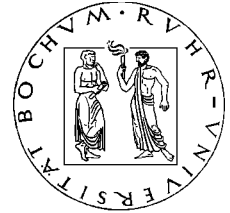


RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

Dr. Alfred Bischoff



# **AUFGABENSAMMLUNG ZUR LINEAREN ALGEBRA**

Diese Aufgabensammlung ist ausschließlich zum persönlichen Gebrauch der Teilnehmer meiner Veranstaltungen zur Mathematik für Ökonomen bestimmt

## 1. Vektoren

1.1 Berechnen Sie - falls definiert - die Ausdrücke unter (1) - (8) mit

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2.$$

- (1)  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{a} + \mathbf{b}'$ ,  $\mathbf{a}' + \mathbf{b}'$ ,  $\mathbf{b}' - \mathbf{a}'$ ,  $\mathbf{a} - \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{d}' - \mathbf{c}$  (2)  $\lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_1 \mathbf{b}$ ,  $\lambda_2 \mathbf{b} - \lambda_2 \mathbf{a}$ ,  $\lambda_1 \mathbf{c} + \lambda_2 \mathbf{c}$ ,  $\lambda_1 \mathbf{a} - \lambda_2 \mathbf{b}'$   
 (3)  $\mathbf{a}' \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a} \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a}' \mathbf{b}'$ ,  $\mathbf{a}' \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{d}' \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}' \mathbf{d}$ ,  $\mathbf{d}' \mathbf{c}$  (4)  $(\lambda_1 \mathbf{a})' \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a}' (\lambda_2 \mathbf{b})$ ,  $\lambda_1 \mathbf{a}' \mathbf{b} - \mathbf{c}' \mathbf{d}$   
 (5)  $\mathbf{a}' \mathbf{a} + 2 \mathbf{a}' \mathbf{b} + \mathbf{b}' \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a}' \mathbf{a} - 2 \mathbf{a}' \mathbf{b} + \mathbf{b}' \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a}' \mathbf{a} - \mathbf{b}' \mathbf{b}$  (6)  $|\mathbf{a}|$ ,  $|\mathbf{b} - \mathbf{a}|$ ,  $|\lambda_1 (\mathbf{b} - \mathbf{a})|$ ,  $|\lambda_2 (\mathbf{d} - \mathbf{c})|$   
 (7)  $|\mathbf{1}_n|$ ,  $|\mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{1}|$ ,  $|\mathbf{a} - \frac{\mathbf{a}' \mathbf{1}}{2} \mathbf{1}|$  (8)  $\bar{\mathbf{c}} = \frac{1}{3} \mathbf{c}' \mathbf{1}$ ,  $\mathbf{c}_z = \mathbf{c} - \bar{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{1}$ ,  $|\mathbf{c}_z|$ ,  $\mathbf{c}_s = \frac{1}{|\mathbf{c}_z|} \mathbf{c}_z$

1.2 Bestimmen Sie die Winkel  $\varphi_{\mathbf{a}, \mathbf{b}}$ ,  $\varphi_{\mathbf{a}, \mathbf{c}}$ ,  $\varphi_{\mathbf{b}, \mathbf{c}}$ ,  $\varphi_{2\mathbf{a}, 3\mathbf{b}}$ ,  $\varphi_{-\mathbf{a}, \mathbf{b}}$ ,  $\varphi_{-2\mathbf{a}, -3\mathbf{b}}$  zwischen den Vektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} !$$

1.3 Bestimmen Sie  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  so, dass  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$  paarweise orthogonal sind!

1.4 Sind folgende Vektoren linear abhängig?

- (1)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$  (2)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  (3)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$   
 (4)  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  (5)  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  (6)  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

1.5 Bilden Sie für  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  die äußeren Produkte

$$\mathbf{a} \mathbf{b}', \mathbf{b} \mathbf{a}', \mathbf{a} \mathbf{c}', \mathbf{c} \mathbf{a}', \mathbf{d} \mathbf{b}', \mathbf{d} \mathbf{c}', \mathbf{d} \mathbf{b}' - \mathbf{d} \mathbf{a}' - \mathbf{c} \mathbf{b}' + \mathbf{c} \mathbf{a}', \mathbf{1}_n \mathbf{c}', \mathbf{a} \mathbf{1}_n', \mathbf{1}_m \mathbf{1}_n', \mathbf{a} \mathbf{e}_i', \mathbf{e}_i \mathbf{b}'.$$

## 2. Matrizen

2.1 Berechnen Sie - falls definiert - die Ausdrücke (1) bis (14), wobei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

- (1)  $\mathbf{A}' \mathbf{A}$  (2)  $\mathbf{A} \mathbf{A}'$  (3)  $\mathbf{A}^2$  (4)  $\mathbf{A} \mathbf{B}$  (5)  $\mathbf{B} \mathbf{A}$   
 (6)  $\mathbf{A} \mathbf{C}$  (7)  $\mathbf{A}' \mathbf{C}$  (8)  $\mathbf{C} \mathbf{A}$  (9)  $\mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{A}$  (10)  $\mathbf{A} \mathbf{a}$   
 (11)  $\mathbf{b}' \mathbf{A} \mathbf{a}$  (12)  $\mathbf{a}' \mathbf{B} \mathbf{b}$  (13)  $\mathbf{a}' \mathbf{A}' \mathbf{A} \mathbf{a}$  (14)  $\mathbf{x}' \mathbf{C} \mathbf{x}$

2.2 Bestimmen Sie den Rang folgender Matrizen:

- (1)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$  (2)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$  (3)  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  (4)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

2.3 Bestimmen Sie Zahlen  $a, b, c \in \mathbb{R}$  so, dass für die Matrix  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & c \\ 1 & b & 0 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$  gilt:  $\mathbf{A}' \mathbf{A}$  ist eine Diagonalmatrix.

2.4 Bestimmen Sie die Matrix  $\mathbf{A}$  so, dass für  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{pmatrix}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $b \neq 0$  gilt:  $\mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ .

2.5 Bestimmen Sie Zahlen  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a + b + 1 = 0$  und  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

2.6 Bestimmen Sie eine Zahl  $a \in \mathbb{R}$  so, dass die Matrix  $\mathbf{A} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & a & a \\ a & 2 & a \\ a & a & 2 \end{pmatrix}$  idempotent ist.

- 2.7 Bestimmen Sie für  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  eine Zahl  $\lambda \in \mathbb{R}$  so, dass  $\mathbf{A} = \mathbf{a}\mathbf{b}'$  idempotent ist.
- 2.8 Bestimmen Sie für  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  eine Zahl  $a > 0$  so, dass  $\text{Spur}(\mathbf{A}\mathbf{b}\mathbf{b}'\mathbf{A}') = 11$  ist.
- 2.9 Bestimmen Sie für  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  eine Zahl  $a \in \mathbb{R}$  so, dass  $\text{Spur}(\mathbf{A}\mathbf{b}\mathbf{b}'\mathbf{A}') = \text{Spur}(\mathbf{A}^2)$  ist.
- 2.10 Bestimmen Sie für  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$  eine Zahl  $a \in \mathbb{R}$  so, dass  $\text{Spur}(\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}') = \text{Spur}(\mathbf{A}'\mathbf{A})$ .

2.11 Ein Unternehmen stellt aus den Rohstoffen  $R_i$  die Zwischenprodukte  $Z_j$  und daraus die Endprodukte  $E_k$  her. Die dazu benötigten Einsatzmengen, die Rohstoffkosten sowie das Produktionssoll liegen in Tabellenform vor.

(a) Stellen Sie die Angaben durch zwei Matrizen und zwei Vektoren dar.

Verwenden Sie *ausschließlich* diese Größen zur Beantwortung folgender Fragen:

- (b) Welche Rohstoffmengen sind zur Produktion je einer Mengeneinheit (ME) der Endprodukte  $E_k$  notwendig?
- (c) Wie hoch ist der Bedarf an Rohstoffen zur Fertigung des Produktionssolls?
- (d) Wie hoch sind die dabei insgesamt entstehenden Rohstoffkosten?

|     |       |       |       |       |                |                 |       |       |
|-----|-------|-------|-------|-------|----------------|-----------------|-------|-------|
| (1) |       | $Z_1$ | $Z_2$ | $Z_3$ | Rohstoffkosten |                 | $E_1$ | $E_2$ |
|     | $R_1$ | 1     | 0     | 2     | 2              | $Z_1$           | 1     | 1     |
|     | $R_2$ | 0     | 2     | 1     | 1              | $Z_2$           | 0     | 2     |
|     | $R_3$ | 2     | 1     | 0     | 1              | $Z_3$           | 2     | 0     |
|     | $R_4$ | 1     | 1     | 1     | 2              | Produktionssoll | 5     | 10    |

|     |       |       |       |       |                |                 |       |       |
|-----|-------|-------|-------|-------|----------------|-----------------|-------|-------|
| (2) |       | $Z_1$ | $Z_2$ | $Z_3$ | Rohstoffkosten |                 | $E_1$ | $E_2$ |
|     | $R_1$ | 1     | 1     | 1     | 1              | $Z_1$           | 1     | 1     |
|     | $R_2$ | 2     | 1     | 0     | 2              | $Z_2$           | 2     | 0     |
|     | $R_3$ | 0     | 2     | 1     | 2              | $Z_3$           | 0     | 2     |
|     | $R_4$ | 1     | 0     | 2     | 1              | Produktionssoll | 10    | 5     |

|     |       |       |       |       |                |                 |       |       |
|-----|-------|-------|-------|-------|----------------|-----------------|-------|-------|
| (3) |       | $Z_1$ | $Z_2$ | $Z_3$ | Rohstoffkosten |                 | $E_1$ | $E_2$ |
|     | $R_1$ | 1     | 0     | 2     | 1              | $Z_1$           | 1     | 3     |
|     | $R_2$ | 1     | 1     | 0     | 2              | $Z_2$           | 2     | 0     |
|     | $R_3$ | 0     | 1     | 1     | 2              | $Z_3$           | 1     | 3     |
|     | $R_4$ | 1     | 1     | 2     | 1              | Produktionssoll | 5     | 10    |

2.12 Ein Unternehmen stellt die Produkte  $P_i$  auf den Maschinen  $M_j$  her. Die dazu benötigten Zeiten, das Produktionssoll sowie die Kosten pro Maschinenstunde liegen in Tabellenform vor.

