Fakultät für
Wirtschaftswissenschaft
Dr. Alfred Bischoff

RUHR
UNIVERSITÄT
BOCHUM

RUB

VORLESUNGSBEILAGE
ZUM
VORKURS MATHEMATIK

Inhalt

Stand: 13.3.18

0. Einleitung

Wirtschaftswissenschaft → Modelle → Mathematik

Versteht man unter Wirtschaften ein nach bestimmten Kriterien optimiertes ökonomisches Handeln, so lassen sich sehr häufig Fragestellungen der Wirtschaftswissenschaft als Optimierungsprobleme charakterisieren. Beispiele sind im Bereich der Betriebswirtschaft die Optimierung von Produktion, Lagerhaltung etc. oder im volkswirtschaftlichen Bereich die Festlegung von Steuern, Subventionen, Leitzinsen etc. .

Die Lösung derartiger Probleme erfordert zunächst die Präzisierung der zu optimierenden Zielgrößen. Dazu wird versucht, die Realität durch ein Modell hinreichend genau abzubilden, indem man

- die wichtigsten Einflussgrößen auswählt,
- diese unterteilt in unabhängige Größen (direkt steuerbar, z.B. Leitzinsen) und abhängige Größen (nicht direkt steuerbar, z.B. Inflationsrate),
- sie zueinander in Beziehung setzt (z.B. Größe A → Größe B),
- evtl. die Beziehungen näher spezifiziert, z B. in
  + deterministisch - stochastisch,
  + linear - nicht linear, etc.

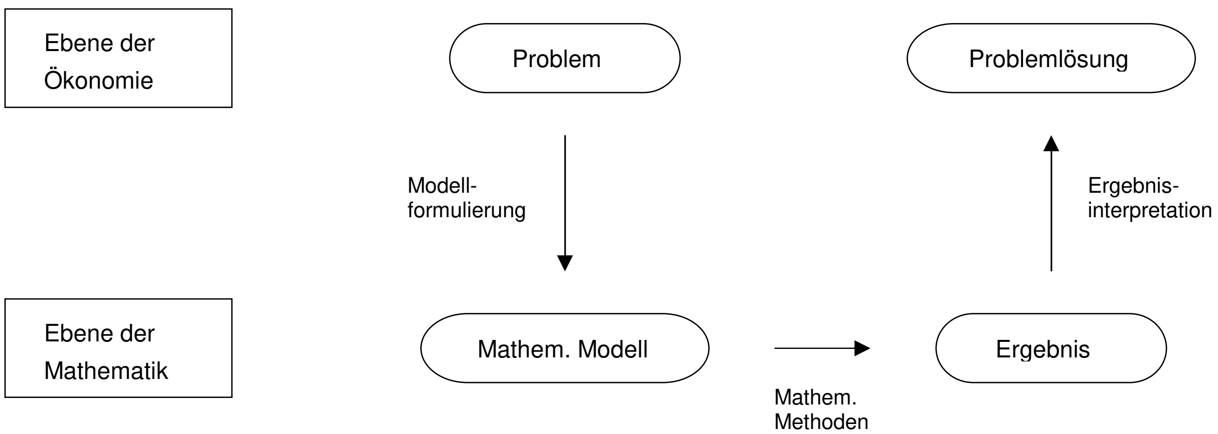
Damit liegt das Problem in abstrakter Form vor und kann - falls man an einem quantitativen Ergebnis interessiert ist - mit Hilfe der Mathematik bearbeitet werden.

Insgesamt vollzieht sich die Lösung eines Problems mit Hilfe der Mathematik in drei Schritten:

1. Modellformulierung: Übersetzen des Problems in die Sprache der Mathematik,
2. Lösen des Problems mit Hilfe der Mathematik,
3. Interpretation: Rückübersetzen des Ergebnisses.

Grafisch umgesetzt:

<u>Lösen eines Problems mit Hilfe der Mathematik</u>



Mathematik als Sprache

Wie bereits angedeutet, lässt sich Mathematik als Sprache auffassen. Vokabeln dieser Sprache sind Symbole wie beispielsweise + oder –, vergleichbar den Kurzzeichen aus der Stenografie. Die Grammatik besteht aus den Regeln mathematischer Argumentation, der Beweistechnik, die direkt auf der Aussagenlogik basiert.
Damit eignet sich die Sprache Mathematik hervorragend zur Diskussion in abstrakten Modellen.
Beim Erlernen einer Sprache sind zwei Wege denkbar: der etwas langwierige Weg über das Erlernen von Vokabeln und Grammatik, der bis zur Formulierung des ersten Textes - also bis zur ersten Anwendung - einige Anstrengung verursacht, ein zweiter Weg, bei dem gleich ganze Sätze - also komplette Problemlösungen - vermittelt werden. Dieser zweite Weg, bezogen auf die Mathematik also das Einüben so genannter mathematischer "Kochrezepte" , scheint nicht sinnvoll, da Rechenvorschriften ohne Kenntnis ihrer Grundlagen und Prämissen häufig zu Fehlanwendungen führen.

Warum gilt die Mathematik häufig als schwierig?

Einige Argumente seien hier aufgeführt, die dazu dienen sollen, die vielfach vorhandene Scheu vor der Mathematik abzubauen:

- Schreibweise
  Wie bereits erwähnt, bedient sich die Mathematik einer extremen Kurzschreibweise, ohne Kenntnis der grundlegenden Symbole muss diese Sprache unverständlich bleiben. Zur sparsamen und übersichtlichen Darstellung werden häufig auch mehrfach auftretende, längere mathematische Ausdrücke zu einem neuen Symbol (z.B. einem Buchstaben) zusammengefasst. Da die Anzahl der lateinischen Buchstaben beschränkt ist, verwendet man zusätzlich griechische Buchstaben sowie eine Reihe von "Ornamenten" wie Punkte, Striche, Tilden, hoch- oder tiefgestellte Zahlen etc., mit denen Buchstaben versehen werden können. Solche Sonderzeichen werden häufig nur lokal verwandt, d.h. ihnen wird i.A. keine in der gesamten Mathematik einheitliche Bedeutung zugeordnet. Will man also eine Aussage im hinteren Abschnitt eines mathematischen Textes verstehen, so muss u.U. die Bedeutung einzelner Zeichen mit Hilfe der vorhergehenden Abschnitte geklärt werden.

- Allgemeinheit von Aussagen
  Mathematische Aussagen sind oftmals das Ergebnis einer längeren Kette von Verallgemeinerungen. Entwickelt wurde eine Formel vielleicht zunächst nur für einen Spezialfall und war dort noch sehr einfach nachvollziehbar. Im nächsten Schritt entdeckte man, dass eine analoge Aussage auch in einem verallgemeinerten Zusammenhang gilt. Nach mehreren derartigen Erweiterungen und zunehmender Komplexität erinnert auf den ersten Blick nichts mehr an die ursprüngliche Aussage. Bei der Präsentation einer derartigen Aussage kann man nicht erwarten, dass sie sogleich verständlich oder gar plausibel erscheint. Um sie besser zu verstehen, gilt es den historischen Entwicklungsprozess nachzuvollziehen. Dazu setzt man z.B. sehr einfache Zahlen in eine Formel ein und veranschaulicht sich so die Bedeutung der Aussage für Spezialfälle. Anschließend kann man zu komplexeren Situationen über gehen, um so einen Eindruck der gesamten Tragweite der Aussage zu erhalten.

- Informationsgehalt
  Wie gerade angedeutet, besitzen Aussagen in der Sprache Mathematik teilweise eine hohe Komplexität und damit verbundene Informationsdichte. Sie lassen sich kaum kompakter formulieren und erfordern daher einen hohen Zeitaufwand zu ihrem Verständnis. In Mathematikvorlesungen werden die Aussagen in der Regel nur präsentiert und evtl. anhand einiger Beispiele verdeutlicht. Jedoch fehlt die Zeit, den oben erwähnten historischen Entwicklungsprozess vollständig aufzuzeigen. Aus diesem Grund kann es als "normal" angesehen werden, wenn man in einer Vorlesung zur Mathematik ab und zu das Gefühl hat, wenig zu verstehen. Die Konsequenz darf dann aber kein resignierendes "das verstehe ich ja doch nicht" sein, sondern es gilt die Vorlesung entsprechend nachzuarbeiten. Dabei kann es durchaus vorkommen, dass man einige Stunden damit zubringt, eine einzige mathematische Aussage vollständig zu begreifen. Diese Zeit muss man sich gerade in der Anfangsphase der Mathematikveranstaltungen nehmen, um einige "Aha-Erlebnisse" zu erzielen und so das nötige "mathematisches Selbstvertrauen" aufzubauen. Danach wird man mit einiger Sicherheit nicht mehr an den mathematischen Anforderungen des wirtschaftswissenschaftlichen Studiums scheitern.

- Roter Faden
  Mathematische Aussagen bauen in der Regel aufeinander auf und sind entsprechend chronologisch in Lehrbüchern dargestellt. Häufig findet man zunächst eine ganze Reihe von Hilfsaussagen, aus denen dann eine Hauptaussage gefolgert wird. Zu Beginn der Argumentation ist dabei oftmals nicht erkennbar, welches Ziel angestrebt wird. Wenn aber der "rote Faden" nicht ersichtlich ist, fällt es auch schwer, die Zwischenergebnisse richtig einzuschätzen und deren Sinn zu begreifen.
  Im nächsten Abschnitt werden daher einige Beispiele vorgestellt, an denen vorweg die weitere Vorgehensweise veranschaulicht wird.

Inhalt der Vorlesung "Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler"

Welche Mathematikkenntnisse sollte ein Ökonom besitzen?

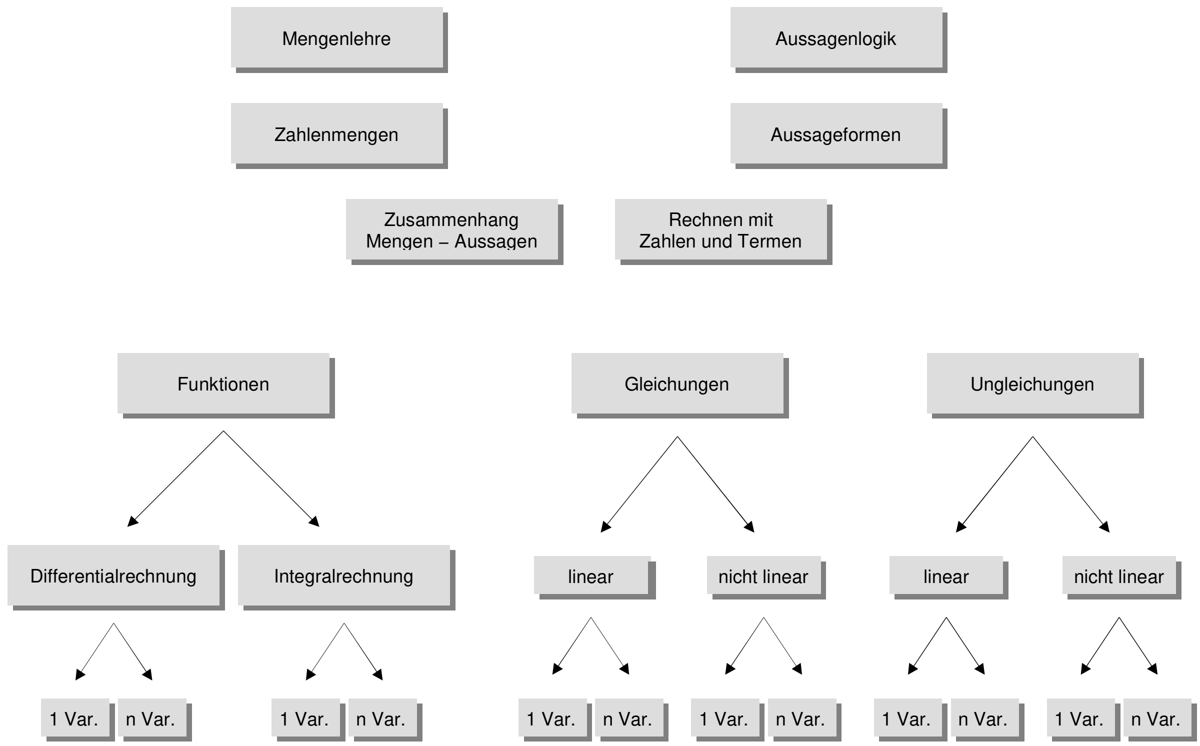
Für die überwiegende Mehrheit der in der Praxis tätigen Ökonomen reichen die Kenntnisse aus, die in der Schule vermittelt werden sollten. Nur in wenigen Spezialabteilungen, die sich beispielsweise mit Problemen aus den Bereichen Statistik, Optimierung oder Informatik beschäftigen, werden weitergehende mathematische Qualifikationen verlangt.

Demgegenüber erfordern einige obligatorische Veranstaltungen im Verlaufe des Studiums der Volks- bzw. Betriebswirtschaft über das Schulwissen hinausgehende Kenntnisse in Analysis und linearer Algebra. Noch höher sind die mathematischen Anforderungen zum Verständnis spezieller Vorlesungen in den Masterstudiengängen, z.B. aus den gerade angesprochenen Bereichen Ökonometrie (Statistik) und Operations Research (Optimierung) oder auch der Volkswirtschaftstheorie.

Das Ziel der Vorlesung "Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler" besteht darin, auch hier grundlegende Kenntnisse zu vermitteln.

Eine Übersicht liefert folgende Grafik:

Übersicht: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler



Beispiele

1. Beispiel zur linearen Algebra (einfache Denksportaufgabe)

Die Summe von zwei Zahlen sei 20, ihre Differenz 10.
Wie lauten die beiden Zahlen?

Lösung:

1. Schritt: "Übersetzen" des Problems in die Sprache der Mathematik

Die beiden Zahlen werden mit x bzw. y bezeichnet.
Für x bzw. y soll dann gelten: $x + y = 20$ und $x - y = 10$.

2. Schritt: Lösen des Problems auf der Ebene der Mathematik

Es gibt viele Methoden zur Lösung dieses Problems.
Beispielsweise addiert man die beiden Gleichungen

$$\begin{array}{l} x + y = 20 \\ \underline{x - y = 10} \\ 2x \quad = 30 \end{array}$$

und erhält so nach Division durch 2 : $x = 15.$

Eingesetzt in die erste Gleichung führt dies zu $15 + y = 20$,
also nach Subtraktion von 15 zu $y = 5.$

3. Schritt: Interpretation

Die erste Zahl lautet 15, die zweite Zahl 5.

Welche mathematischen Grundkenntnisse werden benötigt, um obige Aufgabe zu lösen?
Betrachtet sei zunächst die *lineare Gleichung* $x + y = 20$. Sie enthält die *Variablen* (Platzhalter für Zahlen) x und y. Setzt man für x und y Zahlen ein, z.B. $x = 3$ und $y = 17$, so erhält man eine (in diesem Fall wahre) *Aussage*. Aussagen sind stets eindeutig wahr oder falsch. Mathematische Ausdrücke wie obige Gleichung, die nach dem Einsetzen von Zahlen für die Variablen in Aussagen übergehen, nennt man *Aussageformen*. Die Menge der Zahlen, die dabei als Wertevorrat zur Verfügung steht, wird als *Grundmenge* bezeichnet. Unter der *Lösungsmenge* einer Aussageform versteht man die Zahlenkombinationen, die - eingesetzt für die Variablen - eine wahre Aussage ergeben. Die Lösungsmenge des obigen *linearen Gleichungssystems* (von zwei Gleichungen mit zwei Variablen) ergibt sich als *Durchschnitt der Lösungsmengen* der beiden einzelnen Gleichungen. Die Berechnung dieser Lösungsmenge erfolgt durch *Äquivalenzumformungen* des Gleichungssystems.
Anhand dieser Überlegungen wird klar, dass eine systematische Darstellung der Lösungsmöglichkeiten eines linearen Gleichungssystems - Hauptgegenstand der linearen Algebra - nicht möglich ist ohne vorherige Beschäftigung mit Aussagen, Mengen und grundlegenden Rechentechniken.

2. <u>Beispiel zur Analysis</u> (Gewinnmaximierung)

Ein Händler stellt folgenden Zusammenhang zwischen dem Verkaufspreis p für ein Pfund Kaffee und der pro Tag verkauften Menge X fest: $X(p) = 40 - 10\,p$, wobei der Preis p unter 4 € liegt.
Der Einkaufspreis für den Händler beträgt 2 € pro Pfund.
Wie hoch sollte der Händler seinen Verkaufspreis wählen, damit sein Gewinn maximal wird?

Lösung:

1. Schritt: "Übersetzen" des Problems in die Sprache der Mathematik

Gewinn = (Verkaufspreis – Einkaufspreis) · verkaufte Menge
Gewinnfunktion: $G(p) = (p - 2) \cdot X(p) = (p - 2) \cdot (40 - 10\,p) = \text{Max!},\ \ 2 \le p \le 4.$

2. Schritt: Lösen des Problems auf der Ebene der Mathematik

1. Ableitung bilden (Produktregel):

$$G'(p) = (p - 2) \cdot (-10) + 1 \cdot (40 - 10\,p) = -20p + 60.$$

Nullstelle der 1. Ableitung bestimmen:

$$G'(p) = 0 \;\Leftrightarrow\; 20p = 60 \;\Leftrightarrow\; p = 3.$$

$\Rightarrow$ Evtl. lokales Extremum der Funktion $G(p)$ an der Stelle $p = 3$.

2. Ableitung bilden:

$$G'(p) = -20 < 0.$$

$\Rightarrow$ Die Funktion $G(p)$ besitzt an der Stelle $p = 3$ ein globales Maximum.

3. Schritt: Interpretation

Beim Verkaufspreis von $p = 3$ € wird der Gewinn des Händlers maximal und beträgt $G(3) = 10$ €.

Welche mathematischen Grundkenntnisse werden benötigt, um obige Aufgabe zu lösen?
Abgesehen von ökonomischen Grundkenntnissen (was ist Gewinn?) und dem Problem der empirischen Ermittlung des

Zusammenhangs zwischen Preis und abgesetzter Menge (z.B. durch lineare Regression), taucht hier zunächst der Begriff der *Funktion* auf. Gesucht wird das *globale Maximum* der Gewinnfunktion $G(p)$ über einem bestimmten Wertebereich von p. Dazu bildet man die 1. *Ableitungsfunktion* $G'(p)$. Deren Funktionswerte geben an jeder Stelle p an, welche *Steigung* der Funktionsgraf von $G(p)$ dort besitzt. Die *Nullstellen* der 1. Ableitungsfunktion charakterisieren daher *lokale Extrema* oder *Sattelpunkte*. Mit Hilfe der 2. Ableitungsfunktion $G'(p)$ bestimmt man die *Krümmung* der Funktion $G(p)$ an einer Stelle p und kann dadurch klären, ob an einer solchen Nullstelle ein *lokales Minimum* oder *Maximum* vorliegt.

1. Mengen

$\{\ \}$ Mengenklammern

Bsp.: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ Menge der Augen eines Würfels

$B = \{ s \mid s \text{ ist Student} \}$ Menge der Studenten

$\in$, $\notin$ Element aus, nicht Element aus

Bsp.: $2 \in A$, $7 \notin A$

Für jedes Objekt x gilt : $x \in A$ oder $x \notin A$.

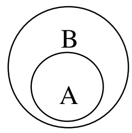
Wie beim Symbol $\in$ lassen sich viele mathematische Ausdrücke verneinen, indem man sie mittels / durchstreicht.

$\varnothing$ Leere Menge

$|\ |$ Anzahl der Elemente einer (endlichen) Menge

Bsp.: $|A| = 6$ für die obige Menge A.

$\subset, \supset$ Teilmenge, Obermenge



$A \subset B$ bedeutet: Jedes Element der Menge A gehört auch zur Menge B,

$B \supset A$ ist hierzu gleichbedeutend. Es ist stets $A \subset A$.

Bsp.: $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$, $\{a, b, c\} \supset \{b, c\}$

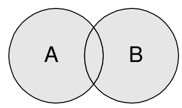
$\{1, 2\} \not\subset \{1, 3\}$ ($A \not\subset B$: A ist nicht Teilmenge von B)

$=$ Gleichheit von Mengen

Bsp.: $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$, $\{1, 2\} \neq \{1, 3\}$

$A = B$ bedeutet, dass sowohl $A \subset B$ als auch $B \subset A$ gilt.

$\cup$ Vereinigung von Mengen

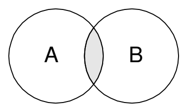


$A \cup B$ (A vereinigt B) enthält alle Elemente,

die in mindestens eine der beiden Mengen enthalten sind.

Bsp.: $\{1, 2, 3\} \cup \{1, 2, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$

$\cap$ Durchschnitt von Mengen



$A \cap B$ (A geschnitten B) enthält alle Elemente,

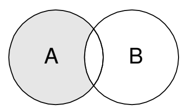
die gleichzeitig in beiden Mengen enthalten sind.

Bsp.: $\{1, 2, 3\} \cap \{1, 2, 4\} = \{1, 2\}$

Zwei Mengen, die keine gemeinsamen Elemente besitzen, für die also $A \cap B = \varnothing$ ist, nennt man *disjunkt*.

Bsp.: $\{1, 2\} \cap \{3, 4\} = \varnothing$

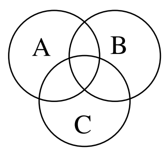
$\setminus$ Differenzmenge



$A \setminus B$ (A ohne B) enthält alle Elemente, die in A , aber nicht in B enthalten sind.

Bsp.: $\{1, 2, 3\} \setminus \{1, 2, 4\} = \{3\}$

<u>Regeln</u>



(1) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(4) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ bei endlichen Mengen

Die Regeln lassen sich mittels *Venn-Diagrammen* grafisch einfach veranschaulichen.

$\forall$ Allquantor: Für alle

Bsp.: $\forall\, x \in \{\ 2,\ 4,\ 6\ \}$ gilt: x ist durch 2 teilbar

$\exists$ Existenzquantor: Es gibt (existiert) (mindestens) ein(e)

Bsp.: $\exists\, x \in \{\ 2,\ 3,\ 4\ \}$ mit der Eigenschaft: x ist durch 2 teilbar.

Versehen mit einem Ausrufezeichen, also $\exists!$ bedeutet das Symbol: Es gibt *genau ein* Element mit der entsprechenden Eigenschaft.

$\times$ Direktes Produkt (Kreuzprodukt, kartesisches Produkt) von Mengen

$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \{\ (\ a, b\ ) \mid a \in \mathrm{A}, b \in \mathrm{B}\ \}$

$\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ (A kreuz B) bezeichnet die Menge aller geordneten Paare (a, b).

Bsp.: $\mathrm{A} = \{\ 1,\ 2,\ 3\ \}$, $\mathrm{B} = \{\ 3,\ 4\ \}$. Dann ist

$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \{\ (\ 1, 3\ ), (\ 1, 4\ ), (\ 2, 3\ ), (\ 2, 4\ ), (\ 3, 3\ ), (\ 3, 4\ )\ \}$

Für endliche Mengen A und B gilt $|\ \mathrm{A} \times \mathrm{B}\ | = |\ \mathrm{A}\ | \cdot |\ \mathrm{B}\ |$.

