen, dann ist auch $A_1 \times \ldots \times A_n$ abgeschlossen.

(3) Sind $A_1, \ldots, A_n$ kompakt, dann ist auch $A_1 \times \ldots \times A_n$ kompakt.

17.26 Satz: (Charakterisierung kompakter Mengen in $\mathbb{R}^n$) Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

17.27 Definition: Es seien $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ normierte Vektorräume, $S \subset E, x_0 \in H(S)$. Eine Funktion $f : E \to F$ hat im Punkt x_0 einen Grenzwert, wenn es ein $L \in F$ gibt, so dass gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : \ \forall\, x \in \dot{U}_\delta(x_0) \cap S : \|f(x) - L\|_F < \varepsilon.$$

17.28 Bemerkung: Es gelten analoge Eigenschaften zu Abschnitt 9. Zum Beispiel:

(1) (Folgenkriterium) $f : S \to F$ hat im Punkt $x_0 \in H(S)$ einen Grenzwert genau dann, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in S\backslash\{x_0\}, x_n \to x_0$ die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist [in diesem Fall haben alle Folgen $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ denselben Grenzwert].

(2) Sind $f, g : S \to F$ Funktionen mit $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = M$, dann ist

- $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) = L + M$
- $\lim\limits_{x\to x_0} (\alpha f)(x) = \alpha L \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
- falls $F = \mathbb{R}$ und $M \neq 0 : \lim\limits_{x\to x_0} (\dfrac{f}{g})(x) = \dfrac{L}{M}$
- falls $F = \mathbb{R}$ und $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in S\backslash\{x_0\}$ dann gilt: $L \leq M$.

17.29 Satz: Es seien E, F, G normierte Vektorräume $S \subset E, T \subset F$ und $f : S \to F$, $g : T \to G$ Funktionen mit $f(S) \subset T$. Ist $x_0 \in H(S)$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0 \in H(T)$ und $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = L$, dann gilt mit der Bezeichnung $S_0 = \{x \in S \mid f(x) \neq y_0\}$:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in S_0}} (g \circ f)(x) = L.$$

17.30 Definition: Es seien $E, F_1, \ldots, F_m$ normierte Vektorräume und $F := F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_m$ mit der Maximumsnorm versehen. Die Abbildung

$$\pi_j : \begin{cases} F & \to F_j \\ y & = (y_1, \ldots, y_m)^T \to \pi_j(y) := y_j \end{cases}$$

heißt <u>(Koordinaten-) Projektion in $F_j (j = 1, \ldots, m)$.</u> Ist $f : E \to F$ eine Abbildung, dann heißt die Funktion $f_j := \pi_j \circ f$ die j-te <u>Koordinatenabbildung von f.</u>
<u>Schreibweise:</u> $f = (f_1, \ldots, f_m)^T$.

17.31 Beispiel: (Oberfläche der Kugel im $\mathbb{R}^3$, <u>Kugelkoordinaten</u>) Es sei $r \in \mathbb{R}^+$ und

$$f : \begin{cases} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi) & \to \mathbb{R}^3 \\ (\vartheta, \varphi) & \to (r\cos\varphi\cos\vartheta, r\sin\varphi\cos\vartheta, r\sin\vartheta)^T. \end{cases}$$

Dann liegt jeder Punkt aus $f([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi))$ auf der Kugeloberfläche

$$S := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_2 = r\}$$

und die Abbildung $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times [0, 2\pi) \to S\backslash\{(0, 0, r)^T\}$ ist bijektiv.

17.32 Satz: Es seien $E, F_1, \ldots, F_m$ normierte Vektorräume, $S \subset E$, $F := F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_m$ mit der Maximumsnorm versehen (vgl. Bsp. 17.4) und $f : S \to F$ eine Abbildung mit Koordinatenabbildungen $f_j = \pi_j \circ f : S \to F_j$. Die Funktion f hat in dem Punkt $x_0 \in H(S)$ einen Grenzwert genau dann, wenn für $j = 1, \ldots, m$ die Funktionen f_j in x_0 einen Grenzwert haben. In diesem Fall gilt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = (\lim_{x \to x_0} f_1(x), \ldots, \lim_{x \to x_0} f_m(x))^T$$

(d.h. der Grenzwert kann komponentenweise berechnet werden).

17.33 Definition: Es seien $(E, \|\cdot\|_E), (F\|\cdot\|_F)$ normierte Vektorräume, $S \subset E$. Eine Abbildung $f : S \to F$ heißt <u>stetig im Punkt $x_0 \in S$</u> genau dann, wenn gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0, \text{ so dass } \forall\, x \in U_\delta(x_0) \cap S \text{ gilt: } \|f(x) - f(x_0)\|_F < \varepsilon.$$

f heißt <u>stetig auf $T \subset S$,</u> falls f in jedem Punkt von T stetig ist.

17.34 Satz: Es seien E, F normierte Vektorräume und $S \subset E$. Eine Abbildung $f : S \to F$ ist im Punkt $x_0 \in S$ stetig genau dann, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in S mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

17.35 Beispiel: Der Stetigkeits-(und auch Grenzwert-)begriff hängt immer von den Normen auf E, F ab!! Dazu betrachte $E = C[0,1], F = \mathbb{R}$

$$f : \begin{cases} C[0,1] & \to \mathbb{R} \\ x & \to \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)| =: \|x\|_\infty \end{cases}$$

- Versieht man E mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$ und $\mathbb{R}$ mit $|\cdot|$, dann ist f offensichtlich stetig.
- Versieht man E aber mit der Norm $\|x\|_1 := \int_0^1 |x(t)|dt$, dann ist f <u>nicht</u> stetig.