(a) Stellen Sie die Angaben durch eine Matrix und zwei Vektoren dar!

Verwenden Sie *ausschließlich* diese Größen zur Beantwortung folgender Fragen:

- (b) Welche Maschinenkosten verursacht die Fertigung je eines Stückes der Produkte  $P_i$ ?
- (c) Wie lange wird jede der Maschinen  $M_j$  zur Herstellung des Produktionssolls insgesamt eingesetzt?
- (d) Welche Maschinenkosten entstehen dabei insgesamt?

|     |                 |       |       |       |                 |                                                |
|-----|-----------------|-------|-------|-------|-----------------|------------------------------------------------|
| (1) |                 | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ | Produktionssoll |                                                |
|     | $P_1$           | 15    | 10    | 13    | 20              | ( Benötigte Zeiten in <u>Minuten</u> / Stück ) |
|     | $P_2$           | 10    | 10    | 16    | 30              |                                                |
|     | $P_3$           | –     | 10    | 22    | 10              |                                                |
|     | Maschinenkosten | 60    | 80    | 100   |                 |                                                |

|     |                 |       |       |       |                 |                                                |
|-----|-----------------|-------|-------|-------|-----------------|------------------------------------------------|
| (2) |                 | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ | Produktionssoll |                                                |
|     | $P_1$           | 30    | 25    | 22    | 30              |                                                |
|     | $P_2$           | 20    | 15    | 36    | 20              | ( Benötigte Zeiten in <u>Minuten</u> / Stück ) |
|     | $P_3$           | 20    | 45    | 12    | 10              |                                                |
|     | Maschinenkosten | 60    | 80    | 100   |                 |                                                |

|     |                 |       |       |       |       |                 |                                                |
|-----|-----------------|-------|-------|-------|-------|-----------------|------------------------------------------------|
| (3) |                 | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ | $M_4$ | Produktionssoll |                                                |
|     | $P_1$           | 1     | –     | 2     | 1     | 200             |                                                |
|     | $P_2$           | –     | 1     | –     | 2     | 100             | ( Benötigte Zeiten in <u>Stunden</u> / Stück ) |
|     | Maschinenkosten | 70    | 100   | 90    | 150   |                 |                                                |

|     |                 |       |       |       |                 |                                                |
|-----|-----------------|-------|-------|-------|-----------------|------------------------------------------------|
| (4) |                 | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ | Produktionssoll |                                                |
|     | $P_1$           | 5     | 0     | 10    | 12              |                                                |
|     | $P_2$           | 0     | 10    | 5     | 24              | ( Benötigte Zeiten in <u>Minuten</u> / Stück ) |
|     | $P_3$           | 12    | 0     | 0     | 15              |                                                |
|     | Maschinenkosten | 100   | 85    | 70    |                 |                                                |

2.13 Ein landwirtschaftlicher Betrieb baut die Fruchtarten  $F_i$  an. Dabei setzt er die Maschinen  $M_j$  ein. Die benötigten Zeiten (in Stunden / Hektar), die Anbaufläche (in Hektar) sowie die Maschinenkosten (in € / Stunde) liegen in Tabellenform vor.

- (a) Stellen Sie die Angaben durch eine Matrix und zwei Vektoren dar.  
Verwenden Sie *ausschließlich* diese Größen zur Beantwortung folgender Fragen:
- (b) Wie hoch sind die Kosten je Hektar Anbaufläche für die einzelnen Fruchtarten?
- (c) Wie lange wird jede der Maschinen  $M_j$  insgesamt eingesetzt?
- (d) Wie hoch sind die dabei entstehenden Gesamtkosten?

|     |                 |       |       |             |
|-----|-----------------|-------|-------|-------------|
| (1) |                 | $M_1$ | $M_2$ | Anbaufläche |
|     | $F_1$           | 7     | 2     | 2           |
|     | $F_2$           | 3     | 10    | 1           |
|     | $F_3$           | 1     | 2     | 3           |
|     | Maschinenkosten | 50    | 75    |             |

|     |                 |       |       |       |             |
|-----|-----------------|-------|-------|-------|-------------|
| (2) |                 | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ | Anbaufläche |
|     | $F_1$           | 3     | 2     | 1     | 20          |
|     | $F_2$           | 2     | 4     | 6     | 10          |
|     | Maschinenkosten | 50    | 100   | 150   |             |

|     |                 |       |       |       |             |
|-----|-----------------|-------|-------|-------|-------------|
| (3) |                 | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ | Anbaufläche |
|     | $F_1$           | 2     | 1     | 6     | 1           |
|     | $F_2$           | 0     | 5     | 4     | 2           |
|     | $F_3$           | 6     | 3     | 2     | 3           |
|     | Maschinenkosten | 60    | 80    | 100   |             |

2.14 In der Mensa werden an einem Tag 3 verschiedene Menus  $M_1, M_2, M_3$  angeboten. Die im wesentlichen benötigten Zutaten  $Z_1, \dots, Z_6$  (in kg / Menu), die Einkaufspreise der Zutaten (in € / kg) sowie die Anzahl ausgegebener Menus liegen in Tabellenform vor.

- (a) Stellen Sie die Angaben durch eine Matrix und zwei Vektoren dar.  
Verwenden Sie *ausschließlich* diese Größen zur Beantwortung folgender Fragen:
- (b) Wie hoch sind die Kosten der Zutaten pro Menu für  $M_1, M_2$  bzw.  $M_3$ ?
- (c) Welche Mengen an Zutaten  $Z_1, \dots, Z_6$  werden insgesamt zur Herstellung aller ausgegebenen Menus benötigt?
- (d) Wie hoch sind die dabei entstehenden Gesamtkosten für alle Zutaten?

|     |        |       |       |       |       |       |       |                    |
|-----|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------------------|
| (1) |        | $Z_1$ | $Z_2$ | $Z_3$ | $Z_4$ | $Z_5$ | $Z_6$ | Auszugebende Menus |
|     | $M_1$  | 0,2   | –     | –     | 0,1   | –     | 0,1   | 4000               |
|     | $M_2$  | –     | 0,1   | –     | –     | 0,2   | 0,1   | 2000               |
|     | $M_3$  | –     | –     | 0,1   | 0,1   | 0,2   | –     | 4000               |
|     | Preise | 1     | 2     | 2     | 8     | 4     | 3     |                    |

|     |        |       |       |       |       |       |       |                    |
|-----|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------------------|
| (2) |        | $Z_1$ | $Z_2$ | $Z_3$ | $Z_4$ | $Z_5$ | $Z_6$ | Auszugebende Menus |
|     | $M_1$  | 0,1   | –     | 0,2   | 0,2   | –     | –     | 2000               |
|     | $M_2$  | –     | 0,1   | –     | 0,1   | 0,2   | –     | 4000               |
|     | $M_3$  | 0,1   | –     | 0,1   | –     | –     | 0,2   | 4000               |
|     | Preise | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     |                    |

2.15 Ein Unternehmen stellt aus den Rohstoffen  $R_i$  die Zwischenprodukte  $Z_j$  her. Aus diesen Zwischenprodukten werden die Vorprodukte  $V_k$  erzeugt und daraus die Endprodukte  $E_1, E_2, E_3$ .

Die zur Herstellung benötigten Mengen sind in drei Tabellen zusammengefasst.

(a) Stellen Sie die Angaben durch drei Matrizen und einen Vektor dar.

Verwenden Sie zur Lösung der Teilaufgaben (b),(c),(d) *ausschließlich* diese Größen.

(b) Bestimmen Sie die Matrix des Rohstoffverbrauchs für die Vorprodukte  $V_k$ .

(c) Ermitteln Sie die Matrix des Rohstoffverbrauchs für die Endprodukte  $E_1, E_2, E_3$ .

(d) Wie hoch ist der Rohstoffbedarf zur Herstellung des Produktionssolls?

|     |       |       |       |       |       |                                                            |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| (1) |       | $Z_1$ | $Z_2$ | $Z_3$ | $Z_4$ |                                                            | $V_1$ | $V_2$ | $V_3$ | $V_4$ |       | $E_1$ | $E_2$ | $E_3$ |
|     | $R_1$ | 0     | 1     | 0     | 1     | $Z_1$                                                      | 3     | 1     | 1     | 2     | $V_1$ | 1     | 1     | 1     |
|     | $R_2$ | 1     | 0     | 0     | 1     | $Z_2$                                                      | 4     | 1     | 0     | 1     | $V_2$ | 1     | 1     | 2     |
|     | $R_3$ | 1     | 0     | 1     | 0     | $Z_3$                                                      | 0     | 0     | 1     | 1     | $V_3$ | 1     | 2     | 0     |
|     | $R_4$ | 0     | 1     | 1     | 0     | $Z_4$                                                      | 1     | 0     | 0     | 0     | $V_4$ | 1     | 0     | 0     |
|     | $R_5$ | 0     | 1     | 0     | 1     | Produktionssoll: 10 ME $E_1$ , 20 ME $E_2$ , 30 ME $E_3$ . |       |       |       |       |       |       |       |       |

|     |       |       |       |       |       |                                                            |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| (2) |       | $Z_1$ | $Z_2$ | $Z_3$ | $Z_4$ |                                                            | $V_1$ | $V_2$ | $V_3$ | $V_4$ |       | $E_1$ | $E_2$ | $E_3$ |
|     | $R_1$ | 1     | 0     | 1     | 0     | $Z_1$                                                      | 1     | 2     | 3     | 3     | $V_1$ | 1     | 3     | 0     |
|     | $R_2$ | 0     | 1     | 1     | 1     | $Z_2$                                                      | 0     | 1     | 2     | 1     | $V_2$ | 1     | 0     | 2     |
|     | $R_3$ | 1     | 0     | 0     | 1     | $Z_3$                                                      | 1     | 1     | 1     | 2     | $V_3$ | 0     | 1     | 1     |
|     | $R_4$ | 0     | 1     | 1     | 1     | $Z_4$                                                      | 1     | 1     | 1     | 2     | $V_4$ | 1     | 0     | 0     |
|     | $R_5$ | 1     | 0     | 1     | 0     | Produktionssoll: 10 ME $E_1$ , 20 ME $E_2$ , 20 ME $E_3$ . |       |       |       |       |       |       |       |       |

2.16 Ein Weihnachtsmann steht vor der Aufgabe, einige ausgesuchte Haushalte aus vier Ländern  $L_1, L_2, L_3, L_4$  mit Gabentellern zu versorgen. Der Gabenteller setzt sich aus Früchten  $F$ , Nüssen  $N$  und Süßigkeiten  $S$  zusammen.