$\mathrm{A} \times \mathrm{B} \times \mathrm{C} \times \ldots$ (n Mengen) $= \{\ (\ a, b, c, \ldots\ ) \mid a \in \mathrm{A}, b \in \mathrm{B}, c \in \mathrm{C}, \ldots\ \}$

definiert analog die Menge aller geordneten *n-Tupel*.

2. Zahlenmengen

$+ , - , \cdot , :$ Symbole für die vier Grundrechenarten.

$< , \leq , > , \geq$ Symbole für die Ordnungsrelationen

(kleiner, kleiner oder gleich, größer, größer oder gleich).

$\mathbb{N}$ Menge der natürlichen Zahlen: $\{\ 1,\ 2,\ 3, \ldots\ \}$

$\mathbb{Z}$ Menge der ganzen Zahlen: $\{\ \ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2, \ldots\}$

$\mathbb{Q}$ Menge der rationalen Zahlen: $\{\ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\ \}$

Rationale Zahlen sind als endliche oder periodische Dezimalzahlen darstellbar, z.B. $\frac{3}{4} = 0{,}75$ oder $\frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}$.

$\mathbb{R}$ Menge der reellen Zahlen

Umfasst die Menge der rationalen und der irrationalen Zahlen; irrationale Zahlen sind nichtperiodische Dezimalzahlen mit unendlich vielen Nachkommastellen, z.B. $\sqrt{2} = 1{,}414213...$ oder $\pi = 3{,}14159....$ Jede irrationale Zahl kann auf beliebig viele Nachkommastellen genau durch eine rationale Zahl angenähert werden (Taschenrechner).

$\mathbb{C}$ Menge der komplexen Zahlen

Eine komplexe Zahl z besitzt die Darstellung $z = a + b \cdot \mathrm{i}$. Dabei sind a und b reelle Zahlen und i ist die imaginäre Einheit mit $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1$; a nennt man den Realteil, $b \cdot \mathrm{i}$ den Imaginärteil von z. Komplexe Zahlen sind als Zahlenpaar (a, b) in der Koordinatenebene grafisch darstellbar. Auf die vier Grundrechenarten in $\mathbb{C}$ wird später noch kurz eingegangen.

Insgesamt erhält man für die Zahlenmengen die Teilmengenbeziehungen:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} .$$

Symbole für Mengen werden gelegentlich noch mit Ornamenten wie $_{+\,,\,-\,,\,0}$ versehen, um bestimmte Teilmengen zu kennzeichnen. Dabei bedeutet:

M_+ $\{\ m \in \mathrm{M} \mid m > 0\ \}$

z.B. $\mathbb{Q}_+ = \{\ q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\ \}$

M_- $\{\ m \in \mathrm{M} \mid m < 0\ \}$

z.B. $\mathbb{Q}_- = \{\ q \in \mathbb{Q} \mid q < 0\ \}$

M_0 $\mathrm{M} \cup \{\ 0\ \}$

z.B. $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{\ 0\ \}$ oder $\mathbb{R}_{+0} = \{\ r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\ \}$

Als Teilmengen reeller Zahlen spielen die *Intervalle* eine wichtige Rolle.

Für reelle Zahlen a und b bezeichnet man

$(a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$ als offenes Intervall,

$[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$ als abgeschlossenes Intervall,

sowie $(a, b]$ und $[a, b)$ analog als halboffene Intervalle.

Dabei bedeutet z.B. $a < x < b$, dass sowohl $a < x$ als auch $x < b$ gelten soll; alle Zahlen x zwischen a und b erfüllen diese beiden Bedingungen.

Als Intervallgrenze ist auch das Symbol ∞ zulässig:

∞ Symbol für "unendlich",
z.B. $(2, \infty) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 2 \}$ oder $(-\infty, 3] = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3 \}$.
Dabei ist ∞ keine Zahl, mit der gerechnet werden darf.

Für das direkte Produkt der reellen Zahlen mit sich selbst wird folgende Schreibweise gewählt:

$\mathbb{R}^2$	$= \mathbb{R} \times \mathbb{R}$	Menge der Paare reeller Zahlen, 2-dimensionaler Raum,
$\mathbb{R}^3$	$= \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$	Menge der Tripel reeller Zahlen, 3-dimensionaler Raum,
$\mathbb{R}^n$	$= \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$	Menge der n-Tupel reeller Zahlen, n-dimensionaler Raum.

Im Zusammenhang mit Zahlenmengen seien auch noch die *Dual*-, *Oktal*- und *Hexadezimal*zahlen erwähnt, auf denen die Numerik in der EDV beruht. Während unserem Dezimalsystem die Basiszahl 10 zugrunde liegt, besitzen die oben angeführten Zahlensysteme die Basiszahlen 2, 8 bzw. 16.

Bsp.: Die *Dezimal*zahl 3456 besitzt den Aufbau
$3456 = 6 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^3 = 6 + 50 + 400 + 3000.$
Analog besitzt die *Dual*zahl 100101 den Aufbau
$100101 = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 = 1 + 0 + 4 + 0 + 0 + 32 = 37.$
Die Dezimalzahl 37 kann also durch die duale Zahl 100101 dargestellt werden.

3. Aussagen

Aussage Satz oder mathematischer Ausdruck, der eindeutig wahr (w) oder falsch (f) ist.

Bsp.:
- Rom ist die Hauptstadt Italiens. (w)
- $1 + 1 = 2$ (w)
- $2 > 1$ (w)
- $3 \cdot 3 = 8$ (f)

Keine Aussagen sind z.B.
- Mathematik ist schwierig.
- Es ist kalt.
- $1 + 1$
- $x = 0$

Aussagen können verneint oder mit anderen Aussagen verknüpft werden.

$\neg$A *Negation* (Verneinen) einer Aussage A (lies: nicht A)
Die Negation einer Aussage kehrt deren Wahrheitsgehalt um.

Bsp.:
- A: $2 > 1$ (w) $\neg$A: $\neg(2 > 1)$, also $2 \leq 1$ (f)
- A: $3 \cdot 3 = 8$ (f) $\neg$A: $\neg(3 \cdot 3 = 8)$, also $3 \cdot 3 \neq 8$ (w)

A$\wedge$B Verknüpfen von zwei Aussagen A, B durch *und* (*Konjunktion*)
A$\wedge$B ist nur dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr sind.

Bsp.:
- $(1 + 1 = 2) \wedge (2 > 1)$ (w)
- $(1 + 1 = 2) \wedge (3 \cdot 3 = 8)$ (f)

A$\vee$B Verknüpfen von zwei Aussagen A, B durch *oder* (*Disjunktion*)
A$\vee$B ist wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen wahr ist.

Bsp.:
- $(1 + 1 = 2) \vee (2 > 1)$ (w)
- $(1 + 1 = 2) \vee (3 \cdot 3 = 8)$ (w)

Mittels *Wahrheitstafeln* lassen sich diese Zusammenhänge übersichtlich darstellen:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	f

Eine fundamentale Rolle in der Mathematik spielen Folgerungen und Äquivalenzen zwischen Aussagen, denn sie bilden die Grundlage mathematischer Beweistechnik.

$A \rightarrow B$ *Implikation* (Folgerung)

Alternative Sprechweisen: Aus A folgt B; A impliziert B; wenn A wahr ist, dann auch B; unter der Voraussetzung von A gilt B; A ist eine *hinreichende*, aber nicht unbedingt eine *notwendige Bedingung* für B.

Bsp.: Physikalisches Experiment

A: Ein dünnes Glas wird aus einer bestimmten Höhe auf eine harte Oberfläche fallen gelassen.

B: Das Glas zerspringt.

$A \rightarrow B$: Wenn das Glas fallen gelassen wird, dann zerspringt es.

Das Fallenlassen ist ein hinreichender Grund für das Zerspringen, jedoch kein notwendiger. Denn außer dem Experiment A gibt es noch zahlreiche andere Möglichkeiten, die Wirkung B zu erzielen. Die Aussage $B \rightarrow A$ ist hier demnach falsch.

Wichtig: Die Implikation $A \rightarrow B$ besagt nur, dass für <u>wahres</u> A auch B wahr sein muss. $A \rightarrow B$ ist also auch dann richtig, wenn aus einer falschen Aussage A eine beliebige (wahre oder falsche) Aussage B abgeleitet wird.

Bsp.:
- $0 = 1 \rightarrow 1 = 1$ (w)
- $0 = 1 \rightarrow 1 = 3$ (w)
- $1 = 1 \rightarrow 0 = 1$ (f)

$A \leftrightarrow B$ *Äquivalenz* der beiden Aussagen A, B

Alternative Sprechweisen: A und B sind äquivalent; A gilt genau dann, wenn B gilt (wahr ist); A ist *notwendig* und *hinreichend* für B; es gilt sowohl $A \rightarrow B$ als auch $B \rightarrow A$.

Bsp.: (Funktionierender) Kaffeeautomat

A: Geld wird eingeworfen.

B: Kaffee kommt.

$A \leftrightarrow B$: Kaffee kommt dann und nur dann, wenn Geld eingeworfen wird.

Äquivalente Aussagen sind entweder beide gleichzeitig wahr (Geld wird eingeworfen und Kaffee kommt) oder gleichzeitig falsch (Geld wird nicht eingeworfen und Kaffee kommt nicht). Beim Auftreten anderer Ereignisse wäre die Äquivalenzbeziehung falsch, sprich der Kaffeeautomat defekt.

Für Implikation und Äquivalenz ergeben sich die Wahrheitstafeln:

A	B	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
w	w	w	w
w	f	f	f
f	w	w	f
f	f	w	w

Mittels Wahrheitstafeln lässt sich nun auch formal die Gültigkeit logischer Schlussfolgerungen überprüfen.
Als Beispiel soll die Richtigkeit folgender Aussage bestätigt werden:
A und B sind genau dann äquivalent, wenn sowohl $A \rightarrow B$ als auch $B \rightarrow A$ wahr ist.[1]
Umgesetzt in die Terminologie der Aussagenlogik: $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$.

Der Nachweis ergibt sich aus der Wahrheitstafel:

[1] Diese Beziehung verwendet man in der Mathematik häufig zum Beweis von Äquivalenzaussagen, indem die beiden "Richtungen" $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow A$ einzeln nachgewiesen werden.

A	B	$A \to B$	$B \to A$	$(A \to B) \wedge (B \to A)$	$A \leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	f	f
f	f	w	w	w	w

$A \to B$ und $B \to A$ sind selbst wieder Aussagen, die durch *und* verknüpft werden. Die resultierenden Wahrheitswerte (Spalte 5) stimmen für alle Kombinationen mit denen von $A \leftrightarrow B$ (Spalte 6) überein. Damit sind die Aussagen äquivalent.

Regeln
(1) $A \leftrightarrow \neg(\neg A)$
(2) $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
(3) $\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
(4) $A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
(5) $A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
(6) $(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$ [2]

4. Aussageformen

Die *Gleichung* $x = 0$ wurde im letzten Abschnitt als Beispiel für einen mathematischen Ausdruck genannt, der keine Aussage darstellt. Es handelt sich vielmehr um eine *Aussageform*. Erst wenn für die *Variable x* eine Zahl eingesetzt wird, ist die Gleichung eindeutig wahr oder falsch und geht damit in eine Aussage über. Zunächst einige Begriffe:

- *Variable* — Platzhalter (Buchstaben oder Symbole) für eine Zahl,
- *Term* — Mathematischer Ausdruck (mit oder ohne Variablen), z.B. $1 + 1$, $x - 1$, $x : y$,
- *Gleichung* — Verknüpfung von zwei Termen mittels "=" , z.B. $1 + 1 = 2$, $x - 1 = 2$,
- *Ungleichung* — Verknüpfung von zwei Termen mittels einer der Relationen $<$, $\le$, $>$, $\ge$, z.B. $1 + 1 < 3$, $x - 1 \ge 2$, $x + 2y \le 4$,
- *Aussageform* — Verknüpfung von zwei Termen mit mindestens einer Variablen durch eine Ordnungsrelation (Gleichung bzw. Ungleichung) oder eine Relation wie "ist Teiler von"; Aussageformen gehen nach dem Einsetzen von Zahlen für die Variable(n) in Aussagen über.
- *Grundmenge* — $\mathbb{G}_A$ einer Aussageform A: Wertevorrat der Variable(n); im weiteren wird stets vorausgesetzt: $\mathbb{G}_A = \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{R}^n$).
- *Definitionsmenge* — $\mathbb{D}_A \subset \mathbb{G}_A$ einer Aussageform A: Teilmenge der Grundmenge, für die die Aussageform definiert ist, z.B. A: $\frac{1}{x} = 2$, $\mathbb{G}_A = \mathbb{R}$, $\mathbb{D}_A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- *Lösungsmenge* — $\mathbb{L}_A \subset \mathbb{D}_A$ einer Aussageform A: Teilmenge der Definitionsmenge, für die die Aussageform wahr wird, z.B.

  (1) $x = 2$, $\mathbb{L} = \{2\}$ (2) $x + 1 = 3$, $\mathbb{L} = \{2\}$ (3) $x^2 = 4$, $\mathbb{L} = \{-2, 2\}$
  (4) $x \le 3$, $\mathbb{L} = (-\infty, 3]$ (5) $x = x$, $\mathbb{L} = \mathbb{R}$ (6) $x + 1 = x$, $\mathbb{L} = \emptyset$

  Subtrahiert man auf beiden Seiten der Gleichung (5) die Variable *x*, so geht die Aussageform in die wahre Aussage $0 = 0$ über, während sich aus Gleichung (6) die falsche Aussage $1 = 0$ ergibt. Aussageform (5) ist *allgemeingültig*, Aussageform (6) *widersprüchlich*.

Das Bestimmen der Lösungsmenge von Gleichungen und Ungleichungen stellt einen wichtigen Teilbereich der Mathematik dar und wird in späteren Abschnitten ausführlich behandelt.
Aussageformen können nun wie Aussagen verknüpft werden, z.B. durch $\wedge$ bzw. $\vee$. Dabei verwendet man für Implikationen statt $\to$ das Symbol $\Rightarrow$, bei Äquivalenzumformungen statt $\leftrightarrow$ das Symbol $\Leftrightarrow$. Für die Lösungsmengen derartig verknüpfter Aussageformen gelten folgende Regeln:

[2] Wird ebenfalls häufig in Beweisen benutzt, im Abschnitt "Beweistechnik" kommen wir darauf noch einmal zurück.

Regeln (1) $\mathbb{L}_{\neg A} = \mathbb{D}_A \setminus \mathbb{L}_A$ (2) $\mathbb{L}_{A\wedge B} = \mathbb{L}_A \cap \mathbb{L}_B$ (3) $\mathbb{L}_{A\vee B} = \mathbb{L}_A \cup \mathbb{L}_B$

(4) $\mathbb{L}_{A\Rightarrow B} = \begin{cases} \mathbb{D}_A \cap \mathbb{D}_B & \text{falls } \mathbb{L}_A \subset \mathbb{L}_B \\ \varnothing & \phantom{\text{falls }} \mathbb{L}_A \not\subset \mathbb{L}_B \end{cases}$ (5) $\mathbb{L}_{A\Leftrightarrow B} = \begin{cases} \mathbb{D}_A \cap \mathbb{D}_B & \text{falls } \mathbb{L}_A = \mathbb{L}_B \\ \varnothing & \phantom{\text{falls }} \mathbb{L}_A \neq \mathbb{L}_B \end{cases}$

Beispiele und Erläuterungen: A bzw. B seien folgende Aussageformen

A: $x = 1$, $\mathbb{D}_A = \mathbb{R}$, $\mathbb{L}_A = \{1\}$, B: $x^2 = 1$, $\mathbb{D}_B = \mathbb{R}$, $\mathbb{L}_B = \{-1, 1\}$.

- $\neg$A: $x \neq 1$, $\mathbb{L}_{\neg A} = \mathbb{D}_A \setminus \mathbb{L}_A = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- A $\wedge$ B: $(x = 1) \wedge (x^2 = 1)$, $\mathbb{L}_{A\wedge B} = \mathbb{L}_A \cap \mathbb{L}_B = \{1\} \cap \{-1, 1\} = \{1\}$.
  Gleichungen in einem Gleichungssystem sind – ohne das es explizit notiert wird – stets durch $\wedge$ verbunden, da Lösungen des Systems alle Gleichungen simultan erfüllen müssen.
- A $\vee$ B: $(x = 1) \vee (x^2 = 1)$, $\mathbb{L}_{A\vee B} = \mathbb{L}_A \cup \mathbb{L}_B = \{1\} \cup \{-1, 1\} = \{-1, 1\}$.
  Bei Fallunterscheidungen, z.B. beim Rechnen mit Beträgen, werden die einzelnen Aussageformen mittels $\vee$ verknüpft. Die Gleichung $|x| = 1$ beispielsweise ist äquivalent zu $(x = 1) \vee (x = -1)$, besitzt also ebenfalls die Lösungsmenge $\{-1, 1\}$.
- A$\Rightarrow$B: $(x = 1) \Rightarrow (x^2 = 1)$, $\mathbb{L}_{A\Rightarrow B} = \mathbb{D}_A \cap \mathbb{D}_B = \mathbb{R}$, da $\mathbb{L}_A = \{1\} \subset \{-1, 1\} = \mathbb{L}_B$.
  Die Implikation A$\Rightarrow$B stellt also eine Aussage dar. Sie wahr ist für alle $x \in \mathbb{D}_A \cap \mathbb{D}_B$, falls $\mathbb{L}_A \subset \mathbb{L}_B$, und falsch, falls $\mathbb{L}_A \not\subset \mathbb{L}_B$. Verkürzt ausgedrückt: $\boxed{A \Rightarrow B \quad \text{bedeutet} \quad \mathbb{L}_A \subset \mathbb{L}_B}$.
  Die umgekehrte Implikation B$\Rightarrow$A ist hier falsch, also $\mathbb{L}_{B\Rightarrow A} = \varnothing$, da $\mathbb{L}_B \not\subset \mathbb{L}_A$.
- A$\Leftrightarrow$B: $(x = 1) \Leftrightarrow (x^2 = 1)$, $\mathbb{L}_{A\Leftrightarrow B} = \varnothing$, da $\mathbb{L}_A = \{1\} \neq \{-1, 1\} = \mathbb{L}_B$.
  Die Äquivalenzaussage A$\Leftrightarrow$B ist damit falsch. Zwei Aussageformen A, B sind genau dann äquivalent für alle $x \in \mathbb{D}_A \cap \mathbb{D}_B$, wenn $\mathbb{L}_A = \mathbb{L}_B$. Dazu müssen beide Implikationen A$\Rightarrow$B und B$\Rightarrow$A richtig sein.
  Verkürzt ausgedrückt: $\boxed{A \Leftrightarrow B \quad \text{bedeutet} \quad \mathbb{L}_A = \mathbb{L}_B}$.

5. Zusammenhang: Mengen - Aussagen

Einerseits verwendet man Aussagen zum Nachweis von Mengenbeziehungen, andererseits lassen sich manche Aussagen durch Mengenbeziehungen verdeutlichen.

- Teilmenge - Implikation
  Für zwei Mengen X und Y gilt die Äquivalenzbeziehung
  $X \subset Y \quad \leftrightarrow \quad (x \in X \rightarrow x \in Y)$.
  Die Zugehörigkeit eines Objekts zu einer Menge drückt sich i.a. im Vorhandensein bestimmter Eigenschaften aus, welche die Elemente der Menge auszeichnen. Der Nachweis der Teilmengenbeziehung $X \subset Y$ geschieht daher durch Nachweis der Implikation: Wenn ein Objekt die charakterisierenden Eigenschaften der Menge X besitzt, dann auch die Eigenschaften der Menge Y .
  Bsp.: X = { Menge der durch 6 teilbaren, natürlichen Zahlen }
  Y = { Menge der geraden, natürlichen Zahlen }
  Zum Nachweis der Teilmengenbeziehung $X \subset Y$ zeigt man:
  Wenn eine Zahl die Eigenschaft besitzt, durch 6 teilbar zu sein, dann auch die Eigenschaft, gerade zu sein, was offensichtlich richtig ist.
- Gleichheit von Mengen - Äquivalenz von Aussagen
  Zwei Mengen X und Y sind gleich, wenn sowohl $X \subset Y$ als auch $Y \subset X$ ist, also formal:
  $X = Y \quad \leftrightarrow \quad (X \subset Y \wedge Y \subset X)$.
  Die beiden Teilmengenbeziehungen lassen sich wie oben dargestellt als Implikationen formulieren:
  $X = Y \quad \leftrightarrow \quad ((x \in X \rightarrow x \in Y) \wedge (x \in Y \rightarrow x \in X))$.
  Die beiden Implikationen wiederum fasst man zu einer Äquivalenzbeziehung zusammen und erhält
  $X = Y \quad \leftrightarrow \quad (x \in X \leftrightarrow x \in Y)$.
- Verneinen von Aussagen
  Der Zusammenhang zwischen Teilmenge und Implikation lässt sich auch wie folgt ausdrücken:
  $X \subset Y \quad \leftrightarrow \quad (\forall x \in X \text{ gilt: } x \in Y)$.
  Aussagen, die den Begriff "alle" enthalten, sind daher häufig als Teilmengenaussagen interpretierbar.
  Bsp.: A: Alle durch 6 teilbaren Zahlen sind gerade.

Etwas anders formuliert lautet die Aussage A: Für alle durch 6 teilbaren Zahlen gilt, dass sie gerade sind.

Die Aussage A ist damit äquivalent zur Teilmengenbeziehung $X \subset Y$ des letzten Beispiels.

Aus der Mengendarstellung erhält man leicht die Verneinung einer Aussage. Die Verneinung $\neg A$ entspricht der Beziehung $X \not\subset Y$. Wenn aber X keine Teilmenge von Y ist, so muss es mindestens ein Element in X geben, welches nicht zu Y gehört. Bezogen auf das Beispiel ergibt sich insgesamt:

$\neg A$: Es gibt mindestens eine durch 6 teilbare Zahl, die nicht gerade ist.

Da die Verneinung von $\neg A$ wieder A ist, folgen allgemein die

Regeln: (1) A: $\forall\, x \in X$ gilt die Eigenschaft E $\rightarrow$ $\neg A$: $\exists\, x \in X$, welches E nicht besitzt,

(2) B: $\exists\, x \in X$ mit der Eigenschaft E $\rightarrow$ $\neg B$: $\forall\, x \in X$ gilt $\neg E$.

Zur Verdeutlichung bilde man die Negation der Aussagen

"Des nachts sind alle Katzen grau" und "An der RUB gibt es einen schlauen Studenten".

Die Regel (1) wird auch angewandt beim Widerlegen einer Aussage durch ein Gegenbeispiel.

Bsp.: Behauptung: "Die Wurzel aus einer natürlichen Zahl ist stets rational".

