Ungerade Wurzeln aus negativen Zahlen

Gerade Wurzeln sind unumstritten nur für Zahlen ≥ 0 definiert, z.B $\sqrt{-4}$ ist nicht definiert (in $\mathbb{R}$).
Es gibt aber in Deutschland zwei unterschiedliche Meinungen darüber, wie man (im Mathematikunterricht auf Schulniveau) mit ungeraden Wurzeln aus negativen Zahlen umgeht.

Bsp.: Meinung (I): $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$; Meinung (II): $\sqrt[3]{-8}$ ist nicht definiert (in $\mathbb{R}$).
Die Antwort aus streng mathematischer Sicht: $\sqrt[3]{-8}$ ist nicht definiert (in $\mathbb{R}$).
Um es vorweg zu nehmen: Ich plädiere trotzdem für Meinung(I), obwohl
(1) es mathematisch falsch ist (man kann Widersprüche konstruieren, siehe unten),
(2) es der DIN 1302 widerspricht,
(3) das Vermitteln und Anwenden der Potenzregeln dadurch aufwendiger wird.

Was spricht für diese Entscheidung?
(1) Die Funktion $f(x) = x^m$ ist für ungerade Zahlen $m = 2n+1$, $n \in \mathbb{N}$, eine bijektive Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Wie lautet die Umkehrfunktion, wenn nicht $f^{-1}(x) = \sqrt[m]{x}$ mit $\sqrt[m]{x^m} = x = (\sqrt[m]{x})^m \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
(2) Daraus ergibt sich sofort die nächste Frage: Mit welchem Rechenschritt erhält man beispielsweise aus der Gleichung $x^3 = -8$ die offensichtliche Lösung $x = -2$, wenn nicht durch $\sqrt[3]{\ }$?
(3) Beachtet man einige Besonderheiten beim Rechnen mit ungeraden Wurzeln, dann tritt bei der Lösung praktischer Probleme kein Widerspruch auf.
Die Verfechter der Meinung (II) machen sich im Allgemeinen das Leben leicht und ignorieren diese Problemstellungen.

Wo liegen nun die Probleme, wenn man ungerade Wurzeln aus negativen Zahlen zulässt?

I. Für alle ungeraden Zahlen $m = 2n+1$, $n \in \mathbb{N}$ gilt dann $\sqrt[m]{-1} = -1 = (-1)^{1/m}$, also auch $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{1/m} = -1$ und wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{m} = 0$ folgt somit $(-1)^0 = -1$, im Widerspruch zu $(-1)^0 = 1$. Glücklicherweise beeinträchtigt dieser Widerspruch kaum das Rechnen mit Wurzeln in der Praxis. Mehr Probleme verursachen die folgenden Fälle, bei denen eine Rechenregel für Potenzen nicht mehr uneingeschränkt anwendbar ist.

II. Für $a \geq 0$ und $m, n \in \mathbb{N}$ gilt die Regel (*): $(a^m)^{1/n} = a^{m/n} = (a^{1/n})^m$, dabei ist $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$.
Was ist zu beachten für $a < 0$?
Einschränkung der Regel (*): $a^{m/n}$ ist für $a < 0$ nur bei ungeradem n definiert; das Erweitern bzw. Kürzen von m und n mit bzw. durch geraden Zahlen ist nicht erlaubt.
Bsp.: Einerseits ist $(-1)^{3/5} = ((-1)^3)^{1/5} = -1 = ((-1)^{1/5})^3$; andererseits ist $(-1)^{6/10}$ nicht definiert, denn $(\sqrt[10]{-1})^6$ existiert nicht und $((-1)^6)^{1/10} = 1^{1/10} = 1$, also $(-1)^{3/5} \neq (-1)^{6/10}$.
Ein ähnliches Beispiel, dass in diesem Zusammenhang häufig angeführt wird:
$2 = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{(-8)^2} = ((-8)^2)^{1/6} \neq (-8)^{2/6} \neq (-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8} = -2$.
Diese Einschränkung ist aber nicht neu, sondern gilt analog beim Rechnen mit geraden Wurzeln, wie man an folgendem Beispiel sieht: $1 = 1^{1/2} = ((-1)^2)^{1/2} \neq (-1)^{2/2} \neq (-1)^1 = -1$.
Eine weiteres Beispiel für obige Einschränkung: $(-1)^{2/3} = 1$, also $((-1)^{2/3})^{3/10} = 1$, aber $((-1)^{2/3})^{3/10} \neq (-1)^{2/10} \neq (-1)^{1/5} = -1$.

III. Ein weiteres Problem: Wie ist beispielsweise $(-1)^{0,6}$ definiert?
Um zu entscheiden, ob ein Ausdruck bei negativer Basis und rationalem Exponenten definiert ist, muss man zusätzlich festlegen, das der Exponent teilerfrei gekürzt wird, d.h. $(-1)^{0,6} = (-1)^{3/5} = -1$, während $(-1)^{6/10}$ nicht definiert ist.
Natürlich kann man auch hier – ähnlich wie unter I. – Wiedersprüche konstruieren: Die Folgen $a_n = 0{,}6 + 1/(10^n)$, $b_n = 0{,}6 + 1/(2n+1)$, $c_n = 0{,}6 + 2/(2n+1)$ konvergieren alle gegen 0,6; aber $(-1)^{a_n}$ ist für kein $n \in \mathbb{N}$ definiert, $(-1)^{b_n} = 1 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$, $(-1)^{c_n} = -1 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$. Interessant auch die Tabelle von $(-1)^{0,1 \cdot n}$ für $n = 1$ bis 10 :