Die von Land zu Land unterschiedliche Zusammensetzung (in kg / Teller), die Anzahl der zu beliefernden Haushalte sowie die Einkaufspreise der Zutaten (in € / kg) liegen in Tabellenform vor.

(a) Stellen Sie die obigen Angaben durch eine Matrix und zwei Vektoren dar.

Verwenden Sie *ausschließlich* diese Größen zur Beantwortung folgender Fragen:

(b) Wie viele kg Früchte, Nüsse bzw. Süßigkeiten werden zur Versorgung aller Haushalte insgesamt benötigt?

(c) Welche Kosten pro Gabenteller entstehen in jedem der vier Länder?

(d) Wie hoch sind die Gesamtkosten zur Versorgung aller Haushalte?

|     |                  |       |       |       |       |                |
|-----|------------------|-------|-------|-------|-------|----------------|
| (1) |                  | $L_1$ | $L_2$ | $L_3$ | $L_4$ | Einkaufspreise |
|     | $F$              | 0,2   | 0,4   | –     | 0,6   | 5              |
|     | $N$              | 0,1   | –     | 0,1   | 0,1   | 10             |
|     | $S$              | 0,2   | 0,1   | 0,3   | –     | 20             |
|     | Anzahl Haushalte | 100   | 50    | 50    | 50    |                |

|     |                  |       |       |       |       |                |
|-----|------------------|-------|-------|-------|-------|----------------|
| (2) |                  | $L_1$ | $L_2$ | $L_3$ | $L_4$ | Einkaufspreise |
|     | $F$              | 0,4   | 0,3   | 0,4   | 0,5   | 5              |
|     | $N$              | 0,3   | 0,2   | 0,2   | 0,1   | 10             |
|     | $S$              | –     | 0,1   | 0,2   | 0,1   | 15             |
|     | Anzahl Haushalte | 50    | 50    | 50    | 50    |                |

2.17 Ein Unternehmen verkauft die Maschinen  $M_i$  in die Länder  $L_j$ . Die Absätze pro Land und Maschine (in Stück) sowie die Verkaufspreise der Maschinen (in T€ / Stück) liegen in Tabellenform vor.

(a) Stellen Sie die Angaben durch eine Matrix und einen Vektor dar.

Verwenden Sie *ausschließlich* die Matrix-Vektor-Schreibweise zur Beantwortung folgender Fragen:

(b) Welche Umsatzerlöse werden in jedem Land erzielt?

(c) Wie hoch ist der Absatz für jede Maschine?

(d) Welchen Gesamtumsatz erwirtschaftet das Unternehmen?

|     |                |       |       |       |
|-----|----------------|-------|-------|-------|
| (1) |                | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ |
|     | $L_1$          | 7     | 2     | 3     |
|     | $L_2$          | 10    | 5     | 0     |
|     | $L_3$          | 7     | 5     | 1     |
|     | $L_4$          | 11    | 3     | 1     |
|     | Verkaufspreise | 5     | 10    | 15    |

|     |                |       |       |       |       |
|-----|----------------|-------|-------|-------|-------|
| (2) |                | $M_1$ | $M_2$ | $M_3$ | $M_4$ |
|     | $L_1$          | 3     | 1     | 1     | 3     |
|     | $L_2$          | 9     | 2     | 1     | 1     |
|     | $L_3$          | 3     | 2     | 3     | 1     |
|     | Verkaufspreise | 10    | 20    | 30    | 40    |

2.18 Ein Unternehmen stellt die Produkte  $P_1, P_2, P_3$  auf den Maschinen  $M_1, M_2$  her. Die Herstellung kann an zwei alternativen Standorten  $S_1, S_2$  mit unterschiedlichen Produktionskosten erfolgen. Die Fertigungszeiten pro Maschine (in Stunden/ Stück), das Produktionssoll sowie die Kosten pro Maschinenstunde an den beiden Standorten liegen in Tabellenform vor:

| Produktionszeiten | $M_1$ | $M_2$ | Produktionssoll | Maschinenkosten | $S_1$ | $S_2$ |
|-------------------|-------|-------|-----------------|-----------------|-------|-------|
| $P_1$             | 1     | 1     | 40              | $M_1$           | 50    | 75    |
| $P_2$             | 0     | 2     | 30              | $M_2$           | 100   | 75    |
| $P_3$             | 2     | 0     | 30              |                 |       |       |

(a) Stellen Sie die Angaben durch zwei Matrizen und einen Vektor dar.

Verwenden Sie *ausschließlich* diese Größen zur Lösung der Teilaufgaben (b),(c),(d).

(b) Ermitteln Sie die Matrix  $\mathbf{K}$  der Fertigungskosten ( $k_{ij}$  = Fertigungskosten von Produkt  $P_i$  am Standort  $S_j$ ).

(c) Wie lange wird jede der Maschinen  $M_1, M_2$  zur Herstellung des Produktionssolls insgesamt eingesetzt?

(d) Welche Gesamtkosten entstünden dabei an jedem der beiden Standorte?

### 3. Blockmatrizen

3.1 Bestimmen Sie für  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ , eine Zahl  $\lambda \in \mathbb{R}$  so, dass  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a & a \\ \lambda \cdot b & b \end{pmatrix}$  idempotent ist.

**Tipp:** Stellen Sie  $\mathbf{M}$  als äußeres Produkt zweier Vektoren dar.

3.2 Sei  $\mathbf{M} = (\mathbf{v}, -\mathbf{v}, \mathbf{v})$ ,  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ,  $|\mathbf{v}| = 1$ . Bestimmen Sie  $(\mathbf{M}' \mathbf{M})^5$ .

3.3 Berechnen Sie für  $\mathbf{M}$  die Matrix  $\mathbf{M}^{10}$ . **Tipp:** Partitionieren Sie  $\mathbf{M}$ .

$$(1) \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(3) \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) \mathbf{M} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

3.4 Berechnen Sie für  $\mathbf{Z} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}$  die Potenzen  $\mathbf{Z}^4 = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z}$  und  $\mathbf{Z}^5 = \mathbf{Z}^4 \cdot \mathbf{Z}$ .

Dabei ist  $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

3.5  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$  sei eine partitionierte 6×6-Matrix mit  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{0}$ -Matrizen der Ordnung 2×2.

$\mathbf{I}$  sei die Einheitsmatrix der Ordnung 6×6. Bestimmen Sie  $(\mathbf{I} - \mathbf{M})^{10}$ .

3.6 Berechnen Sie für die Matrix  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  die Potenzen  $\mathbf{M}^2$ ,  $\mathbf{M}^3$  und  $\mathbf{M}^4$ .

3.7  $\mathbf{M}$  sei eine partitionierte Matrix mit Untermatrizen gleicher Ordnung. Bestimmen Sie  $\mathbf{M}^4$  und  $\mathbf{M}^5$ .

(1)  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$  (2)  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$  (3)  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & -\mathbf{I} \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{A}$  idempotent

3.8  $\mathbf{M}$  sei eine partitionierte Matrix mit orthonormaler Untermatrix  $\mathbf{A}$ . Bestimmen Sie  $(\mathbf{M}'\mathbf{M})^3$ .

(1)  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}' & \mathbf{0} \end{pmatrix}$  (2)  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{A} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$  (3)  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{I} & \mathbf{A} \end{pmatrix}$  (4)  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{A} \end{pmatrix}$

## 4. Gauß-Algorithmus

Während der Durchführung des Gauß-Algorithmus bei verschiedenen linearen Gleichungssystemen ergeben sich die folgenden Darstellungen. Geben Sie jeweils die Lösungsmenge des Gleichungssystems an, ggf. in Parameterform !