17.36 Übung; Es seien $E, F_1, \ldots, F_m$ normierte Vektorräume, $S \subset E$ und $F := F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_m$ mit der Maximumsnorm versehen (vgl. Bsp. 17.4). Eine Abbildung $f : S \to F$ ist genau dann stetig, wenn jede ihrer Koordinatenabbildungen $f_j = \pi_j \circ f : S \to F_j$ stetig ist $(j = 1, \ldots, m)$.

17.37 Satz: Es seien E, F, G normierte Vektorräume $S \subset E, T \subset F$ und $f : S \to F, g : T \to G$ Abbildungen mit $f(S) \subset T$. Ist f im Punkt $x_0 \in S$ stetig und g im Punkt $y_0 = f(x_0)$ stetig, dann ist $g \circ f$ im Punkt x_0 stetig.

17.38 Beispiel: Jede lineare Abbildung $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist stetig und es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so dass gilt: $\forall\, x \in \mathbb{R}^n\ \|\lambda(x)\| \leq c\|x\|$.

17.39 Übung: Es seien E, F normierte Vektorräume, $S \subset E$ und $f, g : S \to F$ Abbildungen, die stetig im Punkt $x_0 \in S$ sind. Dann gilt

(1) $f + g$ ist im Punkt x_0 stetig.

(2) αf ist im Punkt x_0 stetig ($\alpha \in \mathbb{R}$).

(3) Ist $F = \mathbb{R}$, dann ist $f \cdot g$ im Punkt x_0 stetig.

(4) Ist $F = \mathbb{R}$, dann ist $\frac{f}{g}$ im Punkt x_0 stetig, falls $g(x_0) \neq 0$ gilt.

17.40 Satz: Es seien E, F normierte Vektorräume und es sei $f : E \to F$ eine Abbildung. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(1) f ist stetig auf E.

(2) Das Urbild jeder offenen Menge in F (unter der Abbildung f) ist offen in E.

(3) Das Urbild jeder abgeschlossenen Menge in F (unter der Abbildung f) ist abgeschlossen in E.

17.41 Satz: Sind E, F normierte Vektorräume, $S \subset E$ eine kompakte Menge und $f : S \to F$ stetig, dann ist auch $f(S)$ kompakt.
Gilt außerdem $F = \mathbb{R}$, dann ist f auf der Menge S beschränkt und nimmt auf S ein Maximum und Minimum an.

17.42 Definition: Es seien $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ normierte Vektorräume und $S \subset E$. Eine Abbildung $f : S \to F$ heißt gleichmäßig stetig auf S genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x, x' \in S$ mit $\|x - x'\|_E < \delta$ gilt: $\|f(x) - f(x')\|_F < \varepsilon$.

17.43 Satz: Es sei E, F normierte Vektorräume und $S \subset E$ kompakt. Ist die Abbildung $f : S \to F$ auf S stetig, so ist sie auch gleichmäßig stetig auf S.

17.44 Übung: Es seien $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ normierte Vektorräume und $S \subset E$. Eine Funktion $f : S \to F$ heißt Lipschitz-stetig der Ordnung $\alpha \in (0, 1]$, falls es eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x, y \in S$ gilt

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq C\|x - y\|_E^\alpha.$$

Jede Lipschitz-stetige Funktion ist gleichmäßig stetig.

18. Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

18.1 Definition: Es sei $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n$ offen und $x_0 \in S$. Eine Abbildung $f : S \to \mathbb{R}^m$ heißt (total) differenzierbar im Punkt x_0, wenn es eine lineare Abbildung $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt, so dass in einer Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ von x_0 gilt

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \lambda(h) + r(h),$$

wobei r eine in der Umgebung des Nullvektors im ($\mathbb{R}^n$) definierte $\mathbb{R}^m$-wertige Funktion ist mit

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$$

[Schreibweise: $r(h) = o(\|h\|)$]
Dabei bezeichnet $\|\cdot\|$ irgendeine Norm auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$ und die Abbildung λ ist eindeutig bestimmt. f heißt auf S (total) differenzierbar, falls f in jedem Punkt $x \in S$ differenzierbar ist.
Die lineare Abbildung λ heißt Ableitung von f im Punkt x_0 bzw. (totales) Differential von f an der Stelle x_0 und wird mit $D_f(x_0)$ bezeichnet. Die zugehörige (bzgl. der kanonischen Basen von $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$) gebildete $m \times n$ Matrix wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet. Ist $n = m$, so heißt $\det f'(x_0)$ die Funktionaldeterminante von f im Punkt x_0.

18.2 Beispiel und Bemerkungen:

(1) Für $n = m = 1$ liefert Definition 18.1 den Differenzierbarkeitsbegriff aus Kapitel 10.

(2) Ist f (total) differenzierbar in x_0, dann ist f auch stetig in x_0.

(3) Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gegeben durch $f(x) = c$, dann ist f auf $\mathbb{R}^n$ (total) differenzierbar mit $D_f(x_0) = 0 \ \forall \ x_0 \in \mathbb{R}^n$.

(4) Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung, dann ist f auf $\mathbb{R}^n$ (total) differenzierbar und es gilt $D_f(x_0) = f$.

(5) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ gegeben durch $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$, dann ist f auf $\mathbb{R}^2$ (total) differenzierbar, für jedes $x \in \mathbb{R}^2$ ist:

$$\lambda := D_f(x) : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ y & \to \lambda(y) = (x_2, x_1)\binom{y_1}{y_2} = x_2 y_1 + x_1 y_2 \end{cases}$$

und es gilt: $f'(x) = (x_2, x_1)$.