Anders formuliert: $\forall\, n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$.

Die Behauptung wird in einem späteren Abschnitt widerlegt, indem nachgewiesen wird: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

6. Rechnen

6.1 Grundrechenarten

Einfache Rechenregeln werden hier nicht explizit formuliert, sondern nur anhand einiger Beispiele kurz wiederholt.

- Vorzeichen, Klammern

$a \cdot b + c = (a \cdot b) + c$ (Punktrechnung vor Strichrechnung, Klammern zuerst ausrechnen)

$a : b \cdot c = (a : b) \cdot c$ (Punktrechnung von links nach rechts auswerten)

$a \cdot (b + c) = ab + ac$ (statt $a \cdot b$ schreibt man kurz ab)

$-(a - b) = -a + b$ (ein Minus vor der Klammer ändert die Vorzeichen in der Klammer)

$-a^2 = -(a^2)$

- Binomische Formeln

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Übung:

$4x^2 + 12x + 9 =$

$9x^2 - 12x + 4 =$

$25x^2 - 16 =$

- Faktorisieren eines quadratischen Terms

$(x + a) \cdot (x + b) = x^2 + (a + b)\,x + a\,b$

Beispiel und Übung:

$x^2 + 7x + 10 = (x + 5)\,(x + 2)$, da $5 \cdot 2 = 10$ und $5 + 2 = 7$

$x^2 + 7x + 12 =$ $x^2 + 3x - 4 =$ $x^2 - x - 12 =$

$x^2 - 2x - 3 =$ $x^2 - 2x - 8 =$ $x^2 - 8x + 12 =$

- Bruchrechnen $a : b$, $a \div b$, a / b , $\frac{a}{b}$ (a: Zähler, b: Nenner)

$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$, $b, c \neq 0$	(Erweitern und Kürzen)	$\frac{0,5}{1,5} =$ $\frac{4}{0,04} =$ $\frac{0,132}{0,12} =$
$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$, $b, c \neq 0$		$\frac{26}{91} =$ $\frac{1,025}{0,025} =$ $\frac{0,352}{0,022} =$
	aber:	$\frac{a}{b} \neq \frac{a + c}{b + c}$ $\frac{4x + 3}{2x + 3} \neq \frac{4x}{2x} = 2$
$-\frac{a - b}{c - d} = \frac{-a + b}{c - d} = \frac{a - b}{-c + d}$	(Bruchstrich ist wie eine Klammer)	$-\frac{5 - 1}{2} = -\frac{4}{2} = -2 = \frac{-5 + 1}{2}$
$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$, $b \neq 0$	(Addieren bei gleichem Nenner)	$\frac{2,01}{0,03} + \frac{0,3}{0,03} =$ $\frac{18}{7} - \frac{0,5}{7} =$
$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{ad + bc}{bd}$, $b, d \neq 0$	(gleichnamig machen)	$\frac{1}{3} + \frac{2}{0,3} =$ $\frac{2}{0,3} - \frac{3}{0,4} =$
$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, $b, d \neq 0$	(Zähler · Zähler, Nenner · Nenner)	$\frac{0,3}{2,5} \cdot \frac{5}{0,6} =$ $\frac{0,18}{0,025} \cdot \frac{0,5}{0,9} =$
$1 \div \frac{a}{b} = \frac{b}{a}$, $a, b \neq 0$	(Kehrwert)	$1 \div \frac{1}{4} =$ $1 \div \frac{0,3}{9} =$
$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$, $b, c, d \neq 0$	(mit dem Kehrwert multiplizieren)	$\frac{1}{2} \div 4 =$ $\frac{3}{0,4} \div \frac{0,3}{4} =$

Übung:

- Übung: Vereinfachen von Termen

(1) $\frac{x^2-1}{x+1}=$ (2) $\frac{x^4-1}{x^2-1}=$ (3) $\frac{(x-1)^2-(x-2)(x-1)}{(x-1)^2}=$ (4) $\frac{3x-18}{x^2-36}=$ (5) $\frac{x^2-1}{(x+1)^2}+\frac{2}{x+1}=$

(6) $\frac{x^2y-y}{xy-y}=$ (7) $\frac{xy^2-y^3}{x^2y-y^3}=$ (8) $\frac{xy+yz}{y-1}:\frac{x+z}{y^2-1}=$ (9) $\frac{x^2-14x+49}{x^2-9x+14}=$ (10) $\frac{2x^2+14x+24}{4x^2-36}=$

- Exkurs: Umwandeln einer rationalen Zahl in eine endliche oder periodische Dezimalzahl und umgekehrt

Beispiele: $1/2 = 0{,}5$ (Bruch in endliche Dezimalzahl)

$1/3 = 0{,}\overline{3}$ (Bruch in periodische Dezimalzahl)

```
17 / 7  = 2,428571
14
 30
 28
  20
  14
   60
   56
    40
    35
     50
     49
      10
       7
       3
```

$17/7 = 2{,}\overline{428571}$ (Bruch in periodische Dezimahlzahl)
Länge der Periode: 6
Allgemein: Länge der Periode $\le |\,\text{Nenner}\,| - 1$

$0{,}123 = 123/1000$ (endliche Dezimalzahl in Bruch)

$0{,}1\overline{23} = 61/495$ (periodische Dezimalzahl in Bruch)

denn: Multiplikation mit 10 hoch Länge der Periode ergibt $100 \cdot 0{,}1\overline{23} = 12{,}3\overline{23}$.

Subtrahiert man davon die Zahl $0{,}1\overline{23}$, so erhält man

$99 \cdot 0{,}1\overline{23} = 12{,}3\overline{23} - 0{,}1\overline{23} = 12{,}2$, also $0{,}1\overline{23} = \frac{12{,}2}{99} = \frac{122}{990} = \frac{61}{495}$.

Irrationale Zahlen wie π, e, $\sqrt{2}$ etc. sind daher keine endlichen oder periodischen Dezimalzahlen.

- Betrag: $|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \ge 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$, z.B. $|-3| = 3 = |3|$,

$|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{für } x+2 \ge 0 \\ -(x+2) & x+2 < 0 \end{cases}$, $|x^2+1| = x^2+1$, da der Term stets ≥ 0 ist;

$|x+2| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=3 \\ -(x+2)=3 \end{cases}$ für $\begin{matrix} x+2 \ge 0 \\ x+2<0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=3 \\ x+2=-3 \end{cases}$ für $\begin{matrix} x+2 \ge 0 \\ x+2<0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-5 \end{cases}$,

in Kurzform: $|x+2| = 3 \Leftrightarrow x+2 = \pm 3 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -5$, also $\mathbb{L} = \{-5, 1\}$;

$|x+2| = |2x+1| \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 2x+1 \\ x+2 = -(2x+1) \\ -(x+2) = 2x+1 \\ -(x+2) = -(2x+1) \end{cases}$ für $\begin{matrix} x+2 \ge 0 \wedge 2x+1 \ge 0 \\ x+2 \ge 0 \wedge 2x+1 < 0 \\ x+2 < 0 \wedge 2x+1 \ge 0 \\ x+2 < 0 \wedge 2x+1 < 0 \end{matrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 2x+1 \\ x+2 = -(2x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$,

in Kurzform: $|x+2| = |2x+1| \Leftrightarrow x+2 = \pm(2x+1) \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$, also $\mathbb{L} = \{-1, 1\}$.

Allgemein für 2 Terme T_1, T_2: $|T_1| = |T_2| \Leftrightarrow T_1 = T_2 \vee T_1 = -T_2$.

Ungleichungen: $|a+b| \le |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung);

$|x| \le a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$, $a \ge 0$; $|x-a| < b \Leftrightarrow x \in (a-b, a+b)$, $b > 0$;

ε – Umgebung: $U_\varepsilon(a) = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \varepsilon \} = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

6.2 Potenzen, Wurzeln

Potenzen: $\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ mal}}}$ (a hoch n) a: Basis, n: Exponent

Bsp.: $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, $(-1)^1 = -1$, $(-1)^2 = 1$, $(-1)^3 = -1$

Zunächst werden die Rechenregeln für natürliche Exponenten angegeben, dann erweitert auf ganzzahlige, rationale und schließlich auf irrationale Exponenten.

I. Natürliche Exponenten

<u>Regeln</u> für $a, b \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}$

		Beispiele:
(1)	$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ mal}} \cdot \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ mal}} = a^{m+n}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^7$
(2)	$a^m / a^n = a^{m-n}, \; a \neq 0, \; m > n$	$2^4 / 2^3 = 2^1 = 2$
(3)	$a^n \cdot b^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ mal}} \cdot \underbrace{b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ mal}} = (ab)^n$	$2^4 \cdot 3^4 = 6^4$
(4)	$a^n / b^n = (a/b)^n, \; b \neq 0$	$2^4 / 3^4 = (2/3)^4$
(5)	$(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$	$(2^3)^4 = 2^{12} = (2^4)^3 \neq 2^{4^3} = 2^{64}$

II. Ganzzahlige Exponenten

Aus Regel (2) erhält man für $a \neq 0$ und

				Beispiele:
$n = m$:	$1 = \frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$,	also	$a^0 = 1$,	$(-3)^0 = 1$
$n = m + 1$:	$\frac{1}{a} = \frac{a^m}{a^{m+1}} = a^{m-(m+1)} = a^{-1}$,	also	$a^{-1} = \frac{1}{a}$,	$2^{-1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$
$n = 2m$:	$\frac{1}{a^m} = \frac{a^m}{a^m \cdot a^m} = a^{m-2m} = a^{-m}$,	also	$\boxed{a^{-m} = \frac{1}{a^m}}$	$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0{,}001$

III. Rationale Exponenten, Wurzeln

Aus Regel (5) erhält man für $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$: $\quad (a^{1/n})^n = a^{n/n} = a = (a^n)^{1/n} \quad$ (*).

$a^{1/n}$ gibt also die Zahl an, die n mal mit sich selbst multipliziert wieder a ergibt. Damit ist $a^{1/n}$ die n-te Wurzel aus a.

$\boxed{a^{1/n} = \sqrt[n]{a}}$ $\quad a$: Radikant, $\quad n$: Wurzelexponent,

speziell $\quad \sqrt[2]{a} = \sqrt{a} = a^{1/2} \quad$ (Quadratwurzel oder einfach Wurzel aus a).

Prinzipiell sind Wurzeln nur für Zahlen $a \geq 0$ definiert, und nur dafür gilt die Regel (5) uneingeschränkt. Da es für praktisches Rechnen in den reellen Zahlen aber Vorteile bietet, werden im Folgenden ungerade Wurzeln (n = 3, 5, etc.) auch für $a < 0$ zugelassen, obgleich der Zusammenhang (*) dann nur noch eingeschränkt gilt (siehe unten). Alle anderen Rechenregeln für Potenzen gelten uneingeschränkt auch für Wurzeln.[3]

Bsp.:

$\sqrt[2]{9} = \sqrt{9} = 9^{1/2} = 3$, $\quad \sqrt[4]{16} = 16^{1/4} = 2$, $\quad \sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$ (nicht definiert in $\mathbb{R}$),

$\sqrt[3]{27} = 27^{1/3} = 3$, $\quad \sqrt[5]{32} = 32^{1/5} = 2$, $\quad \sqrt[3]{-8} = (-8)^{1/3} = -2$,

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$, $\quad \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 4} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{4} = 2 \cdot \sqrt{3}$,

$\sqrt[3]{-54} = \sqrt[3]{(-1) \cdot 2 \cdot 27} = \sqrt[3]{-1} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{27} = -3 \cdot \sqrt[3]{2}$,

$\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{20}{5}} = \sqrt{4} = 2$, $\quad \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x - y}} = \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x - y}} = \sqrt{x + y}$ für $x \neq y$,

aber: $\quad \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \neq \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$,

also $\quad \sqrt{x + y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$, $\quad \sqrt{x^2 + 4} \neq x + 2$.

Bemerkung: Die Wurzel aus einer Zahl ist stets eindeutig bestimmt, beispielsweise ist $\sqrt{4} = 2$ und <u>nicht</u> $\sqrt{4} = \pm 2$. Ebenso ist $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$ und nicht -2, denn der Zusammenhang (*) gilt bei geradem n nur für positive Radikanten, nicht aber für negative. Wegen $x^2 = |x|^2$ ist $\sqrt{x^2} = \sqrt{|x|^2} = |x|$ und allgemein bei <u>geradem</u> n : $\sqrt[n]{x^n} = \sqrt[n]{|x|^n} = |x|$. Daher führt Wurzelziehen bei Potenzgleichungen mit geradem Exponenten i.a. zu 2 Lösungen.

---

[3] Siehe auch den Beitrag „Ungerade Wurzeln aus negativen Zahlen“ auf meiner Seite: www.rub.de/mathe-wiwi/skripte/wurzel.pdf .

Bsp.: $x^2 = 4$ Wurzelziehen ergibt $|x| = 2$, also $x = 2 \vee x = -2$, kurz $x = \pm 2$.

Ohne den Zwischenschritt, also $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$, führt dies zur weitverbreiteten irrigen Annahme, $\sqrt{x^2} = x$ und $\sqrt{4} = \pm 2$.

$x^3 = -8$ Ziehen der 3. Wurzel (hoch 1/3) ergibt $(x^3)^{1/3} = (-8)^{1/3}$, also $x = -2$.

Das letzte Beispiel verdeutlicht einen Hauptgrund für das Zulassen ungerader Wurzeln aus negativen Zahlen. Lässt man dies nicht zu, wird es schwierig zu erklären, welcher Rechenschritt hier zur Lösung führt.

Beachten: Für <u>gerades</u> n ist $\sqrt[n]{x^n} = |x| \;\; \forall x \in \mathbb{R}$, $(\sqrt[n]{x})^n = x^{n/n} = x$ für $x \geq 0$ (für $x < 0$ nicht definiert);

für <u>ungerades</u> n ist $\sqrt[n]{x^n} = x^{n/n} = x = (\sqrt[n]{x})^n \;\; \forall x \in \mathbb{R}$.

Für beliebige rationale Exponenten m/n erhält man wieder aus der obigen Regel (5):

(**) $a^{m/n} = (a^{1/n})^m = (a^m)^{1/n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, definiert für $\begin{array}{l} a \in \mathbb{R}_+ \text{ bei geradem } n \\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ bei ungeradem } n \end{array}$.

Bsp.: $0{,}01^{-1/2} = \dfrac{1}{0{,}01^{1/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{0{,}01}} = \dfrac{1}{0{,}1} = 10$,

$4^{3/2} = (4^{1/2})^3 = 2^3 = 8$ oder $4^{3/2} = (4^3)^{1/2} = 64^{1/2} = 8$,

$(-1/8)^{-2/3} = \dfrac{1}{(-1/8)^{2/3}} = \dfrac{1}{((-1/8)^2)^{1/3}} = \dfrac{1}{(1/64)^{1/3}} = \dfrac{1}{1/4} = 4$ oder

$(-1/8)^{-2/3} = \dfrac{1}{(-1/8)^{2/3}} = \dfrac{1}{((-1/8)^{1/3})^2} = \dfrac{1}{(-1/2)^2} = \dfrac{1}{1/4} = 4$,

$x \cdot \sqrt{x} = x^1 \cdot x^{1/2} = x^{3/2}$, $\dfrac{x}{\sqrt{x}} = \dfrac{x^1}{x^{1/2}} = x^{1/2} = \sqrt{x}$, $\dfrac{(x+1)^{-1/2}}{(x+1)^{1/2}} = \dfrac{1}{x+1}$, $\dfrac{x^{-1/3} \cdot y^{2/3}}{x^{2/3} \cdot y^{-1/3}} = \dfrac{y}{x}$.

Übung: Gleichungen nachrechnen

$8^{4/3} = 16$; $16^{3/4} = 8$; $\sqrt[4]{2^5} \cdot \sqrt[4]{2^3} = 4$; $\sqrt[5]{(-3)^3} \cdot \sqrt[5]{(-3)^7} = 9$; $\sqrt[3]{2^4} \cdot \sqrt[6]{2^5} = 4\sqrt[6]{2}$;

$\sqrt[5]{3^4} \cdot \sqrt[4]{3^5} = 9\,\sqrt[20]{3}$; $\dfrac{\sqrt[3]{2^5}}{\sqrt[3]{4}} = 2$; $\dfrac{\sqrt{6^3}}{\sqrt{3^3}} = 2\sqrt{2}$; $(\sqrt[3]{5})^{-6} = \dfrac{1}{25}$; $\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{4}}\right)^6 = \dfrac{1}{8}$;

$\sqrt{(-3)^6} = 27$; $\sqrt[3]{32\sqrt{8^3}} = 8\sqrt[6]{2}$; $\sqrt{8\sqrt[3]{4}} = \dfrac{4}{\sqrt[6]{2}}$; $\dfrac{16}{\sqrt[3]{2^5} \cdot \sqrt[4]{8^3}} = \sqrt[12]{2}$.

<u>Einschränkung</u>: Da $a^{m/n}$ bei geradem n nur für $a > 0$ definiert ist, muss der Zusammenhang (**) für $a < 0$ eingeschränkt werden: Das Erweitern von m/n mit geraden Zahlen ist nicht zulässig, denn dann sind m und n gerade und dadurch besitzen $(a^{1/n})^m$ und $(a^m)^{1/n}$ unterschiedliche Definitionsbereiche, woraus sich Widersprüche ergeben. $a^{m/n}$ ist in diesem Fall nicht definiert (kurz: n.d.), wie z.B $a^{2/2}$, $a^{4/2}$, $a^{6/2}$, $a^{2/6}$, $a^{2/4}$.

Bsp.: $-1 = (-1)^1 \neq (-1)^{2/2}$ (n.d.), denn $\sqrt{(-1)^2} = 1$, aber $(\sqrt{-1})^2$ n.d.; analog

$1 = (-1)^2 \neq (-1)^{4/2}$ (n.d.), $-1 = (-1)^{1/3} \neq (-1)^{2/6}$ (n.d.),

$x = x^1 \neq x^{2/2}$, denn $(x^2)^{1/2} = |x|$, aber $(x^{1/2})^2 = x$, falls $x \geq 0$, sonst n.d.

$x^2 = (x^4)^{1/2} \neq x^{4/2}$, denn $(x^{1/2})^4 = x^2$, falls $x \geq 0$, sonst n.d.

$x^3 \neq x^{6/2}$, denn $(x^6)^{1/2} = |x|^3$, aber $(x^{1/2})^6 = x^3$, falls $x \geq 0$, sonst n.d.

$x^{1/3} \neq x^{2/6}$, denn $(x^2)^{1/6} = |x|^{1/3}$, aber $(x^{1/6})^2 = x^{1/3}$, falls $x \geq 0$, sonst n.d.

$x^{1/2} = (x^{1/4})^2 \neq x^{2/4} \neq (x^2)^{1/4} = |x|^{1/2}$.

Übung: Wurzeln in Potenzausdrücke umwandeln (notwendig beim Ableiten oder Integrieren)

$\dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x^2}}$; $\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{x+3}}$; $\sqrt{\dfrac{x}{y^3}}$; $\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{y^4}}$; $xy^2\sqrt{x^3y^5}$; $\dfrac{\sqrt{xy^3}}{xy^2}$; $\dfrac{\sqrt{x^2y-x^2}}{\sqrt{y^2-1}}$

IV. Irrationale Exponenten

Der Potenzausdruck a^x wird für irrationales x definiert als Grenzwert einer Approximation von x durch rationale Zahlen m/n. Beispielsweise lässt sich die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ auf folgende Art durch *Intervallschachtelung* beliebig genau annähern:

1	<	$\sqrt{2}$	< 2	da	1^2	<	2	< 2^2
1,4	<	$\sqrt{2}$	< 1,5	da	$1{,}4^2$	<	2	< $1{,}5^2$
1,41	<	$\sqrt{2}$	< 1,42	da	$1{,}41^2$	<	2	< $1{,}42^2$
1,414	<	$\sqrt{2}$	< 1,415	da	$1{,}414^2$	<	2	< $1{,}415^2$
…	<	$\sqrt{2}$	< …	da	…	<	2	< …

Bei jedem Schritt approximiert man $\sqrt{2}$ um eine zusätzliche Dezimalstelle. Damit erhält man z.B. $3^{\sqrt{2}} \approx 3^{1{,}414\ldots} \approx 4{,}729\ldots$. Endliche Dezimalzahlen sind als Bruch m/n darstellbar, wobei n häufig auch gerade ist. Bei Potenzausdrücken mit einer negativen Basis führt dies zu nicht definierten Termen. Daher schließt man bei irrationalen Exponenten von vornherein negative Basiszahlen aus.

Zusammengefasst: Potenzausdrücke a^x sind für alle $a, x \in \mathbb{R}$ definiert, ausgenommen die 3 Fälle

(1) $a = 0$ und $x \le 0$,

(2) $a < 0$ und x irrational,

(3) $a < 0$ und $x = m/n$ und n gerade.

Bemerkung: In Ländern wie z.B. den USA werden ungerade Wurzeln aus negativen Zahlen nicht zugelassen. Taschenrechner oder Software von dort erzeugt z.B. bei Eingabe von $\sqrt[3]{-8} = (-8)^{1/3}$ eine Fehlermeldung.

Die nächste Frage lautet nun: Wie löst man eine Exponentialgleichung, z.B. $2^x = 8$, nach x auf ?

Im Gegensatz zur Potenzgleichung steht die Variable x im Exponenten und nicht in der Basis, so dass Wurzelziehen hier nicht weiter führt. Stattdessen verwendet man Logarithmen, die zu diesem Zweck entwickelt wurden.

6.3 Logarithmen

$\log_a(x)$: Logarithmus von x zur Basis a, $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, $x > 0$, speziell:

$\log(x)$: Dekadischer Logarithmus (Basis $a = 10$),

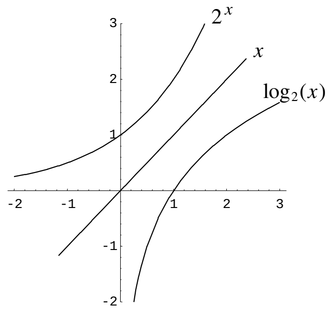
$\ln(x)$: Natürlicher Logarithmus (Basis $a = e = 2{,}718\ldots$).

Definition (und Bedeutung) von $\log_a(x)$: $\boxed{\log_a(a^x) = x = a^{\log_a(x)}}$; speziell für $a = e$: $\boxed{\ln(e^x) = x = e^{\ln(x)}}$.

Bsp.: $2^x = 8$ Logarithmieren zur Basis 2 ergibt $\log_2(2^x) = \log_2(8)$, also $x = \log_2(8) = \frac{\ln(8)}{\ln(2)} = 3$.