|       | (a)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | (b)   | (c)   |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|-------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|------|---|---|---|---|---|----|---|---|---|---|---|---|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|------|---|---|----|---|---|---|---|---|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|------|---|---|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1)   | <table> <tr><th><math>x_1</math></th><th><math>x_2</math></th><th><math>x_3</math></th><th>r.S.</th></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>2</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>3</td></tr> </table>                                                   | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | r.S. | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1  | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | 3 | <table> <tr><th><math>x_1</math></th><th><math>x_2</math></th><th><math>x_3</math></th><th>r.S.</th></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>-3</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>-2</td><td>2</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table> | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | r.S.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 1     | 0     | -3    | 1    | 0 | 1 | -2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | <table> <tr><th><math>x_1</math></th><th><math>x_2</math></th><th><math>x_3</math></th><th>r.S.</th></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>-3</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>-2</td><td>2</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> </table> | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | r.S. | 1 | 0 | -3 | 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0     | 1     | -2    | 2    | 0 | 0 | 0 | 1 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| $x_1$ | $x_2$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | $x_3$ | r.S.  |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 1     | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0     | 1     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 0     | 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0     | 2     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 0     | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 1     | 3     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| $x_1$ | $x_2$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | $x_3$ | r.S.  |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 1     | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | -3    | 1     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 0     | 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | -2    | 2     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 0     | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0     | 0     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| $x_1$ | $x_2$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | $x_3$ | r.S.  |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 1     | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | -3    | 1     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 0     | 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | -2    | 2     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 0     | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0     | 1     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| (2)   | <table> <tr><th><math>x_1</math></th><th><math>x_2</math></th><th><math>x_3</math></th><th>r.S.</th></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>0</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>8</td></tr> </table>                                                   | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | r.S. | 1 | 2 | 3 | 4 | 0 | 5  | 6 | 7 | 0 | 0 | 0 | 8 | <table> <tr><th><math>x_3</math></th><th><math>x_2</math></th><th><math>x_1</math></th><th>r.S.</th></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>3</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>2</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>2</td></tr> </table>   | $x_3$ | $x_2$ | $x_1$ | r.S.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 1     | 0     | 0     | 3    | 0 | 1 | 0  | 2 | 0 | 0 | 2 | 2 | <table> <tr><th><math>x_1</math></th><th><math>x_3</math></th><th><math>x_2</math></th><th>r.S.</th></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>-1</td><td>2</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>-1</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table> | $x_1$ | $x_3$ | $x_2$ | r.S. | 1 | 0 | -1 | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0     | 1     | -1    | 1    | 0 | 0 | 0 | 0 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| $x_1$ | $x_2$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | $x_3$ | r.S.  |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 1     | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 3     | 4     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 0     | 5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 6     | 7     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 0     | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0     | 8     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| $x_3$ | $x_2$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | $x_1$ | r.S.  |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 1     | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0     | 3     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 0     | 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0     | 2     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 0     | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 2     | 2     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| $x_1$ | $x_3$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | $x_2$ | r.S.  |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 1     | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | -1    | 2     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 0     | 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | -1    | 1     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 0     | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0     | 0     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| (3)   | <table> <tr><th><math>x_1</math></th><th><math>x_2</math></th><th><math>x_3</math></th><th>r.S.</th></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td></tr> <tr><td>0</td><td>-2</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>                                                  | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | r.S. | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | -2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | <table> <tr><th><math>x_1</math></th><th><math>x_2</math></th><th><math>x_3</math></th><th>r.S.</th></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>3</td><td>4</td><td>2</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>3</td></tr> </table>   | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | r.S.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 1     | 2     | 3     | 1    | 0 | 3 | 4  | 2 | 0 | 0 | 0 | 3 | <table> <tr><th><math>x_1</math></th><th><math>x_2</math></th><th><math>x_3</math></th><th>r.S.</th></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>0</td><td>2</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>5</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr> </table>   | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | r.S. | 1 | 2 | 0  | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0     | 1     | 2     | 5    | 0 | 0 | 1 | 2 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| $x_1$ | $x_2$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | $x_3$ | r.S.  |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 1     | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0     | 2     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 0     | -2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 1     | 0     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 0     | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0     | 0     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| $x_1$ | $x_2$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | $x_3$ | r.S.  |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 1     | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 3     | 1     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 0     | 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 4     | 2     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 0     | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0     | 3     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| $x_1$ | $x_2$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | $x_3$ | r.S.  |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 1     | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0     | 2     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 0     | 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 2     | 5     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 0     | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 1     | 2     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| (4)   | <table> <tr><th><math>x_1</math></th><th><math>x_2</math></th><th><math>x_3</math></th><th>r.S.</th></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td></tr> </table>                                                   | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | r.S. | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1  | 2 | 1 | 0 | 2 | 4 | 3 | <table> <tr><th><math>x_1</math></th><th><math>x_3</math></th><th><math>x_2</math></th><th>r.S.</th></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>2</td><td>4</td><td>2</td></tr> </table>   | $x_1$ | $x_3$ | $x_2$ | r.S.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 1     | 0     | 0     | 1    | 0 | 1 | 2  | 1 | 0 | 2 | 4 | 2 | <table> <tr><th><math>x_1</math></th><th><math>x_2</math></th><th><math>x_3</math></th><th>r.S.</th></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>2</td><td>5</td><td>3</td></tr> </table>   | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | r.S. | 1 | 0 | 0  | 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0     | 1     | 2     | 1    | 0 | 2 | 5 | 3 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| $x_1$ | $x_2$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | $x_3$ | r.S.  |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 1     | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0     | 1     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 0     | 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 2     | 1     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 0     | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 4     | 3     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| $x_1$ | $x_3$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | $x_2$ | r.S.  |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 1     | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0     | 1     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 0     | 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 2     | 1     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 0     | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 4     | 2     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| $x_1$ | $x_2$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | $x_3$ | r.S.  |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 1     | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0     | 1     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 0     | 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 2     | 1     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 0     | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 5     | 3     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| (5)   | <table> <tr><th><math>x_1</math></th><th><math>x_2</math></th><th><math>x_3</math></th><th>r.S.</th></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>2</td></tr> <tr><td>0</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>0</td><td>3</td><td>2</td><td>4</td></tr> </table> | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | r.S. | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1  | 0 | 2 | 0 | 2 | 1 | 3 | 0                                                                                                                                                                                                                                                                          | 3     | 2     | 4     | <table> <tr><th><math>x_1</math></th><th><math>x_2</math></th><th><math>x_3</math></th><th>r.S.</th></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>2</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td></tr> </table> | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | r.S. | 1 | 0 | 0  | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0     | 1     | 3     | 0    | 0 | 2 | 4  | <table> <tr><th><math>x_1</math></th><th><math>x_2</math></th><th><math>x_3</math></th><th>r.S.</th></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>0</td><td>2</td><td>2</td><td>4</td></tr> <tr><td>0</td><td>3</td><td>3</td><td>6</td></tr> </table> | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | r.S. | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 0 | 2 | 2 | 4 | 0 | 3 | 3 | 6 |
| $x_1$ | $x_2$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | $x_3$ | r.S.  |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 1     | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0     | 1     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 0     | 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0     | 2     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 0     | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 1     | 3     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 0     | 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 2     | 4     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| $x_1$ | $x_2$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | $x_3$ | r.S.  |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 1     | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0     | 1     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 0     | 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0     | 2     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 0     | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 1     | 3     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 0     | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 2     | 4     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| $x_1$ | $x_2$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | $x_3$ | r.S.  |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 1     | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0     | 1     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 0     | 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 1     | 2     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 0     | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 2     | 4     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 0     | 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 3     | 6     |       |      |   |   |   |   |   |    |   |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |   |   |   |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |       |       |       |      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |



|      |       |       |       |      |       |       |       |      |       |       |       |      |
|------|-------|-------|-------|------|-------|-------|-------|------|-------|-------|-------|------|
| (19) | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | r.S. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | r.S. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | r.S. |
|      | 1     | 1     | 1     | 6    | 1     | 1     | 1     | 6    | 1     | 1     | 1     | 6    |
|      | 2     | 3     | 3     | 16   | 2     | 3     | 3     | 16   | 2     | 3     | 3     | 16   |
|      | 1     | 2     | 2     | 11   | 3     | 3     | 5     | 22   | 4     | 5     | 5     | 28   |
| (20) | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | r.S. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | r.S. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | r.S. |
|      | 1     | 1     | 1     | 6    | 1     | 1     | 1     | 6    | 1     | 1     | 1     | 6    |
|      | 2     | 2     | 3     | 14   | 2     | 2     | 3     | 14   | 2     | 2     | 3     | 14   |
|      | 3     | 5     | 5     | 26   | 3     | 3     | 4     | 21   | 5     | 5     | 7     | 34   |
| (21) | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | r.S. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | r.S. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | r.S. |
|      | 1     | 2     | 3     | 10   | 1     | 2     | 3     | 10   | 1     | 2     | 3     | 10   |
|      | 2     | 1     | 3     | 11   | 2     | 1     | 3     | 11   | 2     | 1     | 3     | 11   |
|      | 1     | 0     | 1     | 1    | 4     | 5     | 9     | 31   | 3     | 2     | 1     | 14   |
| (22) | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | r.S. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | r.S. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | r.S. |
|      | 3     | 2     | 1     | 7    | 3     | 2     | 1     | 7    | 3     | 2     | 1     | 7    |
|      | 2     | 3     | 0     | 8    | 2     | 1     | 2     | 3    | 0     | 1     | -4    | 2    |
|      | 1     | 0     | 3     | 1    | 1     | 0     | 3     | 1    | 1     | 0     | 3     | 1    |
| (23) | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | r.S. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | r.S. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | r.S. |
|      | -8    | 1     | 2     | 5    | -8    | 1     | 2     | 5    | -8    | 1     | 2     | 5    |
|      | -7    | 2     | 1     | 4    | -7    | 2     | 1     | 4    | -7    | 2     | 1     | 4    |
|      | -3    | 0     | 1     | 0    | 0     | 1     | 2     | 5    | -5    | 1     | 1     | 3    |

## 5. Lineare Gleichungssysteme

- 5.1 Die zur Herstellung einer Mengeneinheit (ME) der Produkte  $P_1, P_2, P_3$  benötigten Rohstoffe  $R_1, R_2, R_3, R_4$  sowie die einzusetzenden Mengen dieser Rohstoffe sind in nachstehender Tabelle zusammengefasst.

Wie viele Produkte  $P_1, P_2, P_3$  können damit gefertigt werden?

|       | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | Einzusetzende Rohstoffmengen |
|-------|-------|-------|-------|------------------------------|
| $R_1$ | 1     | 0     | 2     | 50                           |
| $R_2$ | 0     | 2     | 1     | 50                           |
| $R_3$ | 2     | 1     | 0     | 80                           |
| $R_4$ | 1     | 1     | 1     | 60                           |

- 5.2 Die Produkte  $P_i$  eines Unternehmens werden in den Ländern  $L_j$  verkauft. Die geplanten Verkaufsmengen für jedes Produkt und Land sowie die geplanten Umsätze in den Ländern liegen in Tabellenform vor.

Wie hoch müssen die Preise  $p_i$  für die Produkte gewählt werden, damit die Umsatzziele in den einzelnen Ländern erreicht werden?

|     |       |       |       |       |                  |     |       |       |       |       |                  |
|-----|-------|-------|-------|-------|------------------|-----|-------|-------|-------|-------|------------------|
| (1) |       | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | Geplanter Umsatz | (2) |       | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | Geplanter Umsatz |
|     | $L_1$ | 1     | 1     | 1     | 60               |     | $L_1$ | 1     | 1     | 1     | 60               |
|     | $L_2$ | 2     | 1     | 3     | 120              |     | $L_2$ | 2     | 3     | 4     | 200              |
|     | $L_3$ | 3     | 2     | 1     | 120              |     | $L_3$ | 3     | 5     | 3     | 220              |
|     |       |       |       |       |                  |     | $L_4$ | 4     | 6     | 4     | 280              |

- 5.3 Die Hilfsabteilungen  $N_i$  geben an die Hauptabteilungen  $H_j$  Leistungen ab, "beliefern" sich aber auch gegenseitig. Die Höhe dieses Leistungstransfers (gemessen in Leistungseinheiten (LE)) sowie die in den Hilfsabteilungen angefallenen primären Kosten liegen in Tabellenform vor.