(6) Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \|x\|_2^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2$; dann ist f (total) differenzierbar auf $\mathbb{R}^n$, für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist:

$$\lambda = D_f(x) : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to \mathbb{R} \\ y & \to \lambda(y) = 2x^T y = 2\sum_{j=1}^n x_j y_j \end{cases}$$

und es gilt: $f'(x) = 2(x_1, \ldots, x_n) = 2x^T$.

18.3 Satz (Kettenregel): Es seien $S \subset \mathbb{R}^n, T \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen, $f : S \to \mathbb{R}^m, g : T \to \mathbb{R}^p$ Abbildungen mit $f(S) \subset T$. Ist f in x_0 (total) differenzierbar und g in $y_0 = f(x_0)$ (total) differenzierbar, dann ist auch $g \circ f$ in x_0 (total) differenzierbar und es gilt

$$D_{g\circ f}(x_0) = D_g(f(x_0)) \circ D_f(x_0)$$

bzw. (in Matrixschreibweise)

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

18.4 Satz: Die Abbildung $f : S \to \mathbb{R}^m (S \subset \mathbb{R}^n$ offen) ist genau dann (total) differenzierbar in $x_0 \in S$, wenn für alle $j = 1, \dots, m$ die Koordinatenabbildung $f_j := \pi_j \circ f : S \to \mathbb{R}$ (total) differenzierbar ist. In diesem Fall gilt

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} f_1'(x_0) \\ \vdots \\ f_m'(x_0) \end{pmatrix} ; D_f(x_0) = \begin{pmatrix} D_{f_1}(x_0) \\ \vdots \\ D_{f_m}(x_0) \end{pmatrix}$$

18.5 Satz: Es sei $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in S$ und die Abbildungen $f, g : S \to \mathbb{R}^m$ seien (total) differenzierbar in $x_0 \in S$. Dann gilt:

(1) $f + g$ ist differenzierbar in x_0 und es gilt $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

(2) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist αf differenzierbar in x_0 und es gilt $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$.

(3) Ist $m = 1$, so ist $f \cdot g$ differenzierbar in x_0 und es gilt

$$(f \cdot g)'(x_0) = g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

(4) Ist $m = 1, g(x_0) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ differenzierbar in x_0 und es ist

$$(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

18.6 Definition: Es sei $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\xi \in S$ und $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ bezeichne den i-ten Einheitsvektor. Eine Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ heißt <u>im Punkt $\xi \in S$ partiell (nach der Variablen x_i) differenzierbar,</u> falls der Grenzwert

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \in \mathbb{R}}} \frac{f(\xi + te_i) - f(\xi)}{t} =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi) =: \frac{\partial f(\xi)}{\partial x_i}$$

existiert (beachte $t \in \mathbb{R}$). $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi)$ heißt die partielle Ableitung von f nach x_i im Punkt ξ (weitere Schreibweisen $f_{x_i}(\xi), \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_i} f, D_i f$). Existiert die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi)$ in einer Umgebung $U_\varepsilon(\xi) \subset \mathbb{R}^n$ von ξ und ist die Abbildung

$$f_{x_i} : \begin{cases} U_\varepsilon(x_i) & \rightarrow \mathbb{R} \\ u & \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(u) \end{cases}$$

partiell in ξ differenzierbar, so definiert man

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\xi) := \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi)).$$

Für $i = j$ schreibt man auch $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$.

18.7 Satz: (Schwarz) Es sei $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung, für die die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ auf S existieren und stetig sind. Dann gilt für alle $\xi \in S$

$$\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Ein entsprechender Satz gilt auch für höhere partielle Ableitungen!

18.8 Bezeichnungen: Wir setzen $\frac{\partial^0 f}{\partial x_j} = f$ und für $p \in \mathbb{N}$

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_j^p} := \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x_j^{p-1}}).$$

Die höheren partiellen Ableitungen der Ordnung k ($k = \sum_{j=1}^n k_j$)

$$(*) \qquad \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}^{k_1} \ldots \partial x_{i_n}^{k_n}} := \frac{\partial^{k_1}}{\partial x_{i_1}^{k_1}} \left(\frac{\partial^{k_2}}{\partial x_{i_2}^{k_2}} (\ldots \frac{\partial^{k_n} f}{\partial x_{i_n}^{k_n}}) \right)$$

werden iterativ definiert. $C^p(S)$ bezeichnet die Menge aller Funktionen $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, für die die partiellen Ableitungen der Form $(*)$ für alle $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}0$ mit $0 \leq k_1 + \ldots + k_n \leq p$ und für alle Permutationen $(i_1, \ldots, i_n)$ von $(1, \ldots, n)$ auf S existieren und stetig sind [die Menge der p-mal stetig (partiell) differenzierbaren Funktionen].

$$C^\infty(S) := \{f : S \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in C^p(S) \ \forall \ p \in \mathbb{N}\}$$

bezeichnet die Menge der unendlich oft (partiell) differenzierbaren Funktionen auf S.

18.9 Satz: (Zusammenhang zwischen totaler Differenzierbarkeit und partieller Differenzierbarkeit) Es sei $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\xi \in S$ und $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung.

(1) Ist f in ξ (total) differenzierbar, dann existiert für jede Koordinatenabbildung f_i $(i = 1, \ldots, m)$ und jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ die partielle Ableitung von f_i nach der Variablen x_j und es gilt:

$$f'(\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\xi) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\xi) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\xi) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\xi) \end{pmatrix}$$

Für $m = 1$ heißt

$$\operatorname{grad} f(\xi) := f'(\xi) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\xi))$$

der Gradient von f im Punkt ξ.