Die letzte Gleichung zeigt, dass ein Logarithmus zu einer beliebigen Basis mit Hilfe des natürlichen Logarithmus ermittelt werden kann. Bevor wir die Begründung dafür angeben und Rechenregeln herleiten, noch ein paar Worte zu der Konstruktion von Logarithmen. Dazu greifen wir dem Abschnitt Funktionen voraus. Dort werden wir sehen, dass beispielsweise der Graf der Funktion $f(x) = 2^x$ folgendes Aussehen aufweist, wie man leicht an einer Wertetabelle abliest:

x	-2	-1	0	1	2	3
2^x	1/4	1/2	1	2	4	8



Die Umkehrfunktion von $f(x) = 2^x$, also die Funktion $f^{-1}(x) = \log_2(x)$ ergibt sich aus obiger Wertetabelle durch Vertauschen der beiden Zeilen:

x	1/4	1/2	1	2	4	8
$\log_2(x)$	-2	-1	0	1	2	3

Grafisch erhält man $\log_2(x)$ durch Spiegeln von 2^x an der Geraden $f(x) = x$.

$\log_2(x)$ ist also die Zahl, mit der man 2 "hochnehmen" muss, um x zu erhalten.

<u>Übung</u>: $\log_2(32)$, $\log_3(9)$, $\log_4(\frac{1}{16})$, $\log_{1/2}(8)$, $\log(10000)$, $\log(0{,}01)$, $\ln(e^7)$, $\ln(\sqrt[3]{e})$, $\log_a(1)$.

Die Rechenregeln für Logarithmen ergeben sich aus der Definition $x = a^{\log_a(x)}$, $y = a^{\log_a(y)}$ und den Rechenregeln für Potenzen, also $x \cdot y = a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)} = a^{\log_a(x) + \log_a(y)}$, $x / y = a^{\log_a(x) - \log_a(y)}$.

<u>Regeln</u> für $x, y \in \mathbb{R}_+$, $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ — speziell für $a = e$

(1) $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$, — (1) $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$,

(2) $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$, — (2) $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$,

$\log_a(\frac{1}{y}) = \log_a(1) - \log_a(y) = -\log_a(y)$, — $\ln(\frac{1}{y}) = -\ln(y)$,

(3) $x^y = (a^{\log_a(x)})^y = a^{y \cdot \log_a(x)}$, — (3) $x^y = e^{y \cdot \ln(x)}$,

(4) $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$, (4) $\ln(x^y) = y \cdot \ln(x)$,

(5) $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$, da $\ln(x) = \ln(a^{\log_a(x)}) = \log_a(x) \cdot \ln(a)$.

Häufiger auftretende Werte: $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$.

Bsp.: $\ln(3e) = \ln(3) + \ln(e) = \ln(3) + 1$, $\ln(e^2 / 2) = \ln(e^2) - \ln(2) = 2 - \ln(2)$, $\log(e) = \ln(e) / \ln(10) = 1 / \ln(10)$,
$\ln(\sqrt{e/4}) = \ln(\sqrt{e} / \sqrt{4}) = \ln(\sqrt{e} / 2) = \ln(\sqrt{e}) - \ln(2) = \ln(e^{1/2}) - \ln(2) = 1/2 - \ln(2)$.

Vorsicht: $\log_a(x + y) \neq \log_a(x) + \log_a(y)$, z.B. $\ln(2) = \ln(1 + 1) \neq \ln(1) + \ln(1) = 0$.

Die obigen Regeln sind nur für positives x und y gültig, Potenzausdrücke x^y können jedoch auch für negatives x definiert sein, z.B. für x^2. Logarithmieren führt zu $\log_a(x^2) = \log_a(|x|^2) = 2 \cdot \log_a(|x|)$.
Allgemein gilt für gerade Exponenten n: $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(|x|)$.

Bsp.: $\ln\left(\dfrac{x^2 \sqrt{x^4+1}}{4\,(x^3+1)^6}\right) = \ln(x^2 \sqrt{x^4+1}\,) - \ln(4\,(x^3+1)^6\,) = \ln(x^2) + \ln(\sqrt{x^4+1}\,) - [\,\ln(4) + \ln((x^3+1)^6\,)]$
$= 2\ln(|x|) + \frac{1}{2}\ln(x^4+1) - \ln(4) - 6\ln(|x^3+1|)$.

<u>Übung</u>: Umformen: $\ln(e^{x^2-1})$, $\ln(4x^2)$, $\ln(x^5 \cdot 5^x)$, $\ln(\sqrt{x^2+1}\,)$, $\ln\left(\dfrac{(x+1)^3}{2x^4}\right)$, $\ln\left(\dfrac{e^{x-1} \cdot x^4}{\sqrt{x^3+1} \cdot 3^x}\right)$.

Umformungen wie diese werden in der Differentialrechnung beim Ableiten von Funktionen angewandt. Abschließend sollen noch einmal die beiden Möglichkeiten zum "Auflösen" einer Exponentialgleichung am Beispiel aufgezeigt werden:
Bsp.: $2{,}5^x = 15{,}625$

Variante 1: $|\ \log_{2,5}$ $\Leftrightarrow$ $\log_{2,5}(2{,}5^x) = \log_{2,5}(15{,}625)$ $\Leftrightarrow$ $x = \dfrac{\ln(15{,}625)}{\ln(2{,}5)} = 3$

Variante 2: $|\ \ln$ $\Leftrightarrow$ $\ln(2{,}5^x) = \ln(15{,}625)$ $\Leftrightarrow$ $x \cdot \ln(2{,}5) = \ln(15{,}625)$ $\Leftrightarrow$ $x = 3$.

6.4 Äquivalenzumformungen

- Äquivalenzumformungen für Gleichungen
  Im Weiteren wird davon ausgegangen, dass auf beiden Seiten der Gleichung dieselbe Rechenoperation durchgeführt wird. Folgende Punkte seien dabei angemerkt:
  (1) Unproblematische Äquivalenzumformungen sind
    - Addition bzw. Subtraktion eines beliebigen Terms,
    - Multiplizieren mit bzw. Dividieren durch einen Term, der nicht 0 werden kann,
    - Potenzieren mit einem ungeraden, natürlichen Exponenten,
    - Ziehen einer ungeraden Wurzel.
  (2) Eine Fallunterscheidung ist erforderlich beim
    - Dividieren durch einen Term, der 0 werden kann,
    - Produkt mehrerer Terme, das 0 wird,
    - Auflösen eines Betrages bzw. Ziehen einer geraden Wurzel.
  (3) Definitionsbereiche beachten
    - Nur für positive Ausdrücke definiert sind Operationen wie
      – Ziehen einer geraden Wurzel,
      – Potenzieren mit irrationalem Exponenten,
      – Logarithmieren.
    - Der Definitionsbereich einer Gleichung kann durch Potenzieren (außer den Fällen unter (1)) oder Exponentieren (erheben beider Seiten in den Exponenten) vergrößert werden. Ebenso bei der Multiplikation mit bzw. beim Kürzen durch einen Term, der 0 werden kann. Man sollte nach solchen Rechenschritten prüfen, ob die gefundene "Lösung" im Definitionsbereich der Ausgangsgleichung liegt.

  Beispiele
  (1)
    - $3x - 4 = 2x + 1 \quad |\ -2x + 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5$
    - $3x = 6 \quad |\ :3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$
    - $5(x^2 + 1) = (x^2 + 1)^2 \quad |\ :(x^2 + 1) \quad \Leftrightarrow \quad 5 = x^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \ \vee \ x = -2$

- $\sqrt[3]{x-1} = -2 \quad |\ \text{hoch } 3 \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 = -8 \quad \Leftrightarrow \quad x = -7$
- $(x+1)^5 = -32 \quad |\ \sqrt[5]{\ } \quad \Leftrightarrow \quad x + 1 = -2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -3$

(2)

- $x^2 = x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{Fall 1: } x = 0 \\ \text{Fall 2: } x \neq 0 \quad |\ :x \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \vee\ x = 1$ oder

  $x^2 = x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x = x\cdot(x-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \vee\ x = 1$
- $(x-1)^4 = (x-1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{Fall 1: } x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \\ \text{Fall 2: } x - 1 \neq 0 \quad |\ :(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^3 = 1 \end{cases}$

  $\Leftrightarrow \quad x = 1 \ \vee\ x = 2$ oder

  $(x-1)^4 = (x-1) \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^4 - (x-1) = (x-1)\cdot[(x-1)^3 - 1] = 0$

  $\Leftrightarrow \quad x - 1 = 0 \ \vee\ (x-1)^3 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \ \vee\ (x-1)^3 = 1$

  $\Leftrightarrow \quad x = 1 \ \vee\ x = 2$
- $(x+1)^6 = 64 \quad \Leftrightarrow \quad |x+1| = \sqrt[6]{64} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{Fall 1: } x + 1 = 2 \\ \text{Fall 2: } x + 1 = -2 \end{cases}$

  $\Leftrightarrow \quad x = 1 \ \vee\ x = -3$
- $(2x+1)^2 = (3x-2)^2 \quad \Leftrightarrow \quad |2x+1| = |3x-2| \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{Fall 1: } 2x + 1 = 3x - 2 \\ \text{Fall 2: } 2x + 1 = -(3x-2) \end{cases}$

  $\Leftrightarrow \quad x = 3 \ \vee\ x = \frac{1}{5}$
- $(x^2+1)^4 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad |x^2+1| = \sqrt[4]{16} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 1 = 2$

  $\Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \ \vee\ x = -1$

(3)

- $x^2 = -1 \quad |\ \sqrt{\ }$ nicht definiert, $\mathbb{L} = \varnothing$
- $x^\pi = -1 \quad |$ hoch $1/\pi$ nicht definiert, $\mathbb{L} = \varnothing$
- $2^x = -1 \quad |\ \log_2$ nicht definiert, $\mathbb{L} = \varnothing$
- $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1} \quad |\ \cdot(x-1) \quad \Rightarrow \quad x = 1 \notin \mathbb{D}, \ \mathbb{L} = \varnothing$
- $\frac{x(x-1)}{x-1} = 1 \quad |$ kürzen durch $(x-1) \quad \Rightarrow \quad x = 1 \notin \mathbb{D}, \ \mathbb{L} = \varnothing$
- $\sqrt{2x} = \sqrt{x-1} \quad |\ \text{hoch } 2 \quad \Rightarrow \quad 2x = x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \notin \mathbb{D}, \ \mathbb{L} = \varnothing$
- $(2x)^\pi = (x-1)^\pi \quad |\ \text{hoch } 1/\pi \quad \Rightarrow \quad 2x = x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \notin \mathbb{D}, \ \mathbb{L} = \varnothing$
- $\frac{1}{2x-2} = \frac{1}{x-1} \quad |\ \text{hoch } -1 \quad \Rightarrow \quad 2x - 2 = x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \notin \mathbb{D}, \ \mathbb{L} = \varnothing$
- $\ln(2x) = \ln(x-1) \quad |\ e \text{ hoch} \quad \Rightarrow \quad 2x = x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \notin \mathbb{D}, \ \mathbb{L} = \varnothing$

- Übung Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Gleichungen

  (1) $x^4 - x^2 = x^3 - x$ (2) $\frac{x-1}{2x-1} = \frac{x-1}{x+1}$ (3) $(3x+1)^5 = -32$ (4) $(3x+1)^4 = 16$

  (5) $(3x+2)^4 = x^4$ (6) $\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{3x+2}$ (7) $\sqrt{3x+1} = 2$ (8) $\sqrt{3x+1} = -2$

  (9) $\sqrt{x} = \sqrt{3x+2}$ (10) $2^{x+1} = 8$ (11) $e^x = e^{3x+2}$ (12) $3^x = -3$

  (13) $\log_2(x+1) = 3$ (14) $\log(x+1) = -1$ (15) $\ln(x+1) = \ln(2x)$ (16) $\ln(2x+1) = \ln(x)$

- Äquivalenzumformungen für Ungleichungen

  Neben den für Gleichungen relevanten Regeln gilt es bei Ungleichungen zusätzlich zu beachten, dass sich das Relationszeichen bei folgenden Rechenoperationen umkehrt:

  (1) Multiplikation mit bzw. Division durch einen negativen Term,

  (2) Logarithmieren zu einer Basis kleiner 1,

  (3) Potenzieren mit einem negativen Exponenten,

  (4) Exponentieren mit einer Basis kleiner 1.

  Beispiele

  (1) $-1 < 0 \quad |\ \cdot(-1) \quad \Leftrightarrow \quad 1 > 0$

  (2) $1 < 2 \quad |\ \log_{1/2} \quad \Leftrightarrow \quad \log_{1/2}(1) > \log_{1/2}(2)$

  $0 > -1$

(3) $1 < 2$ | hoch -1 $\Leftrightarrow$ $1^{-1} > 2^{-1}$

$1 > 1/2$

(4) $0 < 1$ | 1/2 hoch $\Leftrightarrow$ $(1/2)^0 > (1/2)^1$

$1 > 1/2$

6.5 Summen- und Produktzeichen

- Indexschreibweise

  Die Indexschreibweise dient zur Vereinfachung der Namensgebung von Variablen.

  Bsp.: (1) $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4$ ist eine lineare Gleichung mit 3 Variablen,

  (2) $A = \{ a_1 , a_2 , \dots , a_{100} \} = \{ a_i \mid i = 1, \dots , 100\}$ bezeichnet eine Menge mit 100 Elementen,

  (3) $B = \left\{ \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{matrix} \right\} = \{ b_{ij} \mid i = 1, 2, \; j = 1, 2, 3 \}$ stellt eine in Tabellenform angeordnete Menge mit $2 \cdot 3 = 6$ Elementen dar,

  (4) $a_n = 1/n$ ist eine Folge reeller Zahlen mit $a_1 = 1$, $a_2 = 1/2$, $a_3 = 1/3$, ...

  Als Indizes verwendet man in der Regel die Buchstaben i, j, k, l, m, n.

- Summenschreibweise

  Die Summe der Elemente einer indizierten Menge schreibt man mit Hilfe des Summenzeichens $\sum$:

  $$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n .$$

  Bsp.: (1) $\sum_{i=1}^{100} a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_{100}$ (2) $\sum_{i=3}^{5} a_i = a_3 + a_4 + a_5$

  (3) $\sum_{i=1}^{10} i = 1 + 2 + \dots + 10 = 55$ (4) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = 1 + 1/4 + 1/9 + \dots \quad (= \frac{\pi^2}{6})$

  (5) $\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} b_{ij} = b_{11} + b_{12} + b_{13} + b_{21} + b_{22} + b_{23} = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{2} b_{ij} = b_{11} + b_{21} + b_{12} + b_{22} + b_{13}+ b_{23}$

  (zeilenweises Summieren) (spaltenweises Summieren)

  (6) $\sum_{i=n}^{n} a_i = a_n$ (7) $\sum_{i=1}^{n} a = n \cdot a$

  <u>Regeln:</u> (1) $\sum_{i=1}^{n} r \cdot a_i = r \cdot a_1 + r \cdot a_2 + \dots + r \cdot a_n = r \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = r \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$,

  (2) $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \dots + a_n + b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$.

  Bsp.: Für die Folge der ungeraden Zahlen, definiert durch $a_n = 2n - 1$, gilt:

  $$\sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10} (2n - 1) = \sum_{n=1}^{10} 2n - \sum_{n=1}^{10} 1 = 2 \cdot \sum_{n=1}^{10} n - 10 = 2 \cdot 55 - 10 = 100.$$

  Allgemein erhält man für die Folge der ungeraden Zahlen: $\sum_{n=1}^{k} a_n = k^2$.

- Produktschreibweise

  Das Produkt der Elemente einer indizierten Menge schreibt man mit Hilfe des Produktzeichens $\prod$:

  $$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n .$$

  Bsp.: (1) $\prod_{i=3}^{5} a_i = a_3 \cdot a_4 \cdot a_5$ (2) $\prod_{i=1}^{5} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

  (3) $\prod_{i=n}^{n} a_i = a_n$ (4) $\prod_{i=1}^{n} a = a \cdot a \cdot \dots \cdot a = a^n$

  <u>Regeln:</u> (1) $\prod_{i=1}^{n} r \cdot a_i = r \cdot a_1 \cdot r \cdot a_2 \cdot \dots \cdot r \cdot a_n = r^n \cdot (a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n) = r^n \cdot \prod_{i=1}^{n} a_i$,

  (2) $\prod_{i=1}^{n} (a_i \cdot b_i) = a_1 b_1 \cdot a_2 b_2 \cdot \dots \cdot a_n b_n = (\prod_{i=1}^{n} a_i) \cdot (\prod_{i=1}^{n} b_i)$,

  (3) $\log_a(\prod_{i=1}^{n} b_i) = \log_a(b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n) = \log_a(b_1) + \dots + \log_a(b_n) = \sum_{i=1}^{n} \log_a(b_i)$.

6.6 Fakultät und Binomialkoeffizienten

- Fakultät

$n!$ (sprich: n Fakultät) ist für $n\in\mathbb{N}_0$ definiert durch $n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$ und $0! = 1$.

Bsp.: $1! = 1$, $2! = 1\cdot 2 = 2$, $3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$, $4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 3!\cdot 4 = 24$, $5! = 4!\cdot 5 = 120$, ...

Rekursiv geschrieben ist also $n! = (n-1)!\cdot n$.

Das Fakultätszeichen taucht insbesondere häufig in der Kombinatorik (Teilgebiet der Statistik) auf, denn $n!$ gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, eine n-elementige Menge in unterschiedlicher Reihenfolge anzuordnen (Permutationen ohne Wiederholung).

Bsp.: (1) Eine Menge mit 2 Elementen, z.B. $\{1, 2\}$, kann in $2! = 2$ verschiedenen Reihenfolgen aufgeschrieben werden, nämlich $\{1, 2\}$ und $\{2, 1\}$.

(2) Eine Menge mit 3 Elementen, z.B. $\{1, 2, 3\}$, kann in $3! = 6$ verschiedenen Reihenfolgen aufgeschrieben werden, denn das 3. Element (hier die Zahl 3) kann an 1. Stelle stehen $\begin{matrix}\{3, 1, 2\}\\ \{3, 2, 1\}\end{matrix}$, an 2. Stelle $\begin{matrix}\{1, 3, 2\}\\ \{2, 3, 1\}\end{matrix}$ oder an 3. Stelle $\begin{matrix}\{1, 2, 3\}\\ \{2, 1, 3\}\end{matrix}$.

(3) Eine Menge mit 4 Elementen, z.B. $\{1, 2, 3, 4\}$, kann in $4! = 24$ verschiedenen Reihenfolgen aufgeschrieben werden, denn das 4. Element (hier die Zahl 4) kann wiederum an

1. Stelle,	2. Stelle,	3. Stelle,	4. Stelle	stehen
{4, 3, 1, 2}	{3, 4, 1, 2}	{3, 1, 4, 2}	{3, 1, 2, 4}	
{4, 3, 2, 1}	{3, 4, 2, 1}	{3, 2, 4, 1}	{3, 2, 1, 4}	
{4, 1, 3, 2}	{1, 4, 3, 2}	{1, 3, 4, 2}	{1, 3, 2, 4}	
{4, 2, 3, 1}	{2, 4, 3, 1}	{2, 3, 4, 1}	{2, 3, 1, 4}	
{4, 1, 2, 3}	{1, 4, 2, 3}	{1, 2, 4, 3}	{1, 2, 3, 4}	
{4, 2, 1, 3}	{2, 4, 1, 3}	{2, 1, 4, 3}	{2, 1, 3, 4}	

und die übrigen 3 Elemente dabei in jeweils $3! = 6$ unterschiedlichen Reihenfolgen angeordnet werden.

Weitere Eigenschaften von $n!$:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = e$, (2) $n! \approx (n/e)^n\cdot\sqrt{2\pi n}$ für große Werte von n ,

(3) Die Gamma-Funktion $\Gamma(x)$ ist eine Verallgemeinerung von $n!$ auf beliebige reelle Zahlen und es gilt $\Gamma(n+1) = n!$.

- Binomialkoeffizienten

Die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ (sprich: n über k) sind für $n, k\in\mathbb{N}_0$ definiert durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\ , \text{ falls } n\ge k \quad \text{und} \quad \binom{n}{k} = 0, \text{ falls } n<k; \quad \text{z.B. } \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\cdot(5-3)!} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2} = 10.$$

Binomialkoeffizienten stellen einerseits die Koeffizienten der allgemeinen binomischen Formel dar, andererseits finden sie Verwendung in der Kombinatorik. Bevor dies näher erläutert wird, zunächst einige ihrer Eigenschaften. Daraus erhält man eine einfache Möglichkeit zur Berechnung von $\binom{n}{k}$.

<u>Eigenschaften</u>:

(1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ (2) $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ (3) $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$

(4) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (5) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ (6) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$

(7) $\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k}{k} = \binom{n+m+1}{m}\quad\forall\, m\in\mathbb{N}_0$

Die ersten 4 Eigenschaften rechnet man leicht nach; (5) überprüft man wie folgt:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!} = \frac{n!\cdot(k+1)}{(k+1)!\cdot(n-k)!} + \frac{n!\cdot(n-k)}{(k+1)!\cdot(n-k)!} = \frac{n!\cdot(k+1+n-k)}{(k+1)!\cdot(n-k)!} = \frac{n!\cdot(1+n)}{(k+1)!\cdot(n-k)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\cdot(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Nr. (5) besagt: Die Summe von 2 nebeneinander stehenden Zahlen ergibt die Zahl darunter. So erhält man das

Pascalsche Dreieck:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
\binom{7}{0} & & \binom{7}{1} & & \binom{7}{2} & & \binom{7}{3} & & \binom{7}{4} & & \binom{7}{5} & & \binom{7}{6} & & \binom{7}{7}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
 & & & \vdots & & &
\end{array}
$$

Eigenschaft (7) gibt Auskunft über das Ergebnis der Summation der Elemente auf einer Diagonalen des Dreiecks (kann durch vollständige Induktion über m gezeigt werden; vgl. Abschnitt 6.8).

<u>Binomischer Lehrsatz</u>

Die binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2$ liefert als Koeffizienten vor den Variablen die Werte $1 = \binom{2}{0}$, $2 = \binom{2}{1}$, $1 = \binom{2}{2}$.

Analog ergeben sich aus $(a+b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 b + 3 \cdot ab^2 + 1 \cdot b^3$ die Koeffizienten
$1 = \binom{3}{0}$, $3 = \binom{3}{1}$, $3 = \binom{3}{2}$, $1 = \binom{3}{3}$.

Entsprechend entnimmt man z.B. der letzten Zeile des obigen Pascalschen Dreiecks:

$$(a+b)^7 = 1 \cdot a^7 + 7 \cdot a^6 b + 21 \cdot a^5 b^2 + 35 \cdot a^4 b^3 + 35 \cdot a^3 b^4 + 21 \cdot a^2 b^5 + 7 \cdot ab^6 + 1 \cdot b^7.$$

Somit erhält man den *allgemeinen binomischen Lehrsatz*:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} b + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-2} \cdot a^2 b^{n-2} + \binom{n}{n-1} \cdot ab^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k .$$

Mit $a = 1 = b$ ergibt sich sofort Eigenschaft (6).

<u>Kombinatorik</u>

$\binom{n}{k}$ gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, aus einer n-elementigen Menge k Elemente auszuwählen, ohne die Reihenfolge bei der Auswahl zu beachten und ohne Elemente doppelt zu wählen (Kombinationen ohne Wiederholung).