- (a) Bestimmen Sie die Verrechnungspreise in €/LE für jede der Abteilungen  $N_i$  !  
 (b) Verteilen Sie die primären Gesamtkosten auf die Hauptabteilungen  $H_j$  !

|               |       | Empfänger |       |       |       |       | Primärkosten |
|---------------|-------|-----------|-------|-------|-------|-------|--------------|
|               |       | $N_1$     | $N_2$ | $N_3$ | $H_1$ | $H_2$ |              |
| (1) Lieferant | $N_1$ | -         | 4     | 5     | 15    | 6     | 240          |
|               | $N_2$ | 3         | -     | 5     | 12    | 20    | 320          |
|               | $N_3$ | 3         | 4     | -     | 18    | 25    | 400          |

|               |       | Empfänger |       |       |       |       | Primärkosten |
|---------------|-------|-----------|-------|-------|-------|-------|--------------|
|               |       | $N_1$     | $N_2$ | $N_3$ | $H_1$ | $H_2$ |              |
| (2) Lieferant | $N_1$ | -         | 3     | 4     | 5     | 8     | 130          |
|               | $N_2$ | 2         | -     | 4     | 10    | 14    | 360          |
|               | $N_3$ | 2         | 3     | -     | 15    | 20    | 700          |

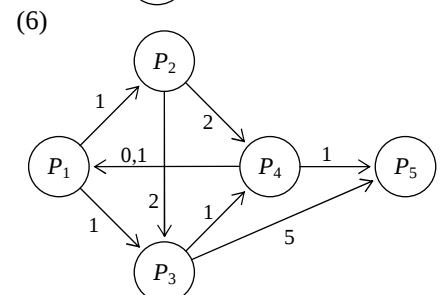
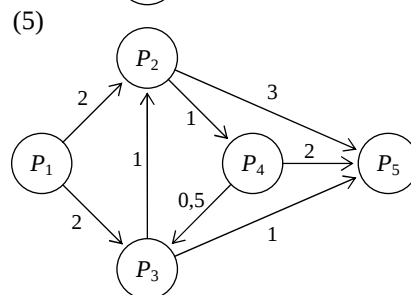
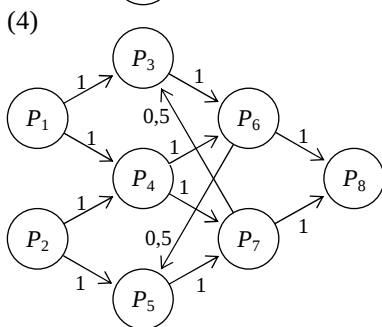
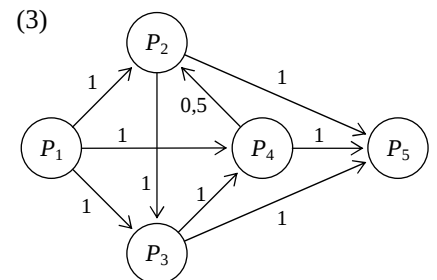
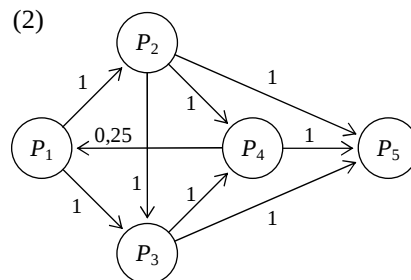
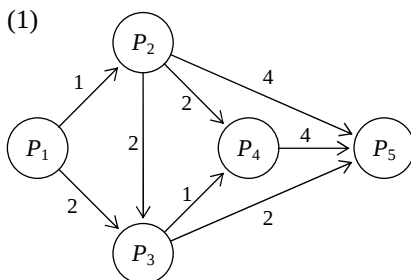
|               |       | Empfänger |       |       |       |       | Primärkosten |
|---------------|-------|-----------|-------|-------|-------|-------|--------------|
|               |       | $N_1$     | $N_2$ | $N_3$ | $H_1$ | $H_2$ |              |
| (3) Lieferant | $N_1$ | -         | 5     | 6     | 4     | 5     | 240          |
|               | $N_2$ | 4         | -     | 6     | 6     | 9     | 300          |
|               | $N_3$ | 4         | 5     | -     | 10    | 11    | 360          |

|               |       | Empfänger |       |       |       |       | Primärkosten |
|---------------|-------|-----------|-------|-------|-------|-------|--------------|
|               |       | $N_1$     | $N_2$ | $N_3$ | $H_1$ | $H_2$ |              |
| (4) Lieferant | $N_1$ | -         | 0     | 10    | 7     | 3     | 250          |
|               | $N_2$ | 5         | -     | 10    | 4     | 6     | 350          |
|               | $N_3$ | 0         | 10    | -     | 1     | 9     | 300          |

|               |       | Empfänger |       |       |       |       | Primärkosten |
|---------------|-------|-----------|-------|-------|-------|-------|--------------|
|               |       | $N_1$     | $N_2$ | $N_3$ | $H_1$ | $H_2$ |              |
| (5) Lieferant | $N_1$ | -         | 3     | 2     | 7     | 8     | 360          |
|               | $N_2$ | 4         | -     | 2     | 4     | 5     | 450          |
|               | $N_3$ | 4         | 3     | -     | 2     | 1     | 420          |

5.4 Ein Produkt  $P_n$  wird über Zwischenprodukte  $P_1, \dots, P_{n-1}$  hergestellt. Der Produktionsprozess ist durch einen Gozintografen dargestellt. Wie viele Mengeneinheiten (ME)  $P_1, \dots, P_{n-1}$  werden zur Herstellung einer ME  $P_n$  benötigt?

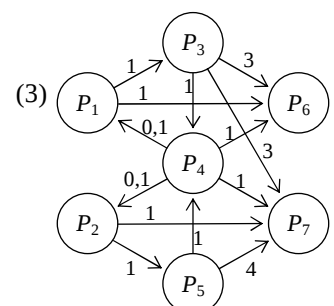
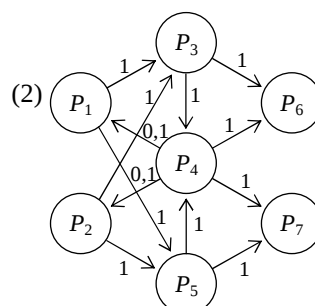
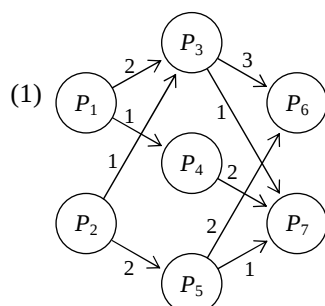
**Hinweis:** Die Zahl 4 an dem Pfeil von  $P_4$  nach  $P_5$  in (1) bedeutet beispielsweise, dass zur Produktion einer ME  $P_5$  vier ME  $P_4$  benötigt werden.



5.5 Die Produkte  $P_6, P_7$  werden aus Rohstoffen  $P_1, P_2$  über Zwischenprodukte  $P_3, P_4, P_5$  gefertigt.

Der Produktionsprozess ist durch einen Gozintografen dargestellt.

Wie viele ME  $P_1, \dots, P_5$  werden zur Herstellung von 10 ME  $P_6$  und 10 ME  $P_7$  insgesamt benötigt?



## 6. Inverse einer Blockmatrix

Für eine Matrix  $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$  gilt:  $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} (I + A_{12} C^{-1} A_{21} A_{11}^{-1}) & -A_{11}^{-1} A_{12} C^{-1} \\ -C^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix}$ .

Dazu müssen sowohl die Untermatrix  $A_{11}$  als auch die Hilfsmatrix  $C = A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}$  regulär sein.

Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Formel die Inverse  $A^{-1}$  der folgenden Matrizen  $A$ .

- (1)  $A = \begin{pmatrix} B & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B$  regulär
- (2)  $A = \begin{pmatrix} B & u \\ u' & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- (3)  $A = M'M$ ,  $M = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ ,  $B$  regulär
- (4)  $A = B'B$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- (5)  $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ I & B^{-1} \end{pmatrix}$
- (6)  $A = \begin{pmatrix} I & B \\ I & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B$  regulär
- (7)  $A = \begin{pmatrix} I & I \\ I & I+B \end{pmatrix}$ ,  $B$  regulär
- (8)  $A = \begin{pmatrix} B^{-1} & I \\ I & B-I \end{pmatrix}$
- (9)  $A = \begin{pmatrix} B & B \\ B & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B$  regulär
- (10)  $A = \begin{pmatrix} I & I \\ 2I & 3I \end{pmatrix}$
- (11)  $A = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ B-I & B^2 \end{pmatrix}$
- (12)  $A = \begin{pmatrix} B & u \\ u' & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $u = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- (13)  $A = \begin{pmatrix} D & u \\ u' & 7 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- (14)  $A = \begin{pmatrix} B & B^3 \\ B^{-1} & B-I \end{pmatrix}$
- (15)  $A = \begin{pmatrix} B^{-1} & B^{-3} \\ B & 2B^{-1} \end{pmatrix}$
- (16)  $A = \begin{pmatrix} B & B^2 \\ I & B+I \end{pmatrix}$
- (17)  $A = \begin{pmatrix} B^{-1} & I \\ 2B^{-1}+I & B+I \end{pmatrix}$

## 7. Determinanten

7.1 Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen:

- (1)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
- (2)  $4 \cdot A$ ,  $B'$ ,  $B^{-1}$ ,  $A \cdot B$ ,  $(B'B)^{-1}$ ,  $A^{-1} \cdot B \cdot A$ ,  $B'AC$
- (3)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
- (4)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- (5)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & 9 & 12 \\ 4 & 5 & 13 & 15 \end{pmatrix}$

7.2 – 7.19 Bestimmen Sie eine Zahl  $a$  ( $b, c$ )  $\in \mathbb{R}$  so, dass die gegebenen Bedingungen erfüllt sind:

7.2  $\left| \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right| = 8$ ,  $a > 0$

7.3  $A = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $(A+B)(A-B) = (A-B)(A+B)$ ,  $|A| = 1$

7.4  $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ ,  $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $v'M'DMv = 0$ ,  $|D| = -1$ ,  $a > 0$

7.5  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $|(aA)^{-1}| = 8$

7.6  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ ,  $|A^2| = 64$ ,  $A$  positiv definit

7.7  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 3 \\ a & 2 & 2 & 3 \\ a & 3 & 3 & 4 \\ a & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ ,  $\text{Spur}(A) = |A|$

7.8  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ ,  $|A^{-1}| = |A|$ ,  $A$  positiv definit