$(-1)^{0,1}$	$(-1)^{0,2}$	$(-1)^{0,3}$	$(-1)^{0,4}$	$(-1)^{0,5}$	$(-1)^{0,6}$	$(-1)^{0,7}$	$(-1)^{0,8}$	$(-1)^{0,9}$	$(-1)^{1}$
n.d.	−1	n.d.	1	n.d.	−1	n.d.	1	n.d.	−1

IV. Besonders bei Potenzausdrücken mit Variablen in der Basis ist die Einschränkung der Regel (*) für den Definitionsbereich des Terms ausschlaggebend. Nichtbeachtung führt häufig zu Fehlern.
Bsp. $(x^2)^{1/4} = (|x|^2)^{1/4} = |x|^{1/2}$ ist $\forall\, x \in \mathbb{R}$ definiert, $x^{2/4} = (x^{1/4})^2 = x^{1/2}$ nur für $x \geq 0$, ebenso wie $(x^{1/2})^4 \neq x^2$.
$x^{1/3}$ ist $\forall\, x \in \mathbb{R}$ definiert, ebenso $(x^2)^{1/6} = (|x|^2)^{1/6} = |x|^{1/3}$, dagegen $x^{2/6} = (x^{1/6})^2$ nur für $x \geq 0$.

V. Das Zulassen ungerader Wurzeln aus negativen Zahlen hat damit natürlich Auswirkungen auf die Lösung von Gleichungen. Dazu einige Beispiele:

• Die Lösung von $\sqrt[3]{x} = -2$ ist $x = -8$ (nach Meinung II. gibt es keine Lösung).

• Die Gleichungen (a) $\sqrt[3]{x^2} = 1$, (b) $x^{2/3} = 1$, (c) $(\sqrt[3]{x})^2 = 1$ besitzen die beiden Lösungen ±1.
Nach Meinung II. erhält man für (a) das gleiche Ergebnis, jedoch bei (b) und (c) nur die Lösung +1.

• Dagegen ist $x^{4/6} = (\sqrt[6]{x})^4 \neq \sqrt[6]{x^4} = x^{2/3}$ und die Gleichung (a) $\sqrt[6]{x^4} = 1$ besitzt wieder die Lösungen ±1, während (b) $x^{4/6} = 1$ und (c) $(\sqrt[6]{x})^4 = 1$ nur die Lösung +1 haben (im Einklang mit Meinung II.).

VI. Potenzrechnung am Beispiel Wolfram|Alpha bzw. Mathematica
Da Mathematikprogramme widerspruchsfrei arbeiten müssen, „vertreten“ sie die Meinung II. Außerdem rechnen sie in den komplexen Zahlen, sind also für das Rechnen in $\mathbb{R}$ nicht immer geeignet. Beispiele:

• Als Lösung der Gleichung $(\sqrt{x})^4 = 1$ erhält man die beiden Werte ±1, da hier $(\sqrt{x})^4$ vereinfacht wird zu x^2, was zwar in den komplexen Zahlen richtig ist, nicht aber in $\mathbb{R}$.

• $\sqrt[3]{-1} = (-1)^{1/3}$ ist hier die komplexe Zahl $\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3) = (1 + i\sqrt{3})/2$,
allgemein $(-1)^a = \cos(a\,\pi) + i\sin(a\,\pi)$ und für $x > 0$ insgesamt $(-x)^a = (-1)^a\, x^a$.
Daher ist für $x < 0$ die Funktion $\sqrt[3]{x^3}$ gleich $(-1)^{1/3}\, x$ (also komplexwertig) und kann nicht grafisch dargestellt werden.

• Andererseits ist die Funktion $(\sqrt[n]{x})^n$ gleich x $\forall\, n \geq 2$ und wird auch für $x < 0$ gezeichnet.

• Die Lösung von $\sqrt[n]{x} = -1$ ergibt die leere Menge $\forall\, n \geq 2$, Wurzeln aus Zahlen können also nie negativ werden.

• Die Gleichung $x^{2/3} = (\sqrt[3]{x})^2 = 1$ hat die Lösung 1.

Noch ein Wort zum Ausdruck 0^0. Auch hier gibt es 2 unterschiedliche Meinungen:

Meinung I.: 0^0 ist nicht definiert, Meinung II.: $0^0 = 1$.

Ich plädiere für Meinung I., denn auch hier erhält man sonst schnell Widersprüche: $0^{1/n} = 0$ $\forall$ n$\in \mathbb{N}$,
also $\lim\limits_{n\to\infty} 0^{1/n} = 0$, aber $(1/n)^0 = 1$ $\forall$ n$\in \mathbb{N}$, also $\lim\limits_{n\to\infty} (1/n)^0 = 1$. Auch andere Grenzwerte sind bei 0^0 möglich:
Bsp.: $f(x) = 2^{-1/x^2}$, $g(x) = -x^2$, also $g(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, aber $\lim\limits_{x\to 0} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} (2^{-1/x^2})^{-x^2} = 2$

Auflistung der Rechenregeln für Potenzen: https://de.wikipedia.org/wiki/Potenz_%28Mathematik%29