Bsp.: Es gibt $\binom{5}{3} = 10$ Möglichkeiten, aus der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 3 Zahlen auszuwählen.

Begründung: Bei der Wahl der 1. Zahl gibt es 5 Möglichkeiten, bei der Wahl der 2. Zahl 4 und bei der 3. Zahl nur noch 3 Möglichkeiten, da keine Zahl doppelt gewählt werden darf. Insgesamt existieren also $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ Wahlmöglichkeiten. Dabei werden jedoch unterschiedliche Reihenfolgen bei der Auswahl mehrfach gezählt, denn jede der 3 Zahlen kann an 1., 2. oder 3. Stelle gewählt werden. Die obigen 60 Möglichkeiten müssen also noch durch die Anzahl verschiedener Reihenfolgen, also durch $3! = 6$ dividiert werden. Insgesamt ergeben sich so die $60/6 = 10$ folgenden Mengen: $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}$.

Bsp.: Es gibt $\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot (49-6)!} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 43 \cdot 44 \cdot 45 \cdot \ldots \cdot 49}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 43} = \frac{44 \cdot 45 \cdot \ldots \cdot 49}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 6} = 13983816$

Möglichkeiten beim Lotto 6 aus 49. Zur Begründung betrachtet man den letzten Bruch $49 \cdot 48 \cdot \ldots \cdot 44 / 6!$, der sich wie im Beispiel zuvor interpretieren lässt.

6.7 Grundrechenarten in $\mathbb{C}$

Eine komplexe Zahl $z = a + b\,\mathrm{i}$ besteht, wie bereits erwähnt, aus einem Realteil a und einem Imaginärteil $b\,\mathrm{i}$. Dabei sind $a, b \in \mathbb{R}$ und i ist die imaginäre Einheit mit $\mathrm{i}^2 = -1$.

Für zwei komplexe Zahlen $a + b\,\mathrm{i}$ und $c + d\,\mathrm{i}$ erhält man:

(1) $(a + b\,\mathrm{i}) \pm (c + d\,\mathrm{i}) = (a \pm c) + (b \pm d)\,\mathrm{i}$,

(2) $(a + b\,\mathrm{i}) \cdot (c + d\,\mathrm{i}) = ac + ad\,\mathrm{i} + bc\,\mathrm{i} + bd\,\mathrm{i}^2 = (ac - bd) + (ad + bc)\,\mathrm{i}$, da $\mathrm{i}^2 = -1$,

(3) $(a+b\,\mathrm{i}):(c+d\,\mathrm{i}) = \dfrac{a+b\,\mathrm{i}}{c+d\,\mathrm{i}} \cdot \dfrac{c-d\,\mathrm{i}}{c-d\,\mathrm{i}} = \dfrac{ac-ad\,\mathrm{i}+bc\,\mathrm{i}-bd\,\mathrm{i}^2}{c^2-d^2\,\mathrm{i}^2} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\,\mathrm{i}$.

Man bezeichnet hier die beiden Zahlen $c + d\,\mathrm{i}$ und $c - d\,\mathrm{i}$ als zueinander konjugiert komplex.

Auch die Wurzel aus einer komplexen Zahl $z = a + b\,\mathrm{i}$ ist wiederum eine komplexe Zahl $c + d\,\mathrm{i}$, denn die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung $(c + d\,\mathrm{i})^2 = a + b\,\mathrm{i}$ sind $c_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a+\sqrt{a^2+b^2}}$, $d_{1,2} = \dfrac{b}{2c_{1,2}}$, falls $c_{1,2} \neq 0$ und $d_{1,2} = \pm\sqrt{-a}$, falls $c_{1,2} = 0$.

6.8 Beweise

- Vollständige Induktion

  Soll eine Aussage für die Menge der natürlichen Zahlen bewiesen werden, so führt häufig die vollständige Induktion zum Ziel. Dabei verwendet man die spezielle Eigenschaft der natürliche Zahlen, dass jede natürliche Zahl - im Gegensatz zu allen anderen Zahlen - einen Nachfolger (die nächst größere Zahl) besitzt. Der Beweis umfasst dann 2 Schritte:

  1. Induktionsverankerung: Es wird nachgewiesen, dass die behauptete Aussage für eine Zahl (in der Regel für $n = 1$) richtig ist.
  2. Induktionsschluss: Man weist nach: Ist die Behauptung für eine beliebige Zahl n richtig, dann auch für die um 1 größere Zahl $n + 1$.

  Beispiel: Die Gültigkeit der Formel $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2} = \dbinom{n+1}{2}$ soll bewiesen werden $\forall\ n \in \subseteq$.

  1. Für $n = 1$ gilt die Formel: $1 = \dfrac{1 \cdot 2}{2}$.
  2. Für eine beliebige Zahl n sei die Aussage richtig. Zu zeigen bleibt dann, dass sie auch für nächst größere Zahl $n + 1$ richtig ist, dass also $1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1) = \dfrac{(n+1)\cdot((n+1)+1)}{2}$.

     Dies ergibt sich aber sofort aus

     $1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1) = \dfrac{n\cdot(n+1)}{2} + (n+1) = \dfrac{n\cdot(n+1)+2(n+1)}{2} = \dfrac{(n+1)\cdot(n+2)}{2} = \dbinom{n+2}{2}$.

- Direkter Beweis

  Beim direkten Beweis geht es um ein mehr oder minder kompliziertes "Nachrechnen" einer Behauptung. Dabei verwendet man bekannte Rechenregeln bzw. Äquivalenzumformungen oder Implikationen.

  Beispiel: Die Aussage $a \geq 0 \Leftrightarrow (a+1)^2 - (a-1)^2 \geq 3a$ soll $\forall\ a \in \mathbb{R}$ bewiesen werden:

  $(a+1)^2 - (a-1)^2 \geq 3a \Leftrightarrow a^2 + 2a + 1 - (a^2 - 2a + 1) \geq 3a \Leftrightarrow 4a \geq 3a \Leftrightarrow a \geq 0$.

  Bei direkten Beweisen macht man sich auch die bereits im Zusammenhang mit der Aussagenlogik erwähnten Regeln zunutze. Beispielsweise kann zum Nachweis der Äquivalenzbeziehung $A \Leftrightarrow B$ die Richtigkeit der beiden Implikationen $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ gezeigt werden. Oder man beweist eine Implikation $A \Rightarrow B$ durch Nachprüfen der äquivalenten Beziehung $\neg B \Rightarrow \neg A$.

- Indirekter Beweis (Beweis durch Widerspruch)

  Nachgewiesen werden soll die Richtigkeit einer Aussage A. Dazu geht man von der Annahme aus, die Aussage wäre falsch, also $\neg A$ richtig. Aus $\neg A$ leitet man durch Implikationen bzw. Äquivalenzumformungen neue Aussagen ab, $\neg A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow ... \Rightarrow X$, bis man schließlich zu einer Aussage X gelangt, die offensichtlich falsch ist, also im Widerspruch zur getroffenen Annahme steht. Wäre nun $\neg A$ richtig gewesen (und die Implikationen korrekt), so müsste auch X richtig sein. Da X aber falsch ist, kann der Grund dafür nur in der falschen Startaussage liegen, d.h. $\neg A$ ist falsch, also A richtig.

  Beispiel: Es soll gezeigt werden, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist.

  Annahme: $\sqrt{2}$ ist rational, also $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, wobei p, q ganze Zahlen sind ($q \neq 0$).

  Gäbe es solche Zahlen p und q, so ließen sie sich soweit kürzen, dass sie keinen gemeinsamen Teiler mehr besitzen, d.h. wir können p, q als teilerfremd voraussetzen. Es folgt:

  $$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad\Rightarrow\quad 2 = \frac{p^2}{q^2} \quad\Leftrightarrow\quad 2q^2 = p^2.$$

  p^2 ist also das 2-fache von q^2 und somit insbesondere durch 2 teilbar. Mit p^2 ist automatisch auch p durch 2 teilbar, also gerade, denn für ungerade Zahlen ist auch ihr Quadrat ungerade. p lässt sich daher schreiben als $p = 2m$ mit einer ganzen Zahl m. Insgesamt ergibt sich so

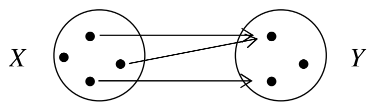
$$2q^2 = p^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2q^2 = (2m)^2 = 4m^2 \quad \Leftrightarrow \quad q^2 = 2m^2.$$

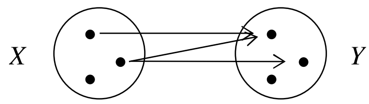
Genau wie oben folgert man aus dieser Darstellung, dass auch q^2 und somit auch q durch 2 teilbar ist. p und q sind daher nicht teilerfremd, im Widerspruch zur oben getroffenen Annahme. Die Annahme ist also falsch, die Behauptung damit bewiesen.

- Gegenbeispiel (Widerlegen einer Aussage der Form: $\forall\, x \in X$ gilt die Eigenschaft E)
  Im Abschnitt 5 (Zusammenhang zwischen Mengen und Aussagen) wurde bereits festgestellt, dass die Verneinung einer Aussage der Form $\forall\, x \in X$ gilt E lautet $\exists\, x \in X$ mit $\neg$E. Zum Widerlegen einer solchen Aussage reicht also ein Gegenbeispiel.
  Beispiel: Widerlegt werden soll die Behauptung: Die Wurzeln aus natürlichen Zahlen sind stets rational.
  Anders formuliert lautet die Behauptung: $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$
  Zum Widerlegen dieser Aussage reicht es, *eine* natürliche Zahl n zu finden mit $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.
  Wie oben gezeigt, ist $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Die Behauptung ist damit widerlegt.

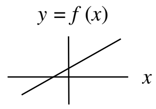
7. Funktionen

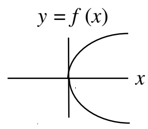
7.1 Definition und Eigenschaften





Funktionen (Abbildungen) sind Zuordnungsvorschriften zwischen 2 Mengen. Eine Funktion $f: X \to Y$ ordnet jedem $x \in \mathbb{D} \subset X$ <u>genau ein</u> Element $y \in Y$ zu. $\mathbb{D}$ bezeichnet den Definitionsbereich der Funktion, also die Menge aller x-Werte, für die $y = f(x)$ mathematisch erklärt ist. Die grafische Darstellung dieser Zuordnungsvorschrift bezeichnet man als den *Grafen* der Funktion.
Die 2. Darstellung zeigt keinen Funktionsgrafen, da einem Argument x *zwei* verschiedene Funktionswerte y zugeordnet werden.
Relevant für die Praxis sind natürlich in erster Linie Funktionen mit $X = Y = \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{R}^n$). Grafen von Abbildungen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lassen sich einfach im Koordinatensystem darstellen, z.B. in Grafik 3 für eine lineare Funktion.
Demgegenüber zeigt das letzte Bild keinen Funktionsgrafen, da wiederum einem x-Wert *zwei* verschiedene y-Werte zugeordnet sind.



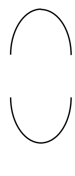


- Eigenschaften einer Funktion f auf einer Menge $\mathrm{M} \subset \mathbb{D}$

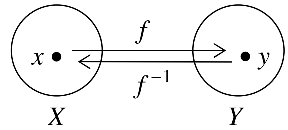
  <u>Beschränktheit</u> f ist auf der Menge M beschränkt
  - nach oben, wenn es eine Zahl a gibt, so dass $f(x) \le a \;\; \forall\, x \in \mathrm{M}$,
  - nach unten, wenn es eine Zahl b gibt, so dass $f(x) \ge b \;\; \forall\, x \in \mathrm{M}$.

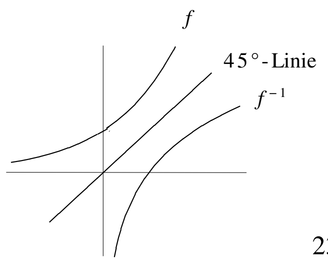
  <u>Monotonie</u> f ist auf der Menge M (streng) monoton
  - steigend, wenn $\forall\, x_1, x_2 \in \mathrm{M}$ mit $x_1 < x_2$ folgt, dass $f(x_1) \le (<) f(x_2)$,
  - fallend, wenn $\forall\, x_1, x_2 \in \mathrm{M}$ mit $x_1 < x_2$ folgt, dass $f(x_1) \ge (>) f(x_2)$.

  <u>Krümmung</u> f ist auf der Menge M
  - (streng) konvex, wenn $\forall\, x_1, x_2 \in \mathrm{M}$ mit $x_1 < x_2$ und $\lambda \in (0, 1)$ gilt:
    $\lambda \cdot f(x_1) + (1-\lambda) \cdot f(x_2) \ge (>) f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2)$,
  - (streng) konkav, wenn $\forall\, x_1, x_2 \in \mathrm{M}$ mit $x_1 < x_2$ und $\lambda \in (0, 1)$ gilt:
    $\lambda \cdot f(x_1) + (1-\lambda) \cdot f(x_2) \le (<) f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2)$.



  <u>Umkehrfunktion</u> f besitzt auf der Menge M eine Umkehrfunktion $f^{-1}: Y \to X$, wenn $\forall\, x \in \mathrm{M}$ gilt: $f^{-1}(f(x)) = x$. Jedem Element x der Menge $\mathrm{M} \subset X$ wird durch die Funktion f eindeutig ein Element $y \in \mathrm{M}_y \subset Y$ zugeordnet und diesem durch die Umkehrfunktion f^{-1} wiederum das Element x. Man nennt f dann eine *bijektive* bzw. eineindeutige Abbildung von M nach M_y. Für Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird die Umkehrfunktion grafisch ermittelt, indem man den Grafen von f an der 45°-Linie spiegelt.





Eine notwendige Voraussetzung für die Existenz einer Umkehrfunktion besteht darin, dass je zwei unterschiedlichen x-Werten auch 2 verschiedene y-Werte zugeordnet werden. Diese Eigenschaft wird als *Injektivität* bezeichnet.

Weitere Eigenschaften einer Funktion:

- *Nullstelle(n)* : x-Werte mit $f(x) = 0$. Verfahren zum Auffinden von Nullstellen für Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ werden später besprochen.
- *Lokale Extrema* : Maxima oder Minima (Hoch- oder Tiefpunkte) innerhalb einer kleinen Umgebung. Das Auffinden lokaler Extrema stellt einen wichtigen Teil der später zu behandelnden Differentialrechnung dar. Dabei spielen die Eigenschaften *Stetigkeit* und *Differenzierbarkeit* eine zentrale Rolle.
- *Asymptotisches Verhalten* einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Grenzwerte von $f(x)$, wenn x gegen ∞ bzw. $-\infty$ strebt.

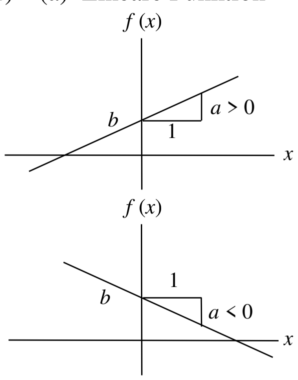
7.2 Funktionstypen

- Funktionstypen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(1)	Polynom vom Grade n	$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n$,	z.B.
	(a) Lineare Funktion	$f(x) = ax + b$	(Graf: Gerade)
	(b) Quadratische Funktion	$f(x) = ax^2 + bx + c$	(Graf: Parabel)
	(c) Kubische Funktion	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	
(2)	Potenzfunktion	$f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R}$	
(3)	Exponentialfunktion	$f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}_+ \backslash \{1\}$	
(4)	Logarithmusfunktion	$f(x) = \log_a(x)$, $a \in \mathbb{R}_+ \backslash \{1\}$	
(5)	Trigonometrische Funktionen	$\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\cot(x)$	sowie deren Umkehrfunktionen:
	Arcus Funktionen	$\sin^{-1}(x)$, $\cos^{-1}(x)$, $\tan^{-1}(x)$, $\cot^{-1}(x)$	

Verknüpft man diese elementaren Funktionstypen mit Hilfe der vier Grundrechenarten oder durch Hintereinanderschachtelung, so lassen sich alle in der Praxis relevanten Funktionen erzeugen.
Ebenso basieren auch die Funktionen $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ auf diesen elementaren Funktionstypen.
Die Eigenschaften der 5 Funktionstypen werden im Folgenden kurz zusammengefasst.

(1) (a) Lineare Funktion $\quad f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

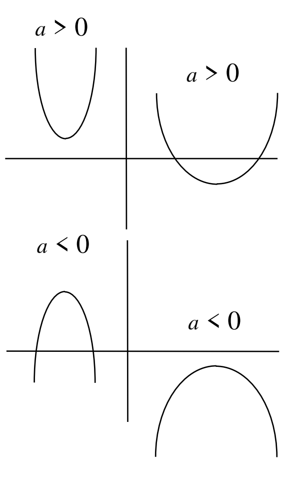


a : Steigung, $\quad b$: Achsenabschnitt (d.h. $f(0) = b$)

- nicht beschränkt
- streng monoton steigend, falls $a > 0$, streng monoton fallend, falls $a < 0$
- gerade (d.h. sowohl konvex als auch konkav)
- genau eine Nullstelle (für $x = -b/a$)
- Umkehrfunktion f^{-1} existiert mit $f^{-1}(x) = \dfrac{x-b}{a}$. Dies folgt aus

  $y = ax + b \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{y-b}{a}$ und Vertauschen von x und y.

(1) (b) Quadratische Funktion $\quad f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $\mathbb{D} = \mathbb{R}$



- *Scheitelpunkt* an der Stelle $x_S = -\dfrac{b}{2a}$
- einseitig beschränkt durch $f(x_S)$, und zwar

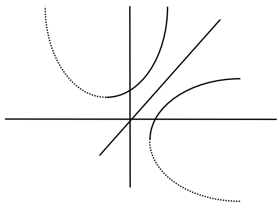
  nach unten, falls $a > 0$ (d.h. S ist *globales Minimum* von f),

  nach oben, falls $a < 0$ (d.h. S ist *globales Maximum* von f)
- Wechsel des streng monotonen Verlaufs im Scheitelpunkt
- konvex, falls $a > 0$, konkav, falls $a < 0$
- keine Nullstelle, falls $a > 0$ und $f(x_S) > 0$ oder $a < 0$ und $f(x_S) < 0$,

  falls also $f(x_S) / a > 0$ ist,

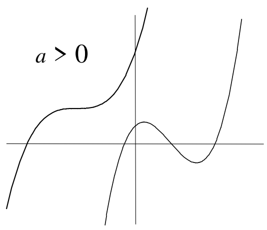
genau eine Nullstelle im Scheitelpunkt, falls $f(x_S) = 0$,

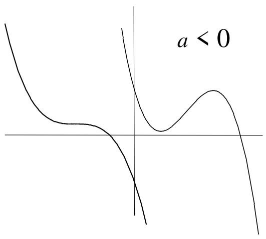
zwei Nullstellen, falls $f(x_S) / a < 0$ ist, und zwar $x_{1,2} = x_S \pm \sqrt{-f(x_S) / a}$



- Eine Umkehrfunktion f^{-1} existiert nicht, da den beiden unterschiedlichen x-Werten $x_S \pm r$ der gleiche Funktionswert $f(x_S \pm r) = f(x_S) + ar^2$ zugeordnet wird. Quadratische Funktionen sind also auf der Menge $\mathbb{R}$ nicht injektiv. Umkehrfunktionen lassen sich nur einzeln für jeden Parabelast, d.h. für die Mengen $(-\infty, x_S]$ bzw. $[x_S, \infty)$ ermitteln (siehe Grafik links).

(1) (c) Kubische Funktion $\quad f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0, \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}$





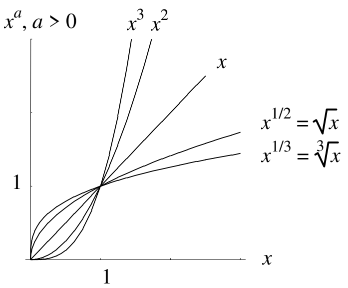
- *Wendepunkt* an der Stelle $x_w = -\dfrac{b}{3a}$
- nicht beschränkt
- Wechsel der Krümmung im Wendepunkt
  von konkav nach konvex, falls $a > 0$,
  von konvex nach konkav, falls $a < 0$.
- Zwei lokale Extrema $x_{1,2}$, falls $r > 0$, wobei $x_{1,2} = x_w \pm \sqrt{r}$
  mit $r = x_w{}^2 - c/\,3a = x_w\,(x_w + c/b)$
  keine lokalen Extrema, falls $r \leq 0$. Dabei gilt:
  $r > 0 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 > 3ac$ und analog $r \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 \leq 3ac$.
- Genau eine Nullstelle, falls $r \leq 0$,
  eine, zwei oder drei Nullstellen, falls $r > 0$, und zwar je nach Vorzeichen des Ausdrucks $s = (f(x_w) / 2a)^2 - r^3$ (vgl. Abschnitt 10):
  Drei (evtl. 2) Nullstellen, falls $s \leq 0$; eine Nullstelle, falls $s > 0$.
- Eine Umkehrfunktion f^{-1} existiert nur im Falle $r \leq 0$.

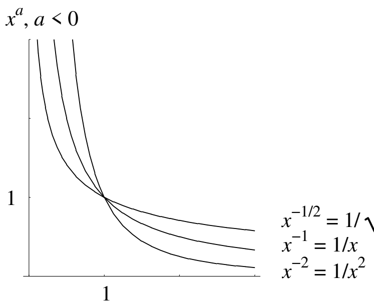
Allgemein gilt für Polynome vom Grade n:

- $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
- maximal n Nullstellen
- maximal $n-1$ lokale Extrema
- für gerades n:
  - f einseitig beschränkt, d.h. es gibt entweder ein globales Minimum oder ein globales Maximum auf $\mathbb{R}$,
  - f^{-1} existiert nicht auf $\mathbb{R}$,
  - evtl. gibt es keine Nullstelle,

  für ungerades n:
  - f nicht beschränkt, d.h. es gibt keine globalen Extrema auf $\mathbb{R}$,
  - f^{-1} kann, muss aber nicht existieren,
  - es gibt mindestens eine Nullstelle.