7.9  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $|A \cdot B \cdot A^{-1}| = \text{Spur}(B)$

7.10  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ ,  $\text{Spur}(A'DA) = |A'DA|$

$$7.11 \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad |(\mathbf{A}'\mathbf{B}\mathbf{A})^{-1}| = \text{Spur}\left(\frac{1}{a}\mathbf{B}\right)$$

$$7.12 \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{A}'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}| = 3, \quad a > 0$$

$$7.13 \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{A}| = 4, \quad \mathbf{A} \text{ positiv definit}$$

$$7.14 \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad |(a\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}| = \frac{1}{8}$$

$$7.15 \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{A}^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}| = \text{Spur}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A})$$

$$7.16 \quad (1) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & a \end{pmatrix} \quad (2) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & -5 & 6 & -8 \\ -3 & 6 & -10 & 12 \\ 4 & -8 & 12 & a \end{pmatrix} \quad (a) |\mathbf{A}| = 1 \quad (b) \text{ Welche Aussage lässt sich dann über die Definitheit von } \mathbf{A} \text{ treffen? (Begründung!)}$$

$$7.17 \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & a-1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 5 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| = |\mathbf{B}'\mathbf{B}| \quad 7.19 \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 0 & a & a \\ a & 0 & a \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{A}^{-1}| \cdot \text{Spur}(\mathbf{A}'\mathbf{A}) = 1$$

$$7.18 \quad \text{Existieren reelle Zahlen } a, b, c, u, v, \text{ so dass die Matrix } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & a+u & a+v \\ b & b+u & b+v \\ c & c+u & c+v \end{pmatrix} \text{ regulär wird? (Begründung!)}$$

## 8. L-R-Zerlegung

8.1 Die L-R-Zerlegung  $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{R}$  einer quadratischen Matrix  $\mathbf{A}$  ist vorgegeben. Berechnen Sie

(a) die Determinante von  $\mathbf{A}$ , (b) die Lösung des linearen Gleichungssystems  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ !

$$(1) \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(2) \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$(3) \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$(4) \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 13 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$(5) \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$(6) \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$$(7) \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 22 \\ 47 \end{pmatrix}$$

$$(8) \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$(9) \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(10) \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$(11) \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$(12) \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$(13) \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$(14) \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(15) \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$(16) \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$(17) \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$(18) \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$(19) \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 16 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix} \quad (20) \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{R} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

8.2 Für eine quadratische Matrix  $\mathbf{A}$  gilt die Zerlegung  $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}'$ . Berechnen Sie

- (a) die Determinante von  $\mathbf{A}$ , (b) die Lösung des linearen Gleichungssystems  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

$$(1) \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (2) \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 18 \\ 19 \end{pmatrix}$$

## 9. Inverse Matrizen

9.1 Bestimmen Sie, falls existent, die Inversen der Matrizen.

$$(1) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (2) 4 \cdot \mathbf{A}, \mathbf{B}', \mathbf{B}^{-1}, \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \mathbf{B}' \mathbf{B}, \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}, \mathbf{B}' \mathbf{A} \mathbf{C}$$

$$(3) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (4) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(5) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9.2 Für eine quadratische Matrix  $\mathbf{A}$  gilt die Zerlegung  $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}'$  mit  $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

Berechnen Sie (a) die Inverse  $\mathbf{L}^{-1}$  von  $\mathbf{L}$ , (b) die Inverse  $\mathbf{A}^{-1}$  von  $\mathbf{A}$ .

9.3 Bestimmen Sie für  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2a \\ 3 \end{pmatrix}$  eine Zahl  $a \in \mathbb{R}$  so,

dass  $\text{Spur}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{A}^{-1}) = |\mathbf{D}^{-1} \mathbf{v}|$  ist.

9.4 Bestimmen Sie für  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 11 & 5 \end{pmatrix}$  eine Zahl  $a \in \mathbb{R}$  so, dass  $|(\frac{1}{a} \mathbf{A})^{-1}| = \text{Spur}((\frac{1}{a} \mathbf{A})^{-1})$  ist.

9.5 Bestimmen Sie für  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$  eine Zahl  $a \in \mathbb{R}$  so, dass  $|\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}| = \text{Spur}(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A})$  ist.

9.6 Bestimmen Sie für  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ r \end{pmatrix}$  eine Zahl  $r > 0$  so, dass  $\text{Spur}(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \mathbf{b}' (\mathbf{A}')^{-1}) = 34 \cdot |(\mathbf{A}^2)^{-1}|$  ist.

## 10. Eigenwertzerlegung

10.1 Eine symmetrische 3×3-Matrix  $\mathbf{A}$  besitzt die Eigenwerte und Eigenvektoren

$$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1, \mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie die Determinante von  $\mathbf{A}$ .  
(b) Existiert die Inverse  $\mathbf{A}^{-1}$ ? (Begründung!). Wenn ja, berechnen Sie  $\mathbf{A}^{-1}$ .

10.2 Eine symmetrische 5×5-Matrix  $\mathbf{A}$  besitzt die Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_5$  mit  $\lambda_2, \dots, \lambda_5 = 0$ ,  $\lambda_1 \neq 0$ .

- (a) Ist  $\mathbf{A}$  regulär? (Begründung!)  
(b) Geben Sie  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}^2$  und  $\mathbf{A}^{10}$  in Abhängigkeit von  $\lambda_1$  und dem korrespondierenden Eigenvektor  $\mathbf{x}_1$  an.

10.3 Gegeben sind die Eigenwerte einer symmetrischen Matrix  $\mathbf{A}$ .

- (a) Berechnen Sie die Determinante von  $\mathbf{A}$ .  
(b) Ist  $\mathbf{A}$  regulär? (Begründung!)  
(c) Bestimmen Sie die Matrix  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$  sowie deren Inverse.  
(1) 3×3-Matrix  $\mathbf{A}$  mit  $\lambda_1 = 3 = \lambda_2$ ,  $\lambda_3 = -3$  (2) 4×4-Matrix  $\mathbf{A}$  mit  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = \lambda_4 = -2$

10.4 Gegeben sind die Hauptdiagonalelemente einer symmetrischen, idempotenten Matrix **A**.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von **A**.

(b) Ermitteln Sie den zum größten Eigenwert gehörenden Eigenvektor, dessen Koeffizienten alle  $\geq 0$  sind.

(1)  $3 \times 3$ -Matrix **A** mit  $a_{11} = a_{22} = \frac{4}{9}$ ,  $a_{33} = \frac{1}{9}$

(2)  $2 \times 2$ -Matrix **A** mit  $a_{11} = \frac{9}{25}$ ,  $a_{22} = \frac{16}{25}$

(3)  $4 \times 4$ -Matrix **A** mit  $a_{11} = \frac{16}{25}$ ,  $a_{22} = a_{33} = \frac{4}{25}$ ,  $a_{44} = \frac{1}{25}$

10.5 Gegeben ist ein Vektor **v** und damit die Matrix **A** = **v v'**.

(a) Welchen Rang besitzt **A**?

(b) Berechnen Sie die Spur von **A**.

(c) Bestimmen Sie unter Verwendung der Information aus (a) und (b) die Eigenwerte  $\lambda_i$  von **A**.

(d) Ermitteln Sie den Eigenvektor **x**<sub>1</sub> zum größten Eigenwert  $\lambda_1$  so, dass alle Koeffizienten  $\geq 0$  sind.

(1) **v'** = ( 1, 2, 2 )

(2) **v'** = ( 4, 2, 2, 1 )

10.6 Gegeben ist eine symmetrische Matrix **A**.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix **A**.

(b) Berechnen Sie die  $|\mathbf{A}|$ .

(c) Ist **A** regulär? (Begründung!)

(d) Welche Aussage lässt sich über die Definitheit von **A** machen? (Begründung!)

(1)  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(2)  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

(3)  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

(4)  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

(5)  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$

(6)  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(7)  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(8)  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

10.7 Gegeben sind die Eigenwerte einer symmetrischen  $3 \times 3$ -Matrix **A**.

(a) Bestimmen Sie  $|\mathbf{A}|$ .

(b) Ist **A** regulär? (Begründung!)

(c) Welche Aussage lässt sich über die Definitheit von **A** machen? (Begründung!)

(d) Berechnen Sie die Spur von **A**<sup>2</sup>.

(1)  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3 = -1$

(2)  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3 = -2$

10.8 Gegeben ist die Spur einer symmetrischen  $2 \times 2$ -Matrix **A** und die Spur von **A**<sup>2</sup>.

(a) Welche beiden Bedingungen ergeben sich daraus für die Eigenwerte  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  von **A**?

(b) Berechnen Sie  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ .

(c) Welche Aussage lässt sich über die Definitheit von **A** machen? (Begründung!)

(d) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix **A**.

(1)  $\text{Spur}(\mathbf{A}) = 1$ ,  $\text{Spur}(\mathbf{A}^2) = 13$

(2)  $\text{Spur}(\mathbf{A}) = 3$ ,  $\text{Spur}(\mathbf{A}^2) = 5$

10.9 Eine symmetrische  $3 \times 3$ -Matrix **A** mit den Hauptdiagonalelementen  $a_{11} = 4 = a_{22}$ ,  $a_{33} = 1$  besitze den Rang 1.

(a) Welche Aussage lässt sich aufgrund der Rangangabe über die drei Eigenwerte von **A** treffen?

(b) Bezeichne  $\lambda_1$  den betragsmäßig größten Eigenwert.

Stellen Sie **A** in Abhängigkeit von  $\lambda_1$  und dem zugehörigen Eigenvektor **x**<sub>1</sub> dar.

(c) Bestimmen Sie  $\lambda_1$ .

(d) Berechnen Sie  $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  mit  $a, b, c \geq 0$ .

10.10 Gegeben sind die Eigenwerte und Eigenvektoren einer symmetrischen  $3 \times 3$ -Matrix **A**.

(a) Welche Aussage lässt sich über die Definitheit von **A** machen? (Begründung!)

(b) Woran erkennt man, dass **A** regulär ist? Bestimmen Sie die Inverse **A**<sup>-1</sup>.

(c) Berechnen Sie die Spur von **A**<sup>-1</sup>.

(d) Berechnen Sie die Determinante der gegebenen Matrix **B**.