(2) Existieren für $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$ die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ der Koordinatenabbildungen von f auf S und sind diese im Punkt ξ stetig, dann ist f im Punkt ξ (total) differenzierbar.

18.10 Beispiel:

(a) Die Funktion

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3)^T & \to (x_1 x_2, e^{x_1} \sin x_3)^T \end{cases}$$

ist auf $\mathbb{R}^3$ total differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & 0 \\ \sin x_3 e^{x_1} & 0 & \cos x_3 e^{x_1} \end{pmatrix}$$

(b) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{falls} \quad x = (x_1, x_2)^T \neq 0 \\ 0 & \text{falls} \quad x = 0 \end{cases}$$

ist auf $\mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar, auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ (total) differenzierbar und im Punkt 0 nicht (total) differenzierbar.

18.11 Definition: Es $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in S, e \in \mathbb{R}^n$ mit $\|e\|_2 = 1$. Falls für eine Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ der Grenzwert

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t \cdot e) - f(x_0)}{t} \quad (t \text{ reell})$$

existiert, so heißt $\frac{\partial f}{\partial e}(x_0)$ die Richtungsableitung von f im Punkt x_0 in Richtung des Vektors e.

18.12 Eigenschaften: (Notation wie in 18.11)

(1) Die partiellen Ableitungen sind spezielle Richtungsableitungen, d.h.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial e_i} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

(2) Ist f im Punkt x_0 (total) differenzierbar, dann existiert jede Richtungsableitung im Punkt x_0 und es gilt für alle $e \in \mathbb{R}^n$ mit $\|e\|_2 = 1$:

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x_0) = \operatorname{grad} f(x_0) \cdot e.$$

(3) Es sei $\operatorname{grad} f(x_0) \neq 0$ und

$$e_0^T = \frac{\operatorname{grad} f(x_0)}{\| \operatorname{grad} f(x_0)\|_2},$$

dann gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial e_0}(x_0) = \max\{\frac{\partial f}{\partial e}(x_0) | e \in \mathbb{R}^n; \|e\|_2 = 1\} = \|\operatorname{grad} f(x_0)\|_2.$$

D.h. der Gradient gibt die Richtung des stärksten Anstiegs der Funktion f im Punkt x_0 an.

18.13 Bezeichnungen: Es sei $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n, S$ offen $h = (h_1, \ldots, h_n)^T \in \mathbb{R}^n$ und $f : S \to \mathbb{R}$. Für $f \in C^1(S)$ sei

$$\nabla f := \operatorname{grad} f$$

(Sprechweise: Nabla f) sowie

$$(\nabla \cdot h)f = (\nabla h)f := \operatorname{grad} f \cdot h = \sum_{j=1}^{n} h_j \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} f.$$

Für $f \in C^{k+1}(S)$ definiert man induktiv $(\nabla h)^0 f = f$

$$(\nabla h)^{k+1} f := (\nabla h)((\nabla h)^k f).$$

Zum Beispiel ist also für $k = 1$

$$(\nabla h)^2 f = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial}{\partial x_j} f) = \sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f.$$

18.14 Übung: Es sei $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n$, S offen, $f : S \to \mathbb{R}$ und $h = (h_1, \ldots, h_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Man zeige, dass für $f \in C^k(S)$ gilt:

$$(\nabla h)^k f = \sum_{\substack{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=k \\ \alpha_1,\ldots,\alpha_n \geq 0}} \frac{k!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} h_1^{\alpha_1} \ldots h_n^{\alpha_n} \frac{\partial^k}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} f.$$

Dabei erfolgt die Summation über alle n-Tupel $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ mit $0 \leq \alpha_j \leq k$ $(j = 1, \ldots, n)$ und $\sum_{j=1}^n \alpha_j = k$.

18.15 Satz: (Taylor) Es sei $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^{k+1}(S), x_0 \in S, h \in \mathbb{R}^n$ und $x_0 + th \in S$ für alle $0 \leq t \leq 1$. Dann existiert ein $\tau \in (0,1)$ mit

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{(\nabla h) f(x_0)}{1!} + \ldots + \frac{(\nabla h)^k f(x_0)}{k!} + \frac{(\nabla h)^{k+1} f(x_0 + \tau h)}{(k+1)!}.$$

Für $k = 0$ ergibt sich der <u>Mittelwertsatz:</u>

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = (\nabla h) f(x_0 + \tau h) = \operatorname{grad} f(x_0 + \tau h) \cdot h.$$

18.16 Folgerung: Es sei $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n$, S offen, $x_0 \in S$ und $\delta > 0$, so dass $U_\delta(x_0) \subset S$ gilt. Ist die Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ k-mal stetig differenzierbar, so gilt für alle $h \in \mathbb{R}^n$ mit $\|h\| < \delta$

$$f(x_0 + h) = \sum_{j=0}^{k} \frac{(\nabla h)^j f(x_0)}{j!} + o(\|h\|^k).$$

18.17 Bezeichnung: Es sei $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$.

$$N_f(c) := \{x \in S \mid f(x) = c\}$$

heißt <u>Niveaulinie</u> (zum Wert c), bzw. <u>Höhenlinie.</u>

18.18 Definition: Es sei $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n, f : S \to \mathbb{R}, x_0 \in S$. Die Funktion f hat in dem Punkt x_0 ein <u>relatives Maximum,</u> wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in U_\delta(x_0) \cap S$ gilt: $f(x) \leq f(x_0)$. f hat in x_0 ein <u>relatives Minimum,</u> wenn $-f$ ein relatives Maximum im Punkt x_0 besitzt. f hat in x_0 ein relatives Extremum, wenn f in x_0 ein relatives Maximum oder Minimum hat.