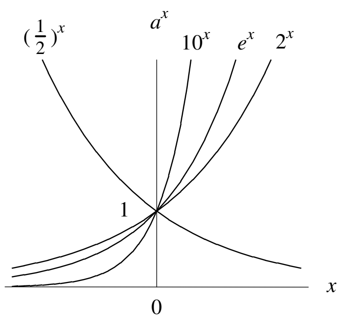
(2) Potenzfunktionen $\quad f(x) = x^a, \; a \in \mathbb{R}$





- $f(1) = 1$ für jedes $a \in \mathbb{R}$
- $\mathbb{D}$ abhängig von a, mindestens aber $\mathbb{R}_+$,
  die folgenden Eigenschaften gelten nur bei Beschränkung der Funktion auf $x \in \mathbb{R}_+$:
- f nach unten beschränkt durch 0, f nach oben nicht beschränkt
- streng monoton steigend, falls $a > 0$,
  streng monoton fallend, falls $a < 0$
- streng konvex, falls $a < 0$ oder $a > 1$,
  streng konkav, falls $0 < a < 1$
- keine lokalen Extrema; keine Nullstelle
- Umkehrfunktion: $f^{-1} = x^{1/a}$

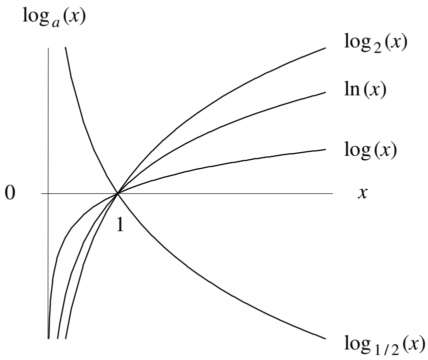
(3) Exponentialfunktionen $f(x) = a^x,\ a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$



- $f(0) = 1$ für jedes a
- $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
- f nach unten beschränkt durch 0, f nach oben nicht beschränkt
- streng monoton steigend, falls $a > 1$,
  streng monoton fallend, falls $a < 1$
- streng konvex
- keine lokalen Extrema
- keine Nullstelle; auch $a^{g(x)} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{D}_g$
- Umkehrfunktion: $f^{-1} = \log_a(x)$

$(\frac{1}{a})^x = a^{-x}$ erhält man grafisch durch Spiegeln von a^x an der y-Achse.

(4) Logarithmusfunktionen $f(x) = \log_a(x),\ a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$

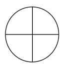


- $f(1) = 0$ für jedes a (einzige Nullstelle)
- $\mathbb{D} = \mathbb{R}_+$; $\ln(x) \to -\infty$ für $x \to 0$
- nicht beschränkt
- streng monoton steigend, falls $a > 1$,
  streng monoton fallend, falls $a < 1$
- streng konvex, falls $a < 1$, streng konkav, falls $a > 1$,
- keine lokalen Extrema
- Umkehrfunktion: $f^{-1} = a^x$

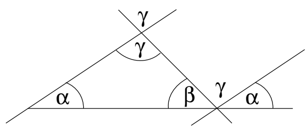
$\log_{1/a}(x) = -\log_a(x)$ ergibt sich grafisch durch Spiegeln von $\log_a(x)$ an der x-Achse.

(5) Trigonometrische Funktionen $\sin(x), \cos(x), \tan(x), \cot(x)$
Arcus Funktionen $\sin^{-1}(x), \cos^{-1}(x), \tan^{-1}(x), \cot^{-1}(x)$

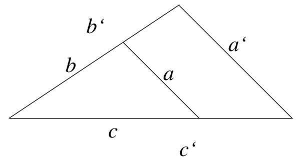
<u>Exkurs</u>: Trigonometrie

Kreis: Da unser Jahr ca. 360 Tage hat und grafisch als Jahreskreis dargestellt wird, war es naheliegend, einen Kreis in 360 Teile – also 360° – zu zerlegen.  Ein rechter Winkel[4]  besitzt dann 90°.

Dreieck: Die Winkelsumme in jedem Dreieck beträgt 180°:

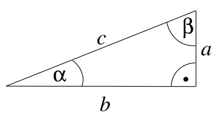


In jedem ähnlichen Dreieck, d.h. Dreieck mit identischen Winkeln, ist das Verhältnis von je 2 Seitenlängen zueinander gleich, d.h. unabhängig von der Größe des Dreiecks, also $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, $\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$, $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$



(a) Winkelfunktionen im rechtwinkeligen Dreieck (für Winkel zwischen 0° und 90°)

Im rechtwinkeligen Dreieck mit $\gamma = 90°$ gilt für die beiden übrigen Winkel α, β : $\alpha + \beta = 90°$, also auch $\beta = 90° - \alpha$, wobei $0° < \alpha, \beta < 90°$. Das Verhältnis der Längen von je zwei Seiten zueinander hängt damit nur von einem Winkel ab, α bzw. β. Man bezeichnet als



Hypotenuse die Seite, die dem rechten Winkel gegenüber liegt,

[4] In der Geodäsie verwendet man häufig auch die Maßeinheit "Neugrad", bei der ein rechter Winkel 100° entspricht.

Gegenkathete die Seite, die dem betrachteten Winkel gegenüber liegt,
Ankathete die Seite, die an dem betrachteten Winkel liegt,
und als Verhältnisse der Seitenlängen zueinander

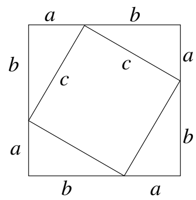
Sinus: $\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$, *Kosekans*: $\csc(\alpha) = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sin(\alpha)}$,

Kosinus: $\cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$, *Sekans*: $\sec(\alpha) = \frac{c}{b} = \frac{1}{\cos(\alpha)}$,

Tangens: $\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$, *Kotangens*: $\cot(\alpha) = \frac{b}{a} = \frac{1}{\tan(\alpha)}$.

Sekans und Kosekans spielen keine große Rolle und sind nur der Vollständigkeit halber aufgeführt. Indem man zu jedem Winkel α zwischen 0° und 90° ein entsprechendes Dreieck zeichnet, die Länge der Seiten misst und die oben angegebenen Quotienten bildet, kann man die Winkelfunktionen tabellieren. Dabei reicht es, nur den Sinus zu notieren, da sich alle übrigen Werte daraus einfach berechnen lassen:

- $\cos(\alpha) = \sin(90° - \alpha)$, da $\sin(\beta) = \frac{b}{c} = \cos(\alpha)$ und $\beta = 90° - \alpha$,
- $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$, da $\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{a}{c} \div \frac{b}{c} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.



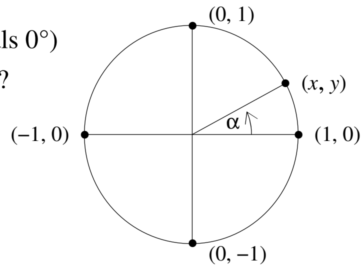
In rechtwinkeligen Dreiecken gilt der *Satz des Pythagoras*:
Die Summe der Quadrate der Katheten ist gleich dem Quadrat der Hypotenuse, mit obigen Bezeichnungen $a^2 + b^2 = c^2$.
Beweis: Die Fläche des großen Quadrats ist einerseits $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ und andererseits $c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}ab = c^2 + 2ab$. Gleichsetzen liefert das Ergebnis.

Daraus ergibt sich ein weiterer Zusammenhang zwischen Sinus und Kosinus:

- $(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1$, da $(\frac{a}{c})^2 + (\frac{b}{c})^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1$.

Statt $(\sin(\alpha))^2$ schreibt man $\sin^2(\alpha)$, analog auch bei den übrigen Winkelfunktionen.

(b) Winkelfunktionen am Einheitskreis (für Winkel größer als 90° bzw. kleiner als 0°)
Frage: Wie kann man beispielsweise sin(450°) oder cos(−30°) interpretieren?
Zur Beantwortung der Frage betrachtet man einen Kreis mit dem Radius 1 (Einheitskreis). Verbindet man einen beliebigen Punkt (x, y) auf dem Kreisbogen mit dem Koordinatenursprung, so entsteht ein Winkel α zwischen der Verbindungslinie und der x-Achse. Er wird von der x-Achse aus in mathematisch positiver Richtung gemessen, d.h. gegen den Uhrzeigersinn. So entsteht eine eindeutige Zuordnung zwischen Winkeln und Punkten des Kreisbogens:



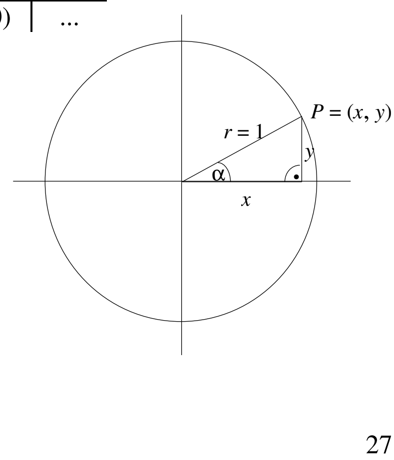
α	0°	90°	180°	270°
(x, y)	(1, 0)	(0, 1)	(−1, 0)	(0, −1)

Diese Zuordnung wird weiter ausgedehnt, indem man bei Winkeln über 360° den Kreis erneut durchläuft, bei negativen Winkeln im Uhrzeigersinn:

α	360°	450°	540°	...	−90°	−180°	...
(x, y)	(1, 0)	(0, 1)	(−1, 0)	...	(0, −1)	(−1, 0)	...

Man betrachtet nun das rechtwinkelige Dreieck, welches sich ergibt, indem der Punkt P einerseits mit dem Koordinatenursprung und andererseits vertikal mit der x-Achse verbunden wird. Dann gilt:

- $\sin(\alpha) = y / r = y$,
- $\cos(\alpha) = x / r = x$,



also $P = (x, y) = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$. Unter Verwendung dieses Zusammenhangs und der obigen Zuordnung zwischen Winkeln und Punkten erhält man die Werte der trigonometrischen Funktionen für beliebige Winkel, z.B.

α	0°	90°	180°	270°	360°	450°	...	−90°	−180°	...
(x, y)	(1, 0)	(0, 1)	(−1, 0)	(0, −1)	(1, 0)	(0, 1)	...	(0, −1)	(−1, 0)	...
sin(α)	0	1	0	−1	0	1	...	−1	0	...
cos(α)	1	0	−1	0	1	0	...	0	−1	...

Sinus und Kosinus sind also periodische Funktionen, die sich nach 360° wiederholen:

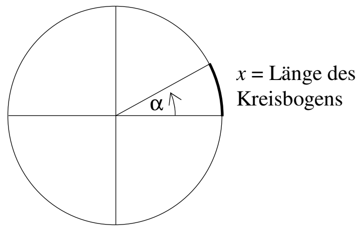
- $\sin(\alpha \pm 360°) = \sin(\alpha)$, • $\cos(\alpha \pm 360°) = \cos(\alpha)$. Außerdem ist
- $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$, • $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$.

Zwei Aussagen, die in beliebigen Dreiecken gelten, seien hier noch aufgeführt:

- *Kosinussatz*: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos(\gamma)$,
- *Sinussatz*: $\dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{b}{\sin(\beta)} = \dfrac{c}{\sin(\gamma)}$.

(c) Winkelfunktionen im Bogenmaß (für beliebige reelle Zahlen, nicht für Winkel)

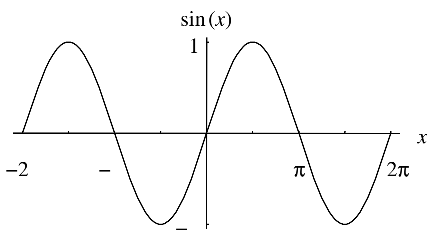
Nachdem nun die trigonometrischen Funktionen für beliebige Winkel definiert sind, können sie auf einfache Weise auch für beliebige reelle Zahlen erklärt werden, indem man jedem Winkel eindeutig eine reelle Zahl zuweist. Diese Zuordnungsvorschrift basiert wiederum auf dem Einheitskreis: Dem Winkel α, gemessen in Grad (englisch DEGrees), ordnet man die Länge x des entsprechenden Kreisbogens (RADian) zu.[5]



Da der Umfang des Einheitskreises 2π ist, ergibt sich Tabelle

α (DEG)	0°	90°	180°	270°	360°	450°	...	−90°	−180°	...
x (RAD)	0	π/2	π	3π/2	2π	5π/2	...	−π/2	−π	...

und der Zusammenhang $x = \alpha \cdot \frac{\pi}{180°}$. Somit sind die eingangs angeführten trigonometrischen Funktionen hergeleitet und können grafisch dargestellt werden.



sin(x), cos(x)

- $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
- beschränkt durch 1 und −1
- Nullstellen: $\sin(k\pi) = 0$, $\cos(\pi/2 + k\pi) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$
- lokale Maxima: $\sin(\pi/2 + 2k\pi) = 1$, $\cos(2k\pi) = 1$, $k \in \mathbb{Z}$

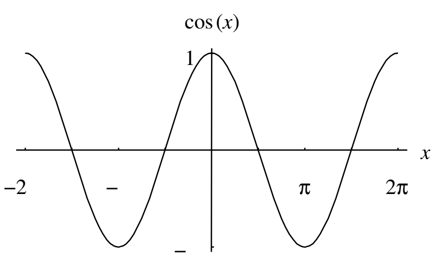
  lokale Minima: $\sin(3\pi/2 + 2k\pi) = -1$,

  $\cos(\pi + 2k\pi) = -1$, $k \in \mathbb{Z}$
- Wendestellen: hier identisch mit den Nullstellen
- Monotonie und Krümmung: siehe Grafik
- Periodizität 2π: $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$,

  $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$, $k \in \mathbb{Z}$
- Zusammenhang zwischen $\sin(x)$ und $\cos(x)$:

  $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$, $\sin(x) = \cos(x - \pi/2)$
- Umkehrfunktionen: existieren nur stückweise

  $\sin^{-1}(x)$: $[-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$, $\cos^{-1}(x)$: $[-1, 1] \to [0, \pi]$

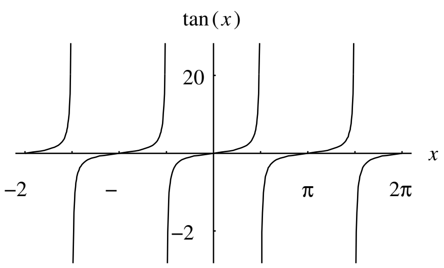


tan(x), cot(x)

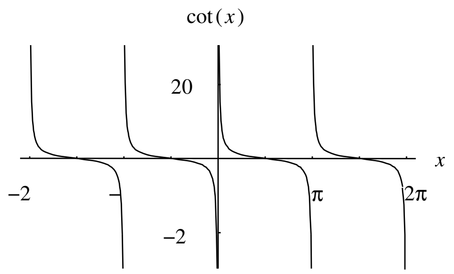
$\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $\cot(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} = 1/\tan(x)$

- $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ / Nullstellen von $\cos(x)$ bzw. $\sin(x)$

  (Polstellen mit Vorzeichenwechsel)
- unbeschränkt
- Nullstellen: $\tan(k\pi) = 0$,



[5] DEG bzw. RAD sind die üblichen Abkürzungen für Grad bzw. Bogenmaß auf Taschenrechnern.



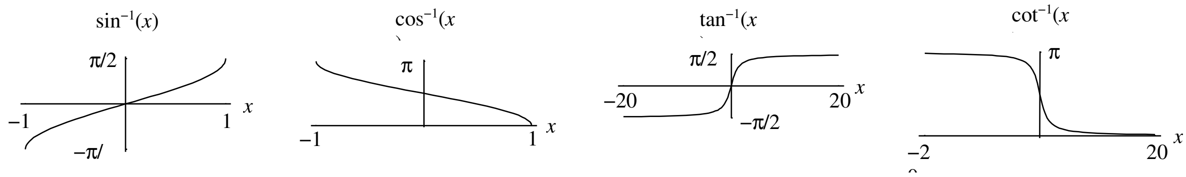
$\cot(\pi/2 + k\pi) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}$

- keine lokalen Extrema
- Wendestellen: hier identisch mit den Nullstellen
- streng monoton steigend bzw. fallend in jedem Funktionsast
- Periodizität π: $\tan(x + k\pi) = \tan(x)$,
  $\cot(x + k\pi) = \cot(x), \quad k \in \mathbb{Z}$
- Umkehrfunktionen: existieren nur stückweise
  $\tan^{-1}(x)$: $\mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$,
  $\cot^{-1}(x)$: $\mathbb{R} \to (0, \pi)$

Bevor die Arcus-Funktionen $\sin^{-1}(x)$, $\cos^{-1}(x)$, $\tan^{-1}(x)$, $\cot^{-1}(x)$ grafisch dargestellt werden, sei noch erwähnt, dass es eine ganze Reihe weiterer Zusammenhänge zwischen den trigonometrischen Funktionen gibt, z.B. die *Additionstheoreme*

$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cdot\cos(y) \pm \cos(x)\cdot\sin(y)$, $\quad\cos(x \pm y) = \cos(x)\cdot\cos(y) \mp \sin(x)\cdot\sin(y)$.

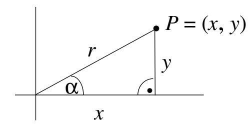
Arcus-Funktionen



Auf die Eigenschaften dieser Funktionen soll nicht näher eingegangen werden.
Im Zusammenhang mit trigonometrischen Funktionen sind außerdem noch ein paar Worte zu den Themen *Polarkoordinaten* und *hyperbolische* Funktionen angebracht.

Polarkoordinaten

Jedem Punkt $P = (x, y)$ in der Koordinatenebene kann eindeutig sein Abstand r zum 0-Punkt sowie sein Winkel α zwischen x-Achse und der Verbindungslinie zu P zugeordnet werden.
Wegen $\sin(\alpha) = \dfrac{y}{r}$ und $\cos(\alpha) = \dfrac{x}{r}$ ergibt sich folgende Umrechnung von kartesischen Koordinaten (x, y) in Polarkoordinaten (r, α) und umgekehrt ($-180° < \alpha \le 180°$):



$(r, \alpha) \to (x, y)$ mit $x = r\cdot\cos(\alpha), \quad y = r\cdot\sin(\alpha)$,

$(x, y) \to (r, \alpha)$ mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$\alpha = \cos^{-1}(\frac{x}{r})$ für $y \ge 0, \quad \alpha = -\cos^{-1}(\frac{x}{r})$ für $y < 0$.

Hyperbolische Funktionen: $\sinh(x), \cosh(x), \tanh(x), \coth(x)$

Wenngleich die Namen Sinushyperbolicus, Kosinushyperbolicus etc. an die trigonometrischen Funktionen erinnern, sind sie jedoch nicht direkt durch diese definiert, sondern es gilt:

$$\sinh(x) = (e^{x} - e^{-x}) / 2, \quad \cosh(x) = (e^{x} + e^{-x}) / 2, \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}, \quad \coth(x) = 1 / \tanh(x).$$

Die Umkehrfunktionen davon sind die Arcus-Hyperbolicus-Funktionen. Auf die grafische Darstellung all dieser Funktionen wird verzichtet, da sie in der Ökonomie keine so große Rolle spielen.

Der Abschnitt Funktionen ist damit beendet. Im den nächsten Kapiteln geht es um die Bestimmung der Nullstellen von Funktionen. Beispielsweise für die Funktion $f(x) = x - 2$ gilt:

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2.$$

Man sieht an diesem Beispiel, dass die Bestimmung der Nullstelle von f identisch ist mit der Aufgabe, die Lösung einer Gleichung (hier $x - 2 = 0$) zu ermitteln. Abschnitt 8 beschäftigt sich mit der Lösung linearer Gleichungen, Abschnitt 9 mit nichtlinearen Gleichungen.

8. Lineare Gleichungen

Wenn im Folgenden von einer linearen Gleichung gesprochen wird (vgl. auch Abschnitt 4), so sei dabei stets unterstellt, dass sie weder allgemeingültig ist (wie z.B. die Gleichung $x = x$) noch unerfüllbar (wie z.B. die Gleichung $x = x+1$).

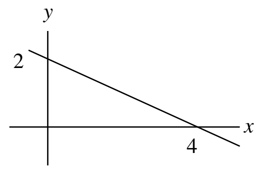
Begonnen wird zunächst mit der grafischen Lösung von linearen Gleichungen bzw. Gleichungssystemen (im Folgenden abgekürzt durch LGS), anschließend werden Verfahren zur analytischen Bestimmung der Lösungsmenge vorgestellt.

8.1 Grafische Lösung

- Eine Gleichung, eine Variable Bsp.: $2x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$

  In diesen einfachen Fällen gibt es stets genau eine Lösung, grafisch gesehen ein Punkt auf dem Zahlenstrahl.
- Eine Gleichung, zwei Variable Bsp.: $x + 2y - 4 = 0$

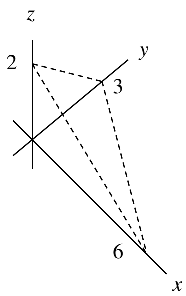
  Es gibt hier stets ∞ viele Lösungen, also ∞ viele Zahlenpaare (x, y), welche die Gleichung erfüllen. Diese Zahlenpaare, grafisch gesehen Punkte in der Koordinatenebene, liegen alle auf einer Geraden. Die Gerade lässt sich leicht zeichnen, indem man zwei Lösungspunkte ermittelt und eine Gerade durch sie legt.

  Im obigen Beispiel: Setze $x = 0$, erhalte daraus $y = 2$ (also das Zahlenpaar (0, 2)),
  setze $y = 0$, erhalte daraus $x = 4$ (also das Zahlenpaar (4, 0)).

  Die x-Achse beispielsweise erhält man als Lösung der Gleichung $y = 0$, die y-Achse durch $x = 0$.
- Eine Gleichung, drei Variable Bsp.: $x + 2y + 3z - 6 = 0$

  Die Lösung besteht aus ∞ vielen Zahlentripeln (x, y, z), grafisch dargestellt als Punkte im $\mathbb{R}^3$, die in einer Ebene liegen. Mittels dreier Lösungspunkte kann man sie zeichnen.

  Im obigen Beispiel: Setze $x = y = 0$, erhalte daraus $z = 2$ (also den Punkt (0, 0, 2)),
  setze $x = z = 0$, erhalte daraus $y = 3$ (also den Punkt (0, 3, 0),
  setze $y = z = 0$, erhalte daraus $x = 6$ (also den Punkt (6, 0, 0)).

  Die Verbindungslinien zwischen den drei Punkten (gestrichelte Linien) zeigen die Verläufe der Schnittgraden zwischen Lösungsebene und x-y-Ebene, x-z-Ebene bzw. y-z-Ebene. Die Lösungsebene verläuft also durch das gestrichelte Dreieck.
- Eine Gleichung, n Variable ($n \in \mathbb{N}$, $n > 3$) $a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = 0$

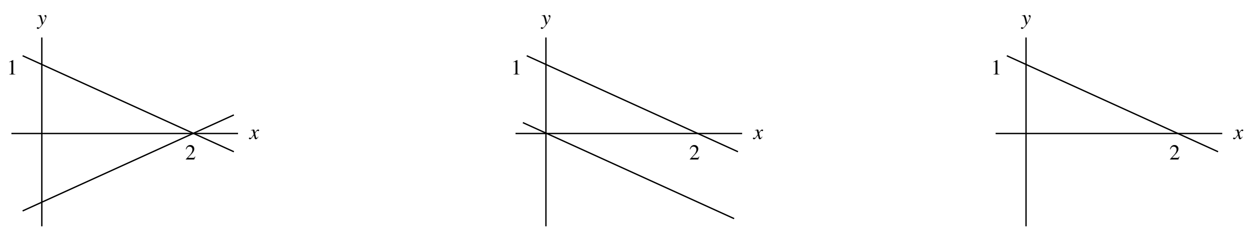
  Als Lösung ergeben sich ∞ viele Punkte im $\mathbb{R}^n$, die auf einer so genannten *Hyperebene*[6] liegen.
  Im nächsten Schritt werden Gleichungssysteme betrachtet.
- m Gleichungen, eine Variable ($m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$) Bsp.: $\begin{aligned} 2x - 6 &= 0 \\ x - 2 &= 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x &= 3 \\ x &= 2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{L} = \emptyset$

  Die Lösung eines LGS ergibt sich aus dem Durchschnitt der Lösungsmengen der einzelnen Gleichungen (vgl. Abschnitt 4). Da im Falle einer Variablen jede Gleichung genau eine Lösung besitzt und diese Lösungen i.a. nicht alle identisch sind, gibt es wie im obigen Beispiel normalerweise keine Lösung ($\mathbb{L} = \emptyset$).
- m Gleichungen, zwei Variable ($m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$)

  Betrachten wir zunächst anhand dreier Beispiele den Fall von 2 Gleichungen mit 2 Variablen.