(1)  $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ ,  $\lambda_2 = \frac{1}{9}$ ,  $\lambda_3 = \frac{1}{18}$ ,  $\mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{x}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{x}_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \frac{1}{3} \mathbf{A}^{-1}$

(2)  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = \frac{1}{4} = \lambda_3$ ,  $\mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \frac{1}{2} \mathbf{A}^{-1}$

10.11 Gegeben ist die Spur einer symmetrischen  $2 \times 2$ -Matrix  $\mathbf{A}$  sowie ihre Determinante.

- (a) Welche beiden Bedingungen ergeben sich daraus für die Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2$  von  $\mathbf{A}$ ?
- (b) Berechnen Sie  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ .
- (c) Welche Aussage lässt sich über die Definitheit von  $\mathbf{A}$  machen? (Begründung!)
- (d) Berechnen Sie die Determinante der gegebenen Matrix  $\mathbf{B}$ .
- (1)  $\text{Spur}(\mathbf{A}) = 2, |\mathbf{A}| = -3, \mathbf{B} = 3 \cdot \mathbf{A}^{-1}$       (2)  $\text{Spur}(\mathbf{A}) = 4, |\mathbf{A}| = 3, \mathbf{B} = \left(\frac{1}{6} \mathbf{A}\right)^{-1}$

10.12 Eine  $2 \times 2$  Matrix  $\mathbf{A}$  besitzt die Darstellung  $\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{v}\mathbf{v}'$ , wobei  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$  ein Vektor ist mit  $|\mathbf{v}| = 1$ .

- (a) Berechnen Sie die Spur( $\mathbf{A}$ ).
- (b) Bestimmen Sie  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ .
- (c) Welche Bedingungen ergeben sich aus (a) und (b) für die Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2$  von  $\mathbf{A}$ ? Geben Sie  $\lambda_1, \lambda_2$  an.
- (d) Ist  $\mathbf{A}$  regulär? (Begründung!)

10.13 Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrizen

- (a)  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$ ,
- (b)  $\mathbf{B} = b \cdot \mathbf{A}, b \in \mathbb{R}$ ,
- (c)  $\mathbf{C} = \mathbf{A} + c \cdot \mathbf{I}, c \in \mathbb{R}$ .

Übrigens: Die Matrizen  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  und  $\mathbf{C}$  besitzen die gleichen Eigenvektoren.

10.14  $\mathbf{A}$  sei eine symmetrische, idempotente  $3 \times 3$  Matrix mit den Hauptdiagonalelementen  $a_{11} = \frac{1}{3}, a_{22} = \frac{2}{3}, a_{33} = 1$ .

- (a) Welche beiden Bedingungen ergeben sich daraus für die Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ?
- (b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und den Rang von  $\mathbf{A}$ .
- (c) Ermitteln Sie die Eigenwerte und den Rang von  $(\mathbf{A} - \mathbf{I})^2$ .

## 11. Singulärwertzerlegung

11.1 Gegeben sei die Singulärwertzerlegung einer  $m \times n$ -Matrix  $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{V}' = w_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1' + w_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2' + \dots + w_n \mathbf{u}_n \mathbf{v}_n'$  mit

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w_n \end{pmatrix}, w_i \geq 0, \mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n), \mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^m, \mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n), \mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n, \mathbf{U}'\mathbf{U} = \mathbf{I} = \mathbf{V}'\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{V}'.$$

- (a) Welchen Rang besitzt die Matrix  $\mathbf{A}$ ? (Begründung!)
- (b) Welche Eigenschaft besitzt in diesem Fall die Matrix  $\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}\mathbf{W}^+\mathbf{U}' = w_1^+ \mathbf{v}_1 \mathbf{u}_1' + w_2^+ \mathbf{v}_2 \mathbf{u}_2' + \dots + w_n^+ \mathbf{v}_n \mathbf{u}_n'$ ?

$$\text{Dabei ist } \mathbf{W}^+ = \begin{pmatrix} w_1^+ & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w_n^+ \end{pmatrix}, w_i^+ = \begin{cases} \frac{1}{w_i} & \text{falls } w_i \neq 0 \\ 0 & \text{falls } w_i = 0 \end{cases}.$$

Frage (b) wird nicht gestellt, wenn  $\mathbf{A}$  nicht den vollen Rang besitzt.

- (c) Welche der Lösungsmengen - genau eine Lösung - unendlich viele Lösungen - keine Lösung erhält man für das lineare Gleichungssystem  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ? (Begründung!)
- (d) Welche Eigenschaft besitzt in diesem Fall die "Lösung"  $\mathbf{x}^+ = \mathbf{A}^+ \mathbf{b}$  dieses Gleichungssystems? Berechnen Sie – falls möglich – diesen Vektor  $\mathbf{x}^+$ .

(1)  $4 \times 3$ -Matrix  $\mathbf{A}, w_1 = 2, w_2 = 1, w_3 = 0$

(2)  $5 \times 3$ -Matrix  $\mathbf{A}, w_1 = 3, w_2 = 2, w_3 = 1$

(3)  $\mathbf{A} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix}$

(4)  $w_1 = \sqrt{3}, w_2 = 1, \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(5)  $w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, w_2 = \frac{1}{3}, w_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}, \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{V} = \mathbf{I}, \mathbf{b} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(6)  $w_1 = 15, w_2 = 5\sqrt{2}, \mathbf{u}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(7)  $\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot 5\sqrt{5} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = 50 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

- (8)  $w_1 = 15, w_2 = 0, \mathbf{u}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = 25 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
- (9)  $w_1 = 5, w_2 = 0, \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = 25 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
- (10)  $\mathbf{U} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{V} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{W} = 15 \cdot \mathbf{I}, \mathbf{b} = 225 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- (11)  $\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = 10 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- (12)  $w_1 = 15, w_2 = 0, \mathbf{u}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = 25 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
- (13)  $w_1 = 25, w_2 = 10, \mathbf{u}_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = 25 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$
- (14)  $\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \sqrt{20} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$
- (15)  $w_1 = 25, w_2 = 0, \mathbf{u}_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = 25 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$
- (16)  $w_1 = 1, w_2 = \frac{1}{2}, w_3 = \frac{1}{3},$   
 $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- (17)  $w_1 = \frac{8}{\sqrt{5}}, w_2 = 1, \mathbf{u}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$
- (18)  $w_1 = 1 = w_2, w_3 = 0, \mathbf{u}_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$
- (19)  $w_1 = 2\sqrt{3}, w_2 = \sqrt{6}, w_3 = 2,$   
 $\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$
- (20)  $\mathbf{U} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{W} = \sqrt{5} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
- (21)  $w_1 = 3, w_2 = 2, w_3 = 0,$   
 $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{5} (3, 2, 2, 2, 2)', \mathbf{u}_2 = \frac{1}{2} (0, -1, 1, -1, 1)', \mathbf{v}_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = 3 \cdot (3, 1, 3, 1, 3)'$

11.2 Gegeben sind die Matrix  $\mathbf{A}$  und der Vektor  $\mathbf{b}$ .

(a) Welchen Rang besitzt die Matrix  $\mathbf{A}$ ? (Begründung!)

Welche Aussage kann daher über die Singulärwerte  $w_1, w_2, w_3$  von  $\mathbf{A}$  gemacht werden?

Wie reduziert sich dadurch die Darstellung  $\mathbf{A} = w_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1' + w_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2' + w_3 \mathbf{u}_3 \mathbf{v}_3'$  der Singulärwertzerlegung?

(b) Stellen Sie die Matrix  $\mathbf{A}$  als äußeres Produkt zweier Vektoren  $\mathbf{c}, \mathbf{d}$  dar:  $\mathbf{A} = \mathbf{c} \mathbf{d}'$ .

Normieren Sie  $\mathbf{c}$  und  $\mathbf{d}$  auf die Länge 1 und bestimmen so  $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1$  und schließlich  $w_1$ .

(c) Welche der Lösungsmengen - genau eine Lösung, - unendlich viele Lösungen, - keine Lösung erhält man für das lineare Gleichungssystem  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ? (Begründung!)

(d) Welche Eigenschaft besitzt die "Lösung"  $\mathbf{x}^+ = \mathbf{A}^+ \mathbf{b}$  dieses Gleichungssystems?

Dabei ist  $\mathbf{A}^+ = w_1^+ \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1' + w_2^+ \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2' + w_3^+ \mathbf{u}_3 \mathbf{u}_3'$  mit  $w_i^+ = 1/w_i$ , falls  $w_i \neq 0$ ,  $w_i^+ = 0$  sonst.

(e) Berechnen Sie  $\mathbf{x}^+$ !

$$(1) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \quad (2) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix}$$

## 12. Lineare Optimierung

- 12.1 Ein Unternehmen stellt die beiden Produkte  $P_1$  und  $P_2$  an drei Fertigungsstellen  $F_1, F_2, F_3$  her. Die je Produkt- und Fertigungsstelle benötigten Produktionszeiten, die Kapazitäten der Fertigungsstellen sowie die Deckungsbeiträge (DB) der Produkte sind in folgender Tabelle zusammengefasst:

|       | $P_1$ | $P_2$ | Kapazität |
|-------|-------|-------|-----------|
| $F_1$ | 2     | 1     | 8         |
| $F_2$ | 1     | 2     | 8         |
| $F_3$ | 1     | 1     | 5         |
| DB    | 3     | 2     |           |

Bestimmen Sie mit Hilfe des Simplex-Algorithmus, wie viele Produkte  $P_1$  und  $P_2$  zu fertigen sind, damit der Deckungsbeitrag maximal wird!