18.19 Satz: Es sei $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n$, S offen, $x_0 \in S$. Hat die Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ im Punkt x_0 ein relatives Extremum und existieren die partiellen Ableitungen von f im Punkt x_0, dann ist

$$\operatorname{grad} f(x_0) = 0 \quad (\in \mathbb{R}^n).$$

18.20 Definition: Eine symmetrische $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ heißt positiv definit, falls für alle $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ gilt:

$$x^T A x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j > 0.$$

Die Matrix A heißt positiv semidefinit, falls $x^T A x \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt. A heißt negativ (semi-)definit falls $-A$ positiv (semi-)definit ist. Existieren $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit

$$x^T A x < 0 < y^T A y,$$

so heißt die Matrix A indefinit.

18.21 Satz: Es sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ eine symmetrische $n \times n$-Matrix. Die Matrix A ist positiv definit genau dann, wenn für alle $k = 1, \ldots, n$ gilt:

$$A_k := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0\,.$$

A_k heißt Hauptminor der Ordnung k der Matrix A.

18.22 Lemma: Eine symmetrische $n \times n$-Matrix A ist genau dann positiv definit, wenn es ein $\alpha > 0$ gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$Q_A(x) := x^T A x \geq \alpha \|x\|^2.$$

18.23 Satz: Es sei $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in S, f : S \to \mathbb{R}, f \in C^2(S)$ und $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$. Ist die Hessesche Matrix von f im Punkt x_0

$$(\operatorname{Hess} f)(x_0) := \left(\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1,\ldots,n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_n \partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

(1) positiv definit, dann hat f im Punkt x_0 ein lokales Minimum.

(2) negativ definit, dann hat f im Punkt x_0 ein lokales Maximum.

(3) indefinit, dann hat f im Punkt x_0 kein relatives Extremum.

18.24 Satz: Es seien $x_0 \in \mathbb{R}^n, y_0 \in \mathbb{R}^m, \delta_1, \delta_2 > 0, \mathcal{U}_1 := U_{\delta_1}(x_0), \mathcal{U}_2 = U_{\delta_2}(y_0)$ und

$$F : \begin{cases} \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 & \to \mathbb{R}^m \\ \binom{x}{y} & \to F(x,y) \end{cases}$$

eine im Punkt $\binom{x_0}{y_0}$ (total) differenzierbare Funktion mit $F(x_0, y_0) = 0$, für die die $m \times m$-Matrix

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x_0, y_0) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(x_0, y_0) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(x_0, y_0) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

invertierbar ist. Ist dann $g : \mathcal{U}_1 \to \mathbb{R}^m$ eine stetige Abbildung mit $g(\mathcal{U}_1) \subset \mathcal{U}_2, g(x_0) = y_0$ und

$$F(x, g(x)) = 0 \quad \forall\, x \in \mathcal{U}_1,$$

dann ist g im Punkt x_0 differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0) := g'(x_0) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0),$$

wobei $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)$ die $m \times n$-Matrix

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_0, y_0) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x_0, y_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(x_0, y_0) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

der partiellen Ableitungen von F bzgl. der ersten n Koordinaten im Punkt $\binom{x_0}{y_0}$ bezeichnet.

18.25 Satz: (über implizite Funktionen) Es seien $\mathcal{U}_1 \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen, $x_0 \in \mathcal{U}_1, y_0 \in \mathcal{U}_2$ und

$$F : \begin{cases} \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 & \to \mathbb{R}^m \\ \binom{x}{y} & \to F(x,y) \end{cases}$$

eine stetig differenzierbare Abbildung [d.h. $F \in C^1(\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2)$] mit $F(x_0, y_0) = 0$ und invertierbarer $m \times m$-Matrix

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x_0, y_0) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(x_0, y_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(x_0, y_0) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Dann gibt es offene Mengen $V_1 \subset \mathcal{U}_1, V_2 \subset \mathcal{U}_2$ mit $x_0 \in V_1, y_0 \in V_2$ und eine stetige Abbildung $g : V_1 \to V_2$ mit

$$F(x, g(x)) = 0 \quad \forall\, x \in V_1.$$

Ist $(x, y) \in V_1 \times V_2$ ein Punkt mit $F(x, y) = 0$, so folgt $y = g(x)$ [d.h. g ist in diesem Sinn eindeutig bestimmt].

18.26 Bemerkung: Die Funktion g in Satz 18.25 ist stetig differenzierbar auf einer (evtl. kleineren) offenen Menge $U \subset V_1$ (mit $x_0 \in U$) und es gilt:

$$g'(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x)).$$

18.27 Satz: (Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion) Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung und $x_0 \in U, f(x_0) = y_0$. Ist die Jacobi-Matrix $f'(x_0)$ invertierbar, dann gibt es eine offene Menge $V \subset U$ mit $x_0 \in V$ und eine offene Menge $V' \subset \mathbb{R}^n$ mit $y_0 \in V'$, so dass f die Menge V bijektiv auf V' abbildet. Die Umkehrabbildung $f^{-1} : V' \to V$ ist stetig differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(y_0) = (f'(f^{-1}(y_0)))^{-1}.$$

18.28 Definition und Satz: (Lagrange-Multiplikatorenregel) Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m (m < n)$ eine stetig differenzierbare Funktion,

$$M := \{x \in U \mid f(x) = 0\}$$

die Menge aller Nullstellen von f in der Menge U und $x_0 \in U$, so dass die $m \times n$-Matrix $f'(x_0)$ vollen Rang m habe.
Eine stetig differenzierbare Funktion $h : U \to \mathbb{R}$ <u>hat in dem Punkt $x_0 \in U$ ein lokales Maximum (Minimum) unter der Nebenbedingung $f = 0$</u> falls es ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$h(x_0) \geq h(x) \quad (\text{bzw. } h(x_0) \leq h(x))$$

für alle $x \in U_\delta(x_0) \cap M \cap U$ gilt. In diesem Fall existiert ein Vektor $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)^T \in \mathbb{R}^m$, so dass im Punkt x_0 gilt

$$\operatorname{grad} h(x_0) - \lambda^T f'(x_0) = 0.$$

Die Elemente $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ heißen <u>Lagrange-Multiplikatoren.</u> Man beachte, dass die letzte Identität n Gleichungen und die Menge M m Gleichungen für $n + m$ Unbekannte (die Koordinaten des Extremums und die Lagrange-Multiplikatoren) definiert.

19. Kurvenintegrale

19.1 Definition: Es sei $S \subset \mathbb{R}^n, I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Abbildung

$$\gamma : \begin{cases} I & \to S \\ t & \to \gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))^T \end{cases}$$

heißt Bogen (bzw. Kurve) in S. γ heißt stetig differenzierbar (bzw. C^1-Bogen), wenn $\gamma_j \in C^1(I)\ \forall\ j = 1, \dots, n$ gilt. γ heißt glatt, falls $\gamma'(t) \neq 0\ \forall\ t \in I$ gilt. Die Menge $|\gamma| = \gamma(I)$ heißt Träger des Bogens γ. Ein Bogen heißt Jordanbogen, falls γ injektiv ist.

Ist $I = [\alpha, \beta]$ ein kompaktes Intervall, so heißen die Punkte $\gamma(\alpha)$ bzw. $\gamma(\beta)$ Anfangs- bzw. Endpunkt des Bogens und die Abbildung

$$\gamma^- : \begin{cases} [\alpha, \beta] & \to S \\ t & \to \gamma^-(t) = \gamma(\alpha + \beta - t) \end{cases}$$

der zu γ inverse Bogen. Ein r-Tupel ($r \geq 2$) $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_r)$ von Bögen heißt Weg, falls für alle $j = 1, \dots, r-1$ der Endpunkt von γ_j mit dem Anfangspunkt von γ_{j+1} übereinstimmt. Der Anfangspunkt von γ_1 (bzw. Endpunkt von γ_r) heißt Anfangs- (bzw. Endpunkt) des Weges. Ein Weg heißt stückweise glatt (bzw. stückweise C^1), wenn die einzelnen Bögen stückweise glatt (bzw. stückweise C^1) sind. Ein Weg bzw. Bogen heißt geschlossen, falls sein Anfangs- und Endpunkt übereinstimmen. Ein geschlossener Bogen γ heißt Jordankurve, falls $\gamma\,|_{[\alpha,\beta)}$ injektiv ist.

19.2 Beispiele:

(1) Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ ($x \neq y$) ist

$$\gamma : \begin{cases} [0,1] & \to \mathbb{R}^n \\ t & \to x + t(y - x) \end{cases}$$

ein Bogen und heißt Strecke von x nach y. Ein Streckenzug ist ein Weg, dessen Bögen Strecken sind.

(2) Die positiv orientierte Kreislinie $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$;

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} r\cos t \\ r \sin t \end{pmatrix}$$

ist eine glatte Jordankurve ($r > 0$ gegeben).

(3) Für $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ beschreibt der Bogen

$$\gamma : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R}^n \\ t & \to x + ty \end{cases}$$

eine Gerade im $\mathbb{R}^n$ (beachte: γ ist glatt).

(4) Sei $r > 0, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Der Bogen

$$\gamma : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R}^3 \\ t & \to (r\cos t, r\sin t, ct)^T \end{cases}$$

beschreibt eine Schraubenlinie.

(5) Der Bogen:

$$\gamma : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R}^2 \\ t & \to (t^2, t^3)^T \end{cases}$$

heißt Neilsche Parabel und ist nicht glatt.

(6) Ist $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ein Bogen, so ist (γ, γ^-) ein geschlossener Weg.

(7) Der Bogen

$$\gamma : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R}^2 \\ t & \to \binom{t^2-1}{t^3-t} \end{cases}$$

ist nicht injektiv, da $\gamma(1) = \gamma(-1) = (0,0)^T$.

19.3 Definition: Eine Menge $S \subset \mathbb{R}^n$ heißt wegzusammenhängend, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in S$ einen stetigen Weg in S gibt, der x mit y verbindet. Eine wegzusammenhängende und offene Menge heißt Gebiet.
Man beachte: Eine offene Menge S ist genau dann wegzusammenhängend, wenn je zwei Punkte aus S durch einen Streckenzug verbunden werden können [Übung].

19.4 Satz: Es sei $S \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f, g : S \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Ist $\operatorname{grad} f = \operatorname{grad} g$ auf S, dann gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $f = g + c$.

19.5 Definition: Es sei $S \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $f : S \to \mathbb{R}^n$ heißt Vektorfeld auf S. Eine differenzierbare Funktion $F : S \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion (bzw. Potential) von f, falls $\operatorname{grad} F = f$ auf S gilt.

19.6 Definition: Eine Menge $S \subset \mathbb{R}^n$ heißt sternförmig, falls es ein $x \in S$ gibt, so dass für alle $y \in S$ die x und y verbindende Strecke ganz in S liegt.

19.7 Satz: Es sei $S \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : S \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, $f = (f_1, \ldots, f_n)$.

(1) Besitzt f eine Stammfunktion auf S, dann gilt für alle $i, j = 1, \ldots, n$ auf S :

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

(2) Ist S eine sternförmige offene Menge und gilt für alle $i, j = 1, \ldots, n$ auf S :

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

dann hat f eine Stammfunktion auf S.

19.8 Hilfssatz: Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}, U \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$$f : \begin{cases} [a, b] \times U & \to \mathbb{R} \\ (x, y_1, \ldots, y_n) & \to f(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases}$$

stetige Funktion, die bzgl. der Variablen y_k stetig partiell differenzierbar ist, dann gilt:

$$\frac{\partial}{\partial y_k} \int_a^b f(x, y_1, \ldots, y_n) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y_k} f(x, y_1, \ldots, y_n) dx$$

(d.h. man darf unter dem Integral differenzieren).

19.9 Definition: Es sei $S \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\gamma : [\alpha, \beta] \to S$ ein stetig differenzierbarer Bogen in S und $f = (f_1, \ldots, f_n)$ ein stetiges Vektorfeld auf S. Dann ist das (Kurven)Integral von f längs γ definiert durch

$$\int_\gamma f(x) dx := \int_\alpha^\beta f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \sum_{j=1}^n \int_\alpha^\beta f_j(\gamma(t)) \gamma_j'(t) dt.$$

Ist $g : S \to \mathbb{R}$ stetig, so definiert man

$$\int_\gamma g(x) dx_j := \int_\alpha^\beta g(\gamma(t)) \cdot \gamma_j'(t) dt\ , \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Ist $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ stetig differenzierbarer Weg in S, so definiert man

$$\int_\gamma f(x) dx := \sum_{j=1}^r \int_{\gamma_j} f(x) dx$$

als Wegintegral von f längs γ. Sind $a, b \in S$ und hat für jeden stetig differenzierbaren Weg γ, der a und b verbindet, das Wegintegral $\int_\gamma f(x)dx$ denselben Wert, so heißt das Wegintegral $\int_\gamma f(x)dx$ wegunabhängig. Schreibweise:

$$\int_a^b f(x) dx.$$

19.10 Beispiele:

(1) Es sei $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbarer Bogen und f ein stetiges Vektorfeld, dann gilt:

$$\int_{\gamma^-} f(x)dx = -\int_\gamma f(x)dx.$$

(2) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x_1, x_2) = (3x_1^2 x_2, x_1^3)^T$ und $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ $\gamma(t) = \binom{t}{t^2}$, dann gilt:

$$\int_\gamma f(x)dx = 1.$$

19.11 Satz: Es sei $S \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und f ein stetiges Vektorfeld auf S, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent

(1) f besitzt auf S eine Stammfunktion.

(2) Das Integral $\int_\gamma f(x)dx$ ist wegunabhängig für jeden (stückweise) stetig differenzierbaren Weg γ in S.

(3) Für jeden geschlossenen (stückweise) stetig differenzierbaren Weg in S gilt:

$$\int_\gamma f(x)dx = 0.$$

19.12 Bemerkung zur Bestimmung einer Stammfunktion: Hat die stetige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))^T$ auf dem 2-dimensionalen Würfel R eine Stammfunktion (vgl. Satz 19.7 (2) für eine äquivalente Bedingung), so kann man diese durch

$$F(\xi, \eta) = \int_a^\xi f_1(t,b)dt + \int_b^\eta f_2(\xi, t)dt$$

berechnen, wobei $\binom{a}{b}$ ein beliebiger Punkt in R^0 ist.

19.13 Definition: Es sei $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ ein Bogen, $Z = (t_0, \ldots, t_k) \in \zeta([\alpha, \beta])$ eine Zerlegung des Intervalls $[\alpha, \beta]$ und

$$\ell(Z, \gamma) := \sum_{j=1}^k \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|_2.$$

Der Bogen γ heißt rektifizierbar, wenn

$$L(\gamma) := \sup\{\ell(Z, \gamma) | Z \in \zeta([\alpha, \beta])\} < \infty$$

gilt. $L(\gamma)$ heißt dann die Länge des Bogens γ.

19.14 Bemerkungen:

(1) Ist γ rektifizierbar, so auch γ^- und es gilt $L(\gamma^-) = L(\gamma)$.

(2) Sind $\gamma_j : [\alpha_j, \beta_j] \to \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2$, rektifizierbare Jordanbögen mit demselben Bild $\Gamma = |\gamma_j|$, $j = 1, 2$, dann gilt

$$L(\gamma_1) = L(\gamma_2).$$

(3) Ist $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ ein Bogen, $\alpha < \alpha' < \beta; \gamma_1 := \gamma_{|[\alpha,\alpha']}\ \gamma_2 = \gamma_{|[\alpha',\beta]}$, dann gilt

$$L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2).$$

19.15 Satz: Ist $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbarer Bogen, dann ist γ rektifizierbar und es gilt:

$$L(\gamma) = \int_\alpha^\beta \|\gamma'(t)\|_2 dt = \int_\alpha^\beta (\sum_{j=1}^n |\gamma_j'(t)|^2)^{1/2} dt.$$

19.16 Beispiele:

(1) Ist $\gamma : t \to \gamma(t) = \binom{r\cos t}{r\sin t}, 0 \leq t \leq 2\pi$, der Kreis um den Nullpunkt mit Radius r, so gilt: $L(\gamma) = 2\pi r$.