  Bsp. (1): $\begin{aligned} x + 2y &= 2 \\ x - 2y &= 2 \end{aligned}$ Bsp. (2): $\begin{aligned} x + 2y &= 2 \\ x + 2y &= 0 \end{aligned}$ Bsp. (3): $\begin{aligned} x + 2y &= 2 \\ 2x + 4y &= 4 \end{aligned}$

  Die Lösungsmenge jeder Gleichung stellt eine Gerade dar, die Lösung eines der LGSe enthält jeweils alle Punkte, die gleichzeitig auf beiden Geraden liegen.
  Im Beispiel (1) gibt es genau eine Lösung, den Schnittpunkt (2, 0) der beiden Geraden.
  Beispiel (2) besitzt keine Lösung ($\mathbb{L} = \emptyset$), da die beiden Geraden parallel verlaufen.
  Im Beispiel (3) existieren ∞ viele Lösungen (alle Punkte auf der Geraden), da beide Geraden zusammenfallen.

  Fügt man nun in jedem der drei Beispiele noch eine (oder mehrere) Gleichung(en) hinzu, so können wiederum nur drei mögliche Fälle auftreten:

---

[6] Eine Hyperebene im $\mathbb{R}^n$ teilt den $\mathbb{R}^n$ in zwei Hälften, analog zu einer Geraden im $\mathbb{R}^2$ oder einer Ebenen im $\mathbb{R}^3$.

(1) Alle Geraden schneiden sich in einem Punkt. → Es gibt genau eine Lösung (Schnittpunkt).
(2) Die Geraden besitzen keinen gemeinsamen Punkt. → Es gibt keine Lösung.
(3) Alle Geraden fallen zusammen. → Es gibt ∞ viele Lösungen (Gerade).

- *m* Gleichungen, drei Variable ($m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$)
  Jede Gleichung stellt eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ dar. Als Schnitt von zwei Ebenen erhält man – sofern die Ebenen nicht parallel verlaufen – eine Gerade im $\mathbb{R}^3$. Ein LGS mit 2 Gleichungen und 3 Variablen kann also keine eindeutige Lösung besitzen, sondern entweder ∞ viele Lösungen oder keine Lösung.
  Nimmt man nun eine dritten Ebene hinzu (3 Gleichungen mit 3 Variablen), so können folgende Fälle auftreten:
  (1) Die dritten Ebene schneidet die Gerade. → Es gibt genau eine Lösung (Schnittpunkt).
  (2) Die dritte Ebene verläuft parallel zur Geraden
  oder mindestens zwei Ebenen verlaufen parallel. → Es gibt keine Lösung.
  (3) Die Gerade liegt in der dritten Ebene
  oder alle drei Ebenen fallen zusammen. → Es gibt ∞ viele Lösungen.
  Auch bei 4 oder mehr Gleichungen mit 3 Variablen bleibt es bei diesen drei Fällen.
- *m* Gleichungen, *n* Variable ($m, n \in \mathbb{N}$)
  Auch bei LGSen mit beliebig vielen Variablen existiert entweder genau eine Lösung, keine Lösung oder ∞ viele Lösungen. Gibt es weniger Gleichungen als Variable, so kann man keine eindeutige Lösung erhalten.

8.2 Analytische Lösung

Zwei Verfahren zur algebraischen Lösung eines LGS sollen im Vorgriff auf die Vorlesung "Lineare Algebra" kurz vorgestellt werden.

- Lösen eines LGS mit 2 Gleichungen und 2 Variablen mittels *Determinanten* (*Cramersche Regel*)

Ein LGS mit 2 Gleichungen und 2 Variablen lautet allgemein: $\begin{matrix} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 = b_2 \end{matrix}$.

Bezeichnungen:
x_j Variablen
a_{ij} Koeffizient der Variablen x_j in Gleichung i
b_i Zahl auf der rechten Seite von Gleichung i

Diese Schreibweise wird auch für beliebig große LGSe verwendet.
Multipliziert man die 1. Gleichung mit a_{22} und die 2. Gleichung mit a_{12}, so erhält man

$$\begin{matrix} a_{11}\,a_{22}\,x_1 + a_{12}\,a_{22}\,x_2 = a_{22}\,b_1 \\ a_{12}\,a_{21}\,x_1 + a_{12}\,a_{22}\,x_2 = a_{12}\,b_2 \end{matrix} .$$

Zieht man nun die 2. Gleichung von der 1. ab, so führt dies zu

$(a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21})\,x_1 = a_{22}\,b_1 - a_{12}\,b_2$ oder äquivalent $x_1 = \dfrac{a_{22}\,b_1 - a_{12}\,b_2}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}}$, falls $a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21} \neq 0$.

Auf analoge Weise erhält man für x_2: $x_2 = \dfrac{a_{11}\,b_2 - a_{21}\,b_1}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}}$, falls $a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21} \neq 0$.

Damit hat man die allgemeine Lösung des LGS berechnet. Falls $a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21} = 0$, gibt es entweder keine oder ∞ viele Lösung(en). Mit Hilfe von Determinanten kann man sich die obigen Formeln leicht merken. Dazu werden zunächst Matrizen und Vektoren eingeführt.

Matrix: Rechteckige Tabelle mit Zahlen, versehen mit runden Klammern,
wird mit großen, fett gedruckten Buchstaben bezeichnet, z.B.
$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ Koeffizientenmatrix des obigen LGS.

Vektor: Matrix, die nur aus einer Spalte besteht,
wird mit kleinen, fett gedruckten Buchstaben bezeichnet, z.B. für das obige LGS
$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ Variablenvektor, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ Vektor der rechten Seite.

Die Rechenregeln für Matrizen und Vektoren sollen an dieser Stelle nicht erklärt werden. Jeder Matrix **A**, die aus gleich vielen Zeilen und Spalten besteht (quadratisch ist), kann eindeutig eine Zahl zugeordnet werden, genannt Determinante, geschrieben $\det(\mathbf{A})$ bzw. $|\,\mathbf{A}\,|$. Für eine Matrix mit 2 Zeilen und 2 Spalten ist sie definiert durch

$$|\mathbf{A}| = \det(\mathbf{A}) = \left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right| = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}\,.$$

Bezeichnet man a_{11} und a_{22} als Hauptdiagonalelemente von **A**, a_{12} und a_{21} als Nebendiagonalelemente, so merkt man sich leicht: $|\mathbf{A}|$ = Produkt der Hauptdiagonalelemente − Produkt der Nebendiagonalelemente.[7]

Im Nenner der Lösung x_1, x_2 des obigen LGS steht gerade $|\mathbf{A}|$. Eine eindeutige Lösung im LGS existiert also genau dann, wenn $|\mathbf{A}| \neq 0$. Die Zähler in x_1, x_2 kann man sich merken, indem man folgende Hilfsmatrizen definiert:

$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$. In $\mathbf{A}_1$ wird die 1. Spalte von **A** durch den Vektor **b** ersetzt, in $\mathbf{A}_2$ die 2. Spalte.

Es gilt dann $|\mathbf{A}_1| = b_1\, a_{22} - a_{12}\, b_2$, $|\mathbf{A}_2| = a_{11}\, b_2 - b_1\, a_{21}$, also $x_1 = \dfrac{|\mathbf{A}_1|}{|\mathbf{A}|}$, $x_2 = \dfrac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{A}|}$.

Diese Regel gilt auch für beliebig große LGSe und wird als *Cramersche Regel* bezeichnet.

Bsp. $\begin{array}{l} 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = 13 \\ 3 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 = 27 \end{array}$, also $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 13 \\ 27 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 13 & 3 \\ 27 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 3 & 27 \end{pmatrix}$,

$|\mathbf{A}| = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 3 = 5$, $|\mathbf{A}_1| = 13 \cdot 7 - 3 \cdot 27 = 10$, $|\mathbf{A}_2| = 2 \cdot 27 - 13 \cdot 3 = 15$, $x_1 = \frac{10}{5} = 2$, $x_2 = \frac{15}{5} = 3$.

- Lösen eines LGS mit 3 Gleichungen und 3 Variablen mittels *Gauß-Algorithmus* (GA)

Die Darstellung eines LGS mit 3 Gleichungen und 3 Variablen lautet:

$$\begin{array}{l} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 = b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 = b_2 \\ a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 = b_3 \end{array}.$$

Übersichtlicher und sparsamer lässt sich das System in Tableau-Form schreiben:

x_1	x_2	x_3	**b**
a_{11}	a_{12}	a_{13}	b_1
a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_2
a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_3

Das Ziel des GA mit vollständiger Elimination besteht darin, dieses Tableau so umzuformen, dass ein Tableau mit dem nebenstehenden Aussehen erzeugt wird:

x_1	x_2	x_3	**c**
1	0	0	c_1
0	1	0	c_2
0	0	1	c_3

Die Lösung kann hieraus sofort abgelesen werden: $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, $x_3 = c_3$.

Zur Umformung verwendet man folgende Rechenschritte:

– Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl $\neq 0$,

– Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Auch das Vertauschen von Zeilen bzw. Spalten ist erlaubt.

Die Vorgehensweise beim GA wird anhand von drei Beispielen dargestellt:

Beispiel (1): (Das LGS besitzt genau eine Lösung)

$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 13 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 13 \end{array}$$

In Tableauschreibweise (Anfangstableau):

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	2	3	10
2	3	1	13
3	1	2	13

Vorgehen: Erzeuge unter x_1 die Spalte $\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$, dann unter x_2 die Spalte $\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$ und schließlich unter x_3 die Spalte $\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$.

Dabei bezeichnet

( ) das Pivotelement (muss 1 werden, der Rest der Spalte 0),

PZ die Pivotzeile (Zeile, die das Pivotelement enthält). Pivot (franz.): Drehpunkt

[7] Bei größeren Matrizen gilt diese Regel nicht mehr und die Berechnung der Determinante wird erheblich aufwendiger.

x_1	x_2	x_3	r.S.	
(1)	2	3	10	$\leftarrow$ PZ
2	3	1	13	$-2\cdot$PZ
3	1	2	13	$-3\cdot$PZ
1	2	3	10	
0	(−1)	−5	−7	$\cdot(-1)$
0	−5	−7	−17	$\cdot(-1)$
1	2	3	10	$-2\cdot$PZ
0	(1)	5	7	$\leftarrow$ PZ
0	5	7	17	$-5\cdot$PZ

x_1	x_2	x_3	r.S.	
1	0	−7	−4	
0	1	5	7	
0	0	(−18)	−18	:(−18)
1	0	−7	−4	$+7\cdot$PZ
0	1	5	7	$-5\cdot$PZ
0	0	(1)	1	$\leftarrow$ PZ
1	0	0	3	
0	1	0	2	
0	0	1	1	

Also $x_1 = 3$
$x_2 = 2$
$x_3 = 1$

Beispiel (2): (Das LGS besitzt ∞ viele Lösungen)

$$2x_1 + x_3 = 5$$
$$3x_1 + x_2 = 5$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

In Tableauschreibweise (Anfangstableau):

x_1	x_2	x_3	r.S.
2	0	1	5
3	1	0	5
1	1	−1	0

x_1	x_2	x_3	r.S.	
(2)	0	1	5	Tausche Spalte 1 mit Spalte 3
3	1	0	5	
1	1	−1	0	
x_3	x_2	x_1	r.S.	
(1)	0	2	5	$\leftarrow$ PZ
0	1	3	5	
−1	1	1	0	+ PZ
1	0	2	5	
0	(1)	3	5	$\leftarrow$ PZ
0	1	3	5	− PZ
1	0	2	5	
0	1	3	5	
0	0	0	0	$\leftarrow$ Zeile streichen (allgemeingültig)

Das LGS lautet ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} x_3 + 2x_1 &= 5 \\ x_2 + 3x_1 &= 5 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x_3 &= 5 - 2x_1 \\ x_2 &= 5 - 3x_1 \end{aligned}$$

Es gibt also ∞ viele Lösungen, da eine Variable (hier x_1) frei gewählt werden kann und sich daraus x_2 und x_3 sofort bestimmen lassen.

Beispiel (3): (Das LGS besitzt keine Lösung)

$$x_1 + 2x_2 = 4$$
$$x_2 + 3x_3 = 10$$
$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 15$$

In Tableauschreibweise (Anfangstableau):

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	2	0	4
0	1	3	10
1	3	3	15

x_1	x_2	x_3	r.S.	
(1)	2	0	4	$\leftarrow$ PZ
0	1	3	10	
1	3	3	15	− PZ
1	2	0	4	$-2\cdot$PZ
0	(1)	3	10	$\leftarrow$ PZ
0	1	3	11	− PZ
1	0	−6	−16	
0	1	3	10	
0	0	0	1	$\leftarrow$ Gleichung nicht erfüllbar (widersprüchlich)

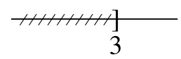
Das LGS besitzt also keine Lösung, wenn beim GA eine Zeile auftritt, die auf der linken Seite aus Nullen besteht, auf der rechten Seite aber $\neq 0$ ist.

9. Lineare Ungleichungen, lineare Optimierung (grafisch)

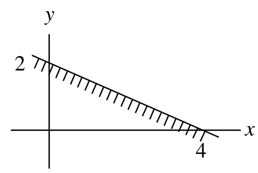
9.1 Lineare Ungleichungen

Wie im Fall linearer Gleichungen betrachten wir nacheinander die Lösungsmenge *einer* linearen Ungleichung mit $1, 2, 3, \dots, n$ Variablen, bevor wir zu linearen Ungleichungssystemen (LUS) übergehen.

- Eine Ungleichung, eine Variable Bsp.: $2x - 6 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 3$
  Es gibt stets ∞ viele Lösungen, grafisch gesehen der "halbe" Zahlenstrahl ($\mathbb{R}$):



- Eine Ungleichung, zwei Variable Bsp.: $x + 2y - 4 \leq 0$
  Alle Zahlenpaare (x, y), welche die Ungleichung erfüllen, liegen unterhalb bzw. auf der Geraden $x + 2y - 4 = 0$. Die Lösungsmenge ist also die "halbe" Koordinatenebene ($\mathbb{R}^2$). Die Frage, ob die Lösung aus der oberen oder der unteren "Hälfte" besteht, kann durch Einsetzen eines Punktes überprüft werden (z.B. gehört der Punkt (0, 0) zur Lösung).



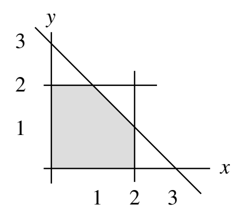
- Eine Ungleichung, drei Variable Bsp.: $x + 2y + 3z - 6 \leq 0$
  Die Lösungsmenge bildet der "halbe" Raum $\mathbb{R}^3$, nämlich alle Punkte (x, y, z) unterhalb bzw. auf der Ebenen $x + 2y + 3z - 6 = 0$ (auf die grafische Darstellung wird verzichtet). Auch hier gehört der Punkt (0, 0, 0) zur Lösung.
- Eine Ungleichung, n Variable ($n \in \mathbb{N}$, $n > 3$) $a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n \leq 0$
  Alle Punkte im $\mathbb{R}^n$ diesseits oder jenseits der Hyperebenen $a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = 0$, also der "halbe" $\mathbb{R}^n$, stellt die Lösungsmenge dar.

Gehen wir nun zu Systemen von Ungleichungen über. Die Lösung eines LUS ergibt sich als Durchschnitt der Lösungsmengen der einzelnen Ungleichungen. Wie gerade dargelegt, erhält man bei einer linearen Ungleichung stets den "halben" zugrunde liegenden Raum als Lösung. Diese Mengen besitzen die Eigenschaft der *Konvexität*, d.h. mit je zwei Punkten aus der Menge gehört auch die gesamte Verbindungsstrecke zwischen ihnen zur Menge. Schneidet man zwei konvexe Mengen, so überträgt sich diese Eigenschaft auch auf alle Punkte im Durchschnitt. Der Durchschnitt konvexer Mengen ist also wiederum konvex, d.h. die Lösungsmenge eines LUS ist eine konvexe Menge. Diese Eigenschaft ist letztendlich für das Funktionieren des *Simplex-Algorithmus* ausschlaggebend, mit dem Probleme der linearen Optimierung gelöst werden können (siehe Vorlesung "Lineare Algebra"). Wie sehen nun konvexe Mengen aus?

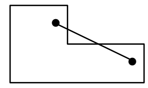
- m Ungleichungen, eine Variable Bsp.: $\begin{array}{c} 2x - 6 \leq 0 \\ x - 2 > 0 \\ x > 0 \\ x < 5 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} x \leq 3 \\ x > 2 \\ x > 0 \\ x < 5 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{L} = (2, 3]$

  Lösung eines LUS mit einer Variablen ist stets ein Intervall (als Spezialfall ein Punkt) oder die leere Menge.

- m Ungleichungen, zwei Variable Bsp.: $\begin{array}{c} x + y \leq 3 \\ x \leq 2 \\ y \leq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}$



  Die Lösungsmenge ist ein Polyeder (Vieleck), der nicht unbedingt wie in diesem Beispiel nach allen Seiten geschlossen sein muss. Spezialfälle sind Gerade, Strecke, Punkt oder leere Menge.
  Bei folgendem Vieleck kann es sich nicht um die Lösungsmenge eines LUS handeln, da die Menge nicht konvex ist (die Verbindungsstrecke zwischen den beiden Punkten liegt nicht ganz im Vieleck).



- m Ungleichungen, drei Variable
  Im $\mathbb{R}^3$ erhält man analog einen konvexen Körper mit vielen Ecken, anschaulich gesprochen eine Dachkammer mit vielen schrägen Wänden. Konvexität bedeutet in diesem Bild, dass man von jedem Punkt des Raumes jeden anderen Punkt sehen kann, also keine Erker etc. existieren. Die Kammer muss nicht nach allen Seiten eine Wand besitzen.

- m Ungleichungen, n Variable
  Die Lösungsmenge stellt einen konvexen Körper im $\mathbb{R}^n$ dar, "vorstellbar" wie im $\mathbb{R}^3$.

9.2 Lineare Optimierung

Beispiel: Zwei Produkte P_1, P_2 werden auf drei Maschinen M_1, M_2, M_3 hergestellt. Die Fertigungszeiten (in Stunden) jedes Produktes auf jeder Maschine sind in nebenstehender Tabelle zusammengefasst. M_1 und M_2 stehen pro Tag nur 2 Stunden zur Verfügung, M_3 3 Stunden. Der Gewinn beim Verkauf der Produkte beträgt 2 T€ für P_1 und 3 T€ für P_2.
Bei welchen Produktionsmengen x_1, x_2 für P_1, P_2 wird der Tagesgewinn maximal?

	P_1	P_2
M_1	1	0
M_2	0	1
M_3	1	1

Dieses kleine Problem lässt sich mit ein paar Überlegungen auch ohne mathematische Hilfsmittel lösen. Es geht hier jedoch darum, einen allgemeinen Lösungsweg aufzuzeigen. Weiterhin wird unterstellt, dass die zu produzierenden Mengen x_1, x_2 nicht unbedingt ganzzahlig sein müssen, also z.B. in kg oder m^3 gemessen werden. Ansonsten handelt es sich um ein Problem der ganzzahligen Optimierung, was die Sache noch einmal verkompliziert.

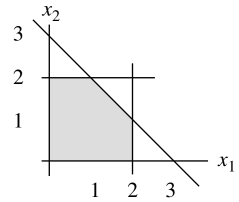
Lösung: Zunächst werden die Kapazitätsbeschränkungen der drei Maschinen durch ein Ungleichungssystem ausgedrückt:

$$\begin{aligned} 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 &\le 2 \\ 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 &\le 2 \\ 1\cdot x_1 + 1\cdot x_2 &\le 3 \end{aligned}\ .$$

Außerdem können keine negative Mengen produziert werden, also $\begin{aligned} x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$.

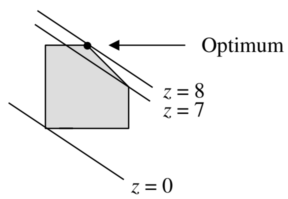
Die Zielfunktion (hier der Gewinn) lautet: $z = 2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 = \max!$

Die drei *Restriktionen* bilden zusammen mit den beiden *Nichtnegativitätsbedingungen* ein LUS. Die Maximierung oder Minimierung einer linearen Zielfunktion unter Beachtung von Nebenbedingungen in Form eines LUS bezeichnet man als *lineare Optimierung*.



Die Lösungsmenge des LUS nennt man den *zulässigen Bereich* (ZB). Er enthält alle Mengenkombinationen (x_1, x_2), die unter den gegebenen Beschränkungen produzierbar sind. Gesucht ist nun diejenige Kombination, die beim Verkauf den höchsten Gewinn erzielt. Dazu einige Überlegungen:

- Das Optimum muss auf dem Rand des ZB liegen. Begründung:
  Ein Punkt im Innern des ZB kann nicht optimal sein, denn bei allen Punkten rechts davon wird eine größere Menge von P_1 hergestellt, d.h. ein höherer Gewinn möglich. Gleiches gilt für alle Punkte oberhalb, die eine erhöhte Produktion von P_2 darstellen. Diese Argumentation basiert wesentlich auf der Konvexität des ZB.
- Das Optimum ist stets ein Eckpunkt des ZB.
  In diesem Beispiel folgt mit der gleichen Begründung wie oben:
  Die Punkte zwischen (0, 0) und (2, 0) sind nicht optimal, ebenso wenig die Punkte zwischen (2, 0) und (2, 1).
  Analog:
  Die Punkte zwischen (0, 0) und (0, 2) sind nicht optimal, ebenso wenig die Punkte zwischen (0, 2) und (1, 2).
  Als Kandidaten für das Optimum bleiben lediglich die Punkte (2, 1) und (1, 2) sowie Punkte auf der Verbindungsstrecke zwischen ihnen. Die Zielfunktion (hier Gewinn) besitzt
  im Punkt (2, 1) den Wert $z(2, 1) = 2\cdot 2 + 3\cdot 1 = 7$,
  im Punkt (1, 2) den Wert $z(1, 2) = 2\cdot 1 + 3\cdot 2 = 8$.
  Alle Punkte, die beispielsweise den Wert 7 erreichen,
  liegen auf der Geraden $z = 7 \quad \Leftrightarrow \quad 2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 = 7$.