- 12.2 Ein Unternehmen stellt die beiden Produkte  $P_1$  und  $P_2$  an drei Fertigungsstellen  $F_1, F_2, F_3$  her. Die je Produkt- und Fertigungsstelle benötigten Produktionszeiten, die Kapazitäten der Fertigungsstellen sowie die Deckungsbeiträge (DB) der Produkte sind in folgender Tabelle zusammengefasst:

|       | $P_1$ | $P_2$ | Kapazität |
|-------|-------|-------|-----------|
| $F_1$ | 2     | 5     | 40        |
| $F_2$ | 2     | 3     | 28        |
| $F_3$ | 2     | 1     | 20        |
| DB    | 2     | 2     |           |

Bei der Berechnung des DB-maximalen Produktionsprogramms mit Hilfe des Simplex-Algorithmus ergeben sich die nachstehenden Tabellen:

|     | BV    | $x_1$ | $x_2$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | r.S. | $\theta$ |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|----------|
| (I) | $u_1$ | 0     | 0     | 1     | -2    | 1     | 4    |          |
|     | $x_2$ | 0     | 1     | 0     | 0,5   | -0,5  | 4    |          |
|     | $x_1$ | 1     | 0     | 0     | -0,25 | 0,75  | 8    |          |
|     | $z$   | 0     | 0     | 0     | 0,5   | 0,5   | 24   |          |

|      | BV    | $x_1$ | $x_2$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | r.S. | $\theta$ |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|----------|
| (II) | $u_1$ | 2     | 5     | 1     | 0     | 0     | 40   |          |
|      | $u_2$ | 2     | 3     | 0     | 1     | 0     | 28   |          |
|      | $u_3$ | 2     | 1     | 0     | 0     | 1     | 20   |          |
|      | $z$   | -2    | -2    | 0     | 0     | 0     | 0    |          |

|       | BV    | $x_1$ | $x_2$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | r.S. | $\theta$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|----------|
| (III) | $u_1$ | 0     | 4     | 1     | 0     | -1    | 20   |          |
|       | $u_2$ | 0     | 2     | 0     | 1     | -1    | 8    |          |
|       | $x_1$ | 1     | 0,5   | 0     | 0     | 0,5   | 10   |          |
|       | $z$   | 0     | -1    | 0     | 0     | 1     | 20   |          |

- (a) Geben Sie jeweils an, ob es sich um das Anfangstableau, das Endtableau oder ein Zwischentableau handelt!
- (b) Interpretieren Sie das Endtableau:
- Wie lauten die optimalen Produktionsmengen?
  - Welcher DB wird dabei erzielt?
  - An welcher Fertigungsstelle gibt es noch wie viel freie Kapazität?
- (c) Ermitteln Sie beim Zwischentableau das nächste Pivotelement:
- Welche Variable sollte aus der Basis eliminiert werden, welche Variable neu in die Basis aufgenommen werden? (Pivotelement im entsprechenden Tableau markieren!)

- 12.3 Ein Unternehmen stellt die Produkte  $P_i$  an Fertigungsstellen  $F_j$  her. Die je Produkt- und Fertigungsstelle benötigten Produktionszeiten, die Kapazitäten der Fertigungsstellen sowie die Deckungsbeiträge (DB) der Produkte liegen in Tabellenform vor.

- (a) Stellen Sie das zugehörige Simplex-Anfangstableau zur Maximierung des DB auf!
- (b) Während der Durchführung des Simplex-Algorithmus ergibt sich ein Zwischentableau. Welche Variable ist in die Basis aufzunehmen, welche zu eliminieren? (Füllen Sie die letzte Spalte des Tableaus aus und markieren Sie das Pivotelement!)
- (c) Interpretieren Sie das Endtableau:
- Wie lauten die optimalen Produktionsmengen?
  - Welcher DB wird dabei erzielt?
  - An welcher Fertigungsstelle gibt es noch wie viel freie Kapazität?
  - Um wie viele Einheiten steigt der DB, wenn die Ausgangskapazität von  $F_j$  um eine Einheit erhöht wird?

(1)

| Daten |       |       |           |
|-------|-------|-------|-----------|
|       | $P_1$ | $P_2$ | Kapazität |
| $F_1$ | 1     | 0     | 12        |
| $F_2$ | 0     | 1     | 10        |
| $F_3$ | 1     | 2     | 26        |
| $F_4$ | 2     | 1     | 28        |
| DB    | 2     | 2     |           |

| Zwischentableau |       |       |       |       |       |       |      |          |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|----------|
| BV              | $x_1$ | $x_2$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | r.S. | $\theta$ |
| $x_1$           | 1     | 0     | 1     | 0     | 0     | 0     | 12   |          |
| $u_2$           | 0     | 0     | 2     | 1     | 0     | -1    | 6    |          |
| $u_3$           | 0     | 0     | 3     | 0     | 1     | -2    | 6    |          |
| $x_2$           | 0     | 1     | -2    | 0     | 0     | 1     | 4    |          |
| $z$             | 0     | 0     | -2    | 0     | 0     | 2     | 32   |          |

(2)

| Daten |       |       |       |           |
|-------|-------|-------|-------|-----------|
|       | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | Kapazität |
| $F_1$ | 5     | 25    | 8     | 215       |
| $F_2$ | 1     | 4     | 1     | 30        |
| $F_3$ | 1     | 5     | 2     | 50        |
| DB    | 8     | 35    | 13    |           |

| Zwischentableau |       |       |       |       |       |       |      |          |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|----------|
| BV              | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | r.S. | $\theta$ |
| $u_1$           | 0     | 5     | 3     | 1     | -5    | 0     | 65   |          |
| $x_1$           | 1     | 4     | 1     | 0     | 1     | 0     | 30   |          |
| $u_3$           | 0     | 1     | 1     | 0     | -1    | 1     | 20   |          |
| $z$             | 0     | -3    | -5    | 0     | 8     | 0     | 240  |          |

(3)

| Daten |       |       |       |           |
|-------|-------|-------|-------|-----------|
|       | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | Kapazität |
| $F_1$ | 1     | 1     | 0     | 30        |
| $F_2$ | 1     | 3     | 1     | 60        |
| $F_3$ | 0     | 2     | 2     | 40        |
| DB    | 10    | 5     | 15    |           |

| Zwischentableau |       |       |       |       |       |       |      |          |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|----------|
| BV              | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | r.S. | $\theta$ |
| $x_1$           | 1     | 1     | 0     | 1     | 0     | 0     | 30   |          |
| $u_2$           | 0     | 2     | 1     | -1    | 1     | 0     | 30   |          |
| $u_3$           | 0     | 2     | 2     | 0     | 0     | 1     | 40   |          |
| $z$             | 0     | 5     | -15   | 10    | 0     | 0     | 300  |          |

(4)

| Daten |       |       |           |
|-------|-------|-------|-----------|
|       | $P_1$ | $P_2$ | Kapazität |
| $F_1$ | 1     | 0,5   | 20        |
| $F_2$ | 0     | 1     | 30        |
| $F_3$ | 3     | 2     | 70        |
| $F_4$ | 2     | 3     | 100       |
| DB    | 25    | 15    |           |

| Zwischentableau |       |       |       |       |       |       |      |          |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|----------|
| BV              | $x_1$ | $x_2$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | r.S. | $\theta$ |
| $x_1$           | 1     | 0,5   | 1     | 0     | 0     | 0     | 20   |          |
| $u_2$           | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 0     | 30   |          |
| $u_3$           | 0     | 0,5   | -3    | 0     | 1     | 0     | 10   |          |
| $u_4$           | 0     | 2     | -2    | 0     | 0     | 1     | 60   |          |
| $z$             | 0     | -2,5  | 25    | 0     | 0     | 0     | 500  |          |

Anfangstableau

| BV  | $x_1$ | $x_2$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | r.S. |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
|     |       |       |       |       |       |       |      |
|     |       |       |       |       |       |       |      |
|     |       |       |       |       |       |       |      |
|     |       |       |       |       |       |       |      |
| $z$ |       |       |       |       |       |       |      |

Endtableau

| BV    | $x_1$ | $x_2$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | r.S. |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| $x_1$ | 1     | 0     | 0     | 0     | -1/3  | 2/3   | 10   |
| $u_2$ | 0     | 0     | 0     | 1     | -2/3  | 1/3   | 2    |
| $u_1$ | 0     | 0     | 1     | 0     | 1/3   | -2/3  | 2    |
| $x_2$ | 0     | 1     | 0     | 0     | 2/3   | -1/3  | 8    |
| $z$   | 0     | 0     | 0     | 0     | 2/3   | 2/3   | 36   |

Anfangstableau

| BV  | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | r.S. |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
|     |       |       |       |       |       |       |      |
|     |       |       |       |       |       |       |      |
|     |       |       |       |       |       |       |      |
| $z$ |       |       |       |       |       |       |      |

Endtableau

| BV    | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | r.S. |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| $u_1$ | 0     | 2     | 0     | 1     | -2    | -3    | 5    |
| $x_1$ | 1     | 3     | 0     | 0     | 2     | -1    | 10   |
| $x_3$ | 0     | 1     | 1     | 0     | -1    | 1     | 20   |
| $z$   | 0     | 2     | 0     | 0     | 3     | 5     | 340  |

Anfangstableau

| BV  | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | r.S. |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
|     |       |       |       |       |       |       |      |
|     |       |       |       |       |       |       |      |
|     |       |       |       |       |       |       |      |
| $z$ |       |       |       |       |       |       |      |

Endtableau

| BV    | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | r.S. |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| $x_1$ | 1     | 1     | 0     | 1     | 0     | 0     | 30   |
| $u_2$ | 0     | 1     | 0     | -1    | 1     | -0,5  | 10   |
| $x_3$ | 0     | 1     | 1     | 0     | 0     | 0,5   | 20   |
| $z$   | 0     | 20    | 0     | 10    | 0     | 7,5   | 600  |

Anfangstableau

| BV  | $x_1$ | $x_2$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | r.S. |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
|     |       |       |       |       |       |       |      |
|     |       |       |       |       |       |       |      |
|     |       |       |       |       |       |       |      |
|     |       |       |       |       |       |       |      |
| $z$ |       |       |       |       |       |       |      |

Endtableau

| BV    | $x_1$ | $x_2$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | r.S. |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| $x_1$ | 1     | 0     | 4     | 0     | -1    | 0     | 10   |
| $u_2$ | 0     | 0     | 6     | 1     | -2    | 0     | 10   |
| $x_2$ | 0     | 1     | -6    | 0     | 2     | 0     | 20   |
| $u_4$ | 0     | 0     | 10    | 0     | -4    | 1     | 20   |
| $z$   | 0     | 0     | 10    | 0     | 5     | 0     | 550  |

(5)

| Daten |       |       |       |           |
|-------|-------|-------|-------|-----------|
|       | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | Kapazität |
| $F_1$ | 1     | 0     | 2     | 50        |
| $F_2$ | 0     | 2     | 1     | 50        |
| $F_3$ | 2     | 1     | 0     | 80        |
| $F_4$ | 1     | 1     | 1     | 60        |
| DB    