(2) Es sei $f \in C^1([\alpha, \beta])$ und ein Bogen durch

$$\gamma : \left\{ \begin{array}{ccc} [\alpha, \beta] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \to & \binom{t}{f(t)} \end{array} \right.$$

definiert. Dann ist $|\gamma|$ der Graph von f und es gilt:

$$L(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt.$$

(3) Die durch

$$\gamma : \left\{ \begin{array}{cl} [0, b] & \to \mathbb{R}^2 \\ t & \to \gamma(t) = \binom{e^{-t}\cos t}{e^{-t}\sin t} \end{array} \right.$$

definierte Kurve heißt <u>logarithmische Spirale</u> und es gilt

$$L(\gamma) = \sqrt{2}(1 - e^{-b}).$$

19.17 Definition: Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $Z = (x_0, \ldots, x_n) \in \zeta([a, b])$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$. Wir setzen

$$v_f(Z, [a, b]) := \sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})|$$

und bezeichnen

$$V_f = V_f([a,b]) := \sup\{v_f(Z,[a,b]) \mid Z \in \zeta([a,b])\}$$

als die Variation von f über dem Intervall $[a,b]$. Die Funktion f heißt von beschränkter Variation auf dem Intervall $[a,b]$, falls $V_f([a,b]) < \infty$ gilt. $BV([a,b])$ bezeichne die Menge aller Funktionen von beschränkter Variation auf dem Intervall $[a,b]$.

19.18 Einfache Eigenschaften

(1) $Z \prec Z' \Rightarrow v_f(Z,[a,b]) \leq v_f(Z',[a,b])$

(2) $BV([a,b]) \subset B([a,b])$, wobei $B([a,b])$ die Menge der auf $[a,b]$ beschränkten Funktionen bezeichne.

(3) Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Lipschitz stetig der Ordnung 1, dann ist f von beschränkter Variation.

(4) Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton, dann ist f von beschränkter Variation und

$$V_f([a,b]) = |f(b) - f(a)|.$$

19.19 Übung: Man zeige

(1) $BV([a,b])$ ist bzgl. der üblichen Addition und Skalarmultiplikation ein Vektorraum.

(2) Durch

$$\|f\| := |f(a)| + V_f([a,b])$$

wird eine Norm auf $BV([a,b])$ definiert und $BV([a,b])$ ist bzgl. dieser Norm vollständig.

19.20 Beispiel: Die Funktion

$$f : \begin{cases} [0,1] & \to \mathbb{R} \\ x & \to f(x) := \begin{cases} x\cos\frac{\pi}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

ist stetig aber nicht von beschränkter Variation auf dem Intervall $[0,1]$.

19.21 Übung: Man zeige für $a < c < b$:

$$f \in BV([a,b]) \iff f \in BV([a,c]) \cap BV([c,b]).$$

In diesem Fall gilt:

$$V_f([a,b]) = V_f([a,c]) + V_f([c,b]).$$

19.22 Satz: Es sei $f \in BV([a,b])$, dann ist die Abbildung

$$v : \begin{cases} [a,b] & \to \mathbb{R} \\ x & \to V_f([a,x]) =: v(x) \end{cases}$$

monoton wachsend und in jedem Stetigkeitspunkt von f stetig.

19.23 Satz: Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann von beschränkter Variation auf dem Intervall $[a,b]$, wenn sie sich als Differenz von zwei monoton wachsenden Funktionen darstellen lässt.

19.24 Übung: Man zeige: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ von beschränkter Variation auf dem Intervall $[a,b]$, dann ist f bzgl. α auf dem Intervall $[a,b]$ Riemann-Stieltjes integrierbar.

19.25 Satz: Es sei

$$\gamma : \begin{cases} [\alpha,\beta] & \to \mathbb{R}^n \\ t & \to \gamma(t) := (\gamma_1(t), \ldots \gamma_n(t))^T \end{cases}$$

ein Bogen. γ ist genau dann rektifizierbar, wenn für alle $j = 1, \ldots, n$ gilt: $\gamma_j \in BV([\alpha,\beta])$.

19.26 Satz: Es sei $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n$ stetiger und rektifizierbarer Bogen und die Funktion $s : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$s(t) := L(\gamma_{|[\alpha,t]})$$

dann gilt:

(1) s ist monoton wachsend und stetig. Ist γ Jordanbogen, dann ist s streng wachsend.

(2) Ist γ glatt (d.h. γ stetig differenzierbar und $\gamma'(t) \neq 0 \; \forall \; t \in [\alpha,\beta]$), dann ist $s \in C^1([\alpha,\beta])$ und $s'(t) > 0 \; \forall \; t \in [\alpha,\beta]$. Ist die Funktion $\psi : [0, L(\gamma)] \to \mathbb{R}^n$ durch $\psi(u) = \gamma(s^{-1}(u))$ definiert, dann gilt für alle $u \in [0, L(\gamma)]$

$$\|\psi'(u)\|_2 = 1.$$

Man spricht von einer Parametrisierung bezüglich der Bogenlänge.

19.27 Definition: Es sei $S \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\gamma : [\alpha,\beta] \to S$ glatter Bogen in S und $f : S \to \mathbb{R}$ stetig. Das Integral

$$\int_\gamma f(x)ds := \int_\alpha^\beta f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|_2 dt$$

heißt Integral von f längs γ bzgl. der Bogenlänge.