  Die Geraden $z = 0$, $z = 7$, $z = 8$ sind in vorstehender Grafik zusammen mit dem ZB eingezeichnet.

Damit ergibt sich folgende Vorgehensweise zur grafischen Lösung eines linearen Optimierungsproblems:

- Ermittle grafisch den zulässigen Bereich als Lösung des LUS.
- Zeichne die Zielfunktionsgerade z = 0 ein und verschiebe sie solange parallel (in Richtung "Verbesserung der Zielfunktion"), bis sie den zulässigen Bereich nur noch in einem Punkt berührt. Dieser Punkt ist das Optimum.

Unter Umständen ist das Optimum nicht eindeutig bestimmt, wenn nämlich die Zielfunktionsgerade die gleiche Steigung wie die relevante Begrenzungsstrecke des ZB besitzt.
Die rechnerische Lösung mittels Simplex-Algorithmus, die hier nicht dargestellt werden soll, verläuft prinzipiell wie folgt. Man startet die Suche nach dem Optimum normalerweise im Punkt (0, 0). In jedem nachfolgendem Schritt wechselt man zu

einer benachbarten Ecke des ZB mit höherem Zielfunktionswert, bis keine Verbesserung mehr möglich ist. Die Ecken des ZB sind Schnittpunkte der Begrenzungsgeraden. Daher werden die Ungleichungen durch Einführen zusätzlicher Variablen zu Gleichungen umgeformt. Aus dem LUS entsteht so ein LGS, welches viel mehr Variablen als Gleichungen aufweist und ∞ viele Lösungen besitzt. Die Eckpunkte des ZB sind spezielle Lösungen dieses LGS. Der Übergang von einer Ecke zu einer anderen entspricht einem Pivot-Schritt im Gauß-Algorithmus.

10. Nichtlineare Gleichungen, Nullstellen nichtlinearer Funktionen

Das Bestimmen der Lösungsmenge einer Gleichung ist identisch dem Problem, die Nullstelle einer Funktion zu ermitteln.
Beispiel:

Gleichung:	$x^2 - 1 = 0$	Lösungsmenge:	$\{-1, 1\}$
Funktion:	$f(x) = x^2 - 1$	Nullstellen:	$\{-1, 1\}$

Im weiteren Verlauf dieses Abschnitts geht es also um das Auffinden von Nullstellen.

10.1 Nullstellen von Funktionen $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Die einfachsten Funktionstypen sind die Polynome (vgl. Abschnitt 7).

- Polynom n-ten Grades: $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$

(1) Polynome 1. Grades sind lineare Funktionen $f(x) = a_0 + a_1 x$, deren Nullstelle leicht zu berechnen ist: $x_0 = -\dfrac{a_0}{a_1}$.

(2) Polynome 2. Grades sind quadratische Funktionen $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Für sie gilt (falls $a_2 \neq 0$):

$$f(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2 + \frac{a_1}{a_2}x + \frac{a_0}{a_2} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2 + px + q = 0 \;\text{ mit }\; p = \frac{a_1}{a_2},\; q = \frac{a_0}{a_2} \quad\Leftrightarrow\quad x^2 + px = -q$$

$$\Leftrightarrow\quad x^2 + px + (p/2)^2 = (p/2)^2 - q \quad\Leftrightarrow\quad (x + p/2)^2 = (p/2)^2 - q \quad\Leftrightarrow\quad x + p/2 = \pm\sqrt{(p/2)^2 - q}$$

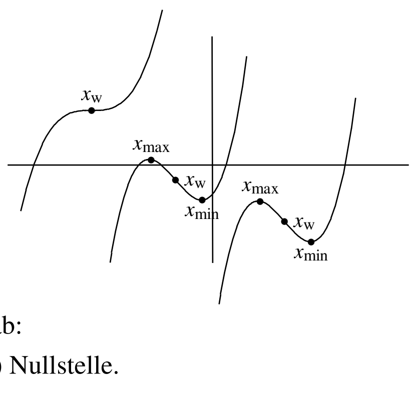
$$\Leftrightarrow\quad \boxed{x_{1,2} = -p/2 \pm \sqrt{(p/2)^2 - q}}\;, \quad \text{falls } (p/2)^2 - q \geq 0.$$

Diese Formel zum Lösen quadratischer Gleichungen wird auch als $p, q-$*Formel* bezeichnet.
Bsp.: $x^2 - 7x + 10 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad$ mit $p = -7,\; q = 10$:
$x_{1,2} = -(-7/2) \pm \sqrt{(-7/2)^2 - 10} = 7/2 \pm \sqrt{49/4 - 10} = 7/2 \pm \sqrt{49/4 - 40/4} = 7/2 \pm \sqrt{9/4} = 7/2 \pm 3/2$,
also $x_1 = 5,\quad x_2 = 2$. (Tipp: Mit Brüchen rechnen, nicht mit Dezimalzahlen).

(3) Polynome 3. Grades sind kubische Funktionen $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$.
Auch bei kubischen Funktionen können Formeln zur Bestimmung der Nullstellen angegeben werden, die so genannten *Cardano-Formeln*. Sie sind relativ umfangreich und verwenden die komplexen Zahlen. Ist man nur an den reellen Nullstellen interessiert, so kann man das weiter unten präsentierte Schema verwenden.
Zuvor jedoch einige Überlegungen zur Existenz von Nullstellen bei kubischen Funktionen. Wie unter (2) gilt:

$$f(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^3 + \frac{a_2}{a_3}x^2 + \frac{a_1}{a_3}x + \frac{a_0}{a_3} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x^3 + a\,x^2 + b\,x + c = 0 \;\text{ mit }\; a = \frac{a_2}{a_3},\; b = \frac{a_1}{a_3},\; c = \frac{a_0}{a_3}.$$

Die Funktion $g(x) = x^3 + a\,x^2 + b\,x + c$ besitzt einen Wendepunkt $x_w = -\dfrac{a}{3}$ sowie zwei lokale Extrema, falls $r > 0$. Dabei ist
$r = x_w{}^2 - b/3, \quad x_{max} = x_w - \sqrt{r}, \quad x_{min} = x_w + \sqrt{r}$.
Die Funktion $g(x)$ ist symmetrisch zum Wendepunkt, d.h.
$g(x_w + \alpha) = g(x_w) + \alpha\cdot(\alpha^2 - 3r)$ für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ Dabei ist
$g(x_w) = x_w\cdot(x_w{}^2 - 3r) + c$. Die Funktionswerte der Extrema sind
$g(x_{max}) = g(x_w) + 2r\cdot\sqrt{r}, \quad g(x_{min}) = g(x_w) - 2r\cdot\sqrt{r}$.



In Bezug auf die Nullstellen von $g(x)$ leitet man aus der Grafik folgendes ab:
Ist $r \leq 0$, so existieren keine lokalen Extrema und daher genau eine (reelle) Nullstelle.
Für $r > 0$ gibt es zwei lokale Extrema.
– Liegt das Maximum unterhalb oder das Minimum oberhalb der x-Achse, so kann es nur eine Nullstelle geben.
– Befindet sich einer der beiden lokalen Extrema auf der x-Achse, so existieren zwei Nullstellen.
– Ist das Maximum oberhalb und das Minimum unterhalb der x-Achse, so gibt es drei Nullstellen.
Die Bedingung "Maximum unterhalb der x-Achse" bedeutet $g(x_{max}) < 0$, also $g(x_w) + 2r\cdot\sqrt{r} < 0$.

Dies ist äquivalent zu $\frac{g(x_w)}{2r\cdot\sqrt{r}} + 1 < 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{g(x_w)}{2r\cdot\sqrt{r}} < -1 \quad\Leftrightarrow\quad s < -1$ mit $s = \frac{g(x_w)}{2r\cdot\sqrt{r}}$.

Analog ist die Bedingung "Minimum oberhalb der x-Achse" äquivalent zu $s > 1$, s wie oben.

Insgesamt ergibt sich damit im Falle $r > 0$:

– Ist $|s| > 1$, so gibt es genau eine Nullstelle.
– Ist $|s| = 1$, so gibt es genau zwei Nullstellen.
– Ist $|s| < 1$, so gibt es genau drei Nullstellen.

Ohne weitere Herleitung wird nun das Schema zum Bestimmen von Nullstellen präsentiert:

Schema zum Bestimmen der Nullstellen einer Funktion $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

- Berechne $a = \frac{a_2}{a_3}$, $b = \frac{a_1}{a_3}$, $c = \frac{a_0}{a_3}$, $x_w = -\frac{a}{3}$, $r = x_w{}^2 - b/3$, $g(x_w) = x_w\cdot(x_w{}^2 - 3r) + c$.
- Unterscheide die drei Fälle $r = 0$, $r < 0$, $r > 0$.

$r = 0$: Nullstelle $x_0 = x_w - \sqrt[3]{x_w{}^3 + c}$

$r < 0$: Setze $r = -r$. Berechne $s = \frac{g(x_w)}{2r\cdot\sqrt{r}}$, $t = \sqrt[3]{\sqrt{s^2+1} - s}$. Nullstelle $x_0 = x_w + (t - \frac{1}{t})\cdot\sqrt{r}$.

$r > 0$: Berechne $s = \frac{g(x_w)}{2r\cdot\sqrt{r}}$. Unterscheide die drei Fälle $|s| = 1$, $|s| > 1$, $|s| < 1$.

$|s| = 1$: Für $s = 1$: Nullstellen $x_0 = x_w - 2\sqrt{r}$, $x_1 = x_w + \sqrt{r}$.
Für $s = -1$: Nullstellen $x_0 = x_w + 2\sqrt{r}$, $x_1 = x_w - \sqrt{r}$.

$|s| > 1$: Berechne $t = \sqrt[3]{\sqrt{s^2-1} + |s|}$.
Für $s > 1$: Nullstelle $x_0 = x_w - (t + \frac{1}{t})\cdot\sqrt{r}$.
Für $s < -1$: Nullstelle $x_0 = x_w + (t + \frac{1}{t})\cdot\sqrt{r}$.

$|s| < 1$: Für $s = 0$: Nullstellen $x_0 = x_w$, $x_{1,2} = x_w \pm \sqrt{3r}$.
Für $s \neq 0$: Berechne $t = \frac{1}{3}\cos^{-1}(|s|)$.
Für $s > 0$: Nullstellen $x_0 = x_w - 2\sqrt{r}\cdot\cos(t)$, $x_{1,2} = x_w + 2\sqrt{r}\cdot\cos(\frac{\pi}{3} \pm t)$.
Für $s < 0$: Nullstellen $x_0 = x_w + 2\sqrt{r}\cdot\cos(t)$, $x_{1,2} = x_w - 2\sqrt{r}\cdot\cos(\frac{\pi}{3} \pm t)$.

Bemerkung: Bei der Herleitung des Schemas kann man zunächst die Funktion g horizontal so verschieben, dass der Wendepunkt an der Stelle 0 liegt. Die geschieht durch die Transformation $x = z + x_w = z - \frac{a}{3}$ und führt zur Funktion $h(z) = z^3 + p\,x + q$ mit $p = -3r$ und $q = h(0) = g(x_w)$.

Bsp.: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, also $a = -6$, $b = 11$, $c = -6$, $x_w = 2$, $r = 1/3 > 0$, $g(x_w) = 0$, $s = 0$
$\Rightarrow\ x_0 = 2$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$;
$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$, also $a = -6$, $b = 9$, $c = -1$, $x_w = 2$, $r = 1 > 0$, $g(x_w) = 1$, $s = \frac{1}{2} < 1$,
$\cos^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$, $t = \frac{\pi}{9} \quad\Rightarrow\quad x_0 = 2 - 2\cdot\cos(\frac{\pi}{9})$, $x_{1,2} = 2 + 2\cdot\cos(\frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9})$.

Da das obige Schema nicht gut zu merken ist, beschränkt man sich in der "schulischen Praxis" auf kubische Funktionen, bei denen eine Nullstelle leicht durch Probieren bestimmt werden kann. Dies ist im ersten Beispiel der Fall. Eine Nullstelle liegt bei $x_0 = 1$. Mittels *Polynomdivision* durch $x - x_0$ reduziert man nun den Grad des Polynoms:

$$
\begin{array}{l}
x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \;:\; (x - 1) = x^2 - 5x + 6\,, \\
\underline{-(\,x^3 - x^2\,)} \\
\quad -5x^2 + 11x \\
\quad \underline{-(-5x^2 + 5x\,)} \\
\qquad\quad 6x - 6 \\
\qquad\quad \underline{-(\,6x - 6\,)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

also $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)\cdot(x^2 - 5x + 6)$. Die Nullstellen von $x^2 - 5x + 6$ sind nach der *p, q–Formel* $x_{1,2} = -(-5/2) \pm \sqrt{(-5/2)^2 - 6} = 5/2 \pm 1/2$, d.h. $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Insgesamt erhält man so die folgende *Faktorisierung des Polynoms*: $f(x) = (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)$.

(4) Polynome 4. Grades können durch geeignete Transformationen auf kubische Funktionen zurückgeführt werden. Die Nullstellen sind daher prinzipiell analytisch zu bestimmen. Die Vorgehensweise verläuft analog zu (3).

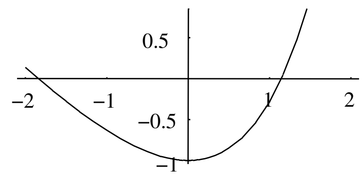
(5) Polynome 5. Grades und höher: Ihre Nullstellen sind i.a. nicht mehr analytisch zu bestimmen, sondern nur noch durch numerische Verfahren beliebig genau anzunähern. Einige solcher Verfahren werden gleich besprochen.

- Potenzfunktionen, Exponentialfunktionen, Logarithmusfunktionen, Trigonometrische Funktionen
  Die Nullstellen dieser Funktionen sind – sofern sie existieren – bekannt, vgl. Abschnitt 8.
- "Kombinierte" Funktionen
  Verknüpft man die bisher genannten elementaren Funktionen durch die vier Grundrechenarten bzw. durch Verkettung, so sind die Nullstellen solcher Funktionen i.a. nicht analytisch berechenbar, sondern können nur numerisch approximiert werden. Bsp.: $f(x) = e^x - x - 2$. Die Gleichung $e^x - x - 2 = 0$ lässt sich nicht nach x auflösen.

10.2 Exkurs: Numerisches Ermitteln von Nullstellen

Ausgangspunkt für die meisten Verfahren zur numerischen Approximation von Nullstellen ist ein vorzugebendes Intervall $[x_L, x_R]$, bei dem die Funktionswerte $f(x_L), f(x_R)$ der beiden Intervallgrenzen unterschiedliches Vorzeichen aufweisen. Bei stetigen Funktionen kann man dann sicher sein, dass im Intervall mindestens eine Nullstelle vorliegt.
Um ein solches Intervall angeben zu können, stellt man eine Wertetabelle auf. Für die Funktion $f(x) = e^x - x - 2$ beispielsweise zeigt die nachstehende Wertetabelle einen Vorzeichenwechsel zwischen –2 und –1 und zwischen 1 und 2. Im Intervall [–2, –1] und im Intervall [1, 2] muss also jeweils eine Nullstelle liegen (vgl. auch die Grafik).

x	–2	–1	0	1	2
$f(x)$	0,14	–0,63	–1	–0,28	3,39



Die prinzipielle Vorgehensweise aller Verfahren ist dann folgende:

(1) Bestimme im gegebenen Intervall eine Stelle z als Annäherung an die gesuchte Nullstelle. Weiter unten wird dargestellt, wie z in den einzelnen Verfahren zu berechnen ist.

(2) Berechne $f(z)$.
Besitzen $f(z)$ und $f(x_L)$ das gleiche Vorzeichen, so wird x_L durch z ersetzt.
Besitzen $f(z)$ und $f(x_R)$ das gleiche Vorzeichen, so wird x_R durch z ersetzt.
Die Intervallgröße verringert sich auf diese Weise.

(3) Überprüfe, ob die Nullstelle hinreichend genau bestimmt ist:
– Liegen die Funktionswerte im Intervall nahe genug bei 0, also z.B. $|f(x_L)| < 10^{-6}$ und $|f(x_R)| < 10^{-6}$?
– Ist das Intervall klein genug, also z.B. $x_R - x_L < 10^{-4}$?
Die Nullstelle kann so auf die gewünschte Anzahl von Nachkommastellen genau berechnet werden.
Sind beide Kriterien erfüllt, so endet das Verfahren. Ansonsten beginnt man wieder bei (1).

Es werden nun vier unterschiedliche Vorgehensweisen dargestellt, wie eine neue Annäherung z an die Nullstelle im gegebenen Intervall berechnet werden kann.

- *Bisektion*
  Wie der Name bereits andeutet, teilt man das Intervall in der Mitte, also $z = (x_R + x_L)/2$.
  Eigenschaften der Bisektion
  Vorteile: Einfach, robust, d.h. auch anwendbar bei "problematischen" Funktionen, Anzahl der benötigten Schritte zur Verkleinerung des Ausgangsintervalls auf eine bestimmte Größe kann direkt angegeben werden.
  Nachteil: Langsam, d.h. man benötigt relativ viele Schritte, um die Nullstelle hinreichend genau zu bestimmen.

- *Regula Falsi*, *Sekantenmethode*, *lineare Interpolation*
  Der neue Versuchspunkt z ergibt sich hier als Schnittpunkt der Verbindungslinie (Sekante) zwischen den beiden Punkten $(x_L, f(x_L))$, $(x_R, f(x_R))$ und der x-Achse. Lässt sich die Funktion f im betrachteten Intervall gut durch eine

Gerade annähern, so stellt auch der Schnittpunkt eine gute Approximation an die gesuchte Nullstelle von f dar.

Man rechnet leicht nach, dass $z = x_L - \dfrac{x_R - x_L}{f(x_R) - f(x_L)} \cdot f(x_L)$.

Eigenschaften des Regula Falsi: Vorteil: Relativ einfach, i.a. viel schneller als Bisektion.

Nachteil: Langsam, wenn die Funktion im gesamten Intervall stark gekrümmt ist.

- *Hyperbel Methode*

  Wählt man im Intervall $[\, x_L, x_R \,]$ einen neuen Versuchspunkt z, z.B. durch Bisektion oder Regula Falsi, so kann man durch die drei Punkte $(x_L, f(x_L)), (x_R, f(x_R)), (z, f(z))$ eine Hyperbel $h(x) = a + \dfrac{b}{x-c}$ legen und ihren Schnittpunkt mit der x-Achse berechnen. Dieses Prinzip führt letztlich dazu, dass aus den gegebenen 3 Punkten $(x_i, f(x_i))$ eine neue Stelle x_4 berechnet wird durch $x_4 = x_i - y_i \cdot \dfrac{y_j - y_k}{y_j \cdot s_{ik} - y_k \cdot s_{ij}}$ mit $y_i = f(x_i)$, $s_{ij} = \dfrac{y_i - y_j}{x_i - x_j}$, $i \neq j \neq k \neq i$.

  Nachdem $x_4, f(x_4)$ berechnet sind, werden aus den dann vorhandenen vier Punkten die drei "besten" ausgewählt.

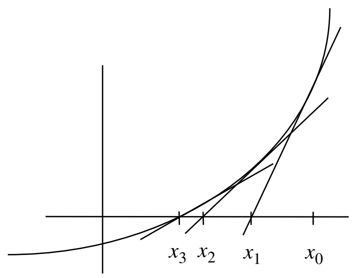
  Eigenschaften der Hyperbel Methode: Vorteil: Sehr schnelles Verfahren, i.a. viel schneller als Regula Falsi.

  Nachteil: Etwas rechenaufwendiger.

- *Newton-Verfahren*

  Im Gegensatz zu den bisher vorgestellten Verfahren verwendet das Newton-Verfahren die 1. Ableitung $f'(x)$ der Funktion $f(x)$. Außerdem wird i.a. keine Einschachtelung der Nullstelle vorausgesetzt, sondern man beginnt die Suche mit einem vorzugebenden Startwert x_0.

  Die erste Annäherung x_1 an die Nullstelle errechnet sich, indem man durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ eine Tangente an die Kurve legt und den Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse bestimmt. Die Steigung der Tangente ist $f'(x_0)$, ihre Geradengleichung $T(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$, ihr Schnittpunkt mit der x-Achse $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Analog erhält man eine zweite Annäherung x_2 als Schnittpunkt der Tangente an die Kurve durch $(x_1, f(x_1))$ mit der x-Achse: $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$. Es folgt $x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}$ und damit die

  allgemeine Iterationsformel $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Beispiele werden in der Analysis-Vorlesung gerechnet.

  Eigenschaften des Newton-Verfahrens: Vorteile: Sehr schnelles Verfahren, einfach anwendbar.

  Nachteil: $f'(x)$ muss bekannt sein (und sich einfach berechnen lassen); problematisch, wenn $f'(x_n) \approx 0$.

10.3 Nullstellen von Funktionen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, Lösen von nichtlinearen Gleichungen mit n Variablen

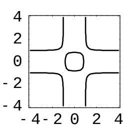
Bsp.: $f(x, y) = x^2 - y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = x^2$ Lösungsmenge: Parabel

$f(x, y) = -x^2 - y^2 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 4$ Lösungsmenge: Kreis

$f(x, y) = (x^2 - 1)\cdot(y^2 - 1) - 0{,}3 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x^2 - 1)\cdot(y^2 - 1) = 0{,}3$

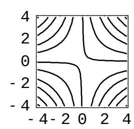
Lösungsmenge:



$f(x, y) = \sin(x\cdot y) - 0{,}2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin(x\cdot y) = 0{,}2$

Lösungsmenge:



An diesen Beispielen erkennt man, dass bereits die Lösungsmenge einer einfachen nichtlinearen Gleichung mit zwei Variablen ein komplexes Aussehen besitzen kann. Betrachtet man nun ein Gleichungssystem mit 2 nichtlinearen Gleichungen und 2 Variablen, so muss man den Durchschnitt der beiden Lösungsmengen bestimmen. Für die beiden Gleichungen $(x^2 - 1)\cdot(y^2 - 1) = 0{,}3$ und $\sin(x\cdot y) = 0{,}2$ bedeutet dies grafisch gesehen, die Schnittpunkte der Kurven aus den beiden Diagrammen zu ermitteln. Im Gegensatz zum linearen Fall (Schnitt von zwei Geraden) kann man im nichtlinearen Fall weder eine allgemeine Aussage über die Anzahl der Lösungen (Schnittpunkte der Kurven) machen, noch ein Verfahren zur analytischen Lösung solcher Systeme angeben. Nur in Ausnahmefällen kann eine Gleichung nach einer Variablen aufgelöst und in die andere(n) Gleichung(en) eingesetzt werden. Numerisch kann ein Lösungspunkt ermittelt werden, indem ein verallgemeinertes Newton-Verfahrens angewandt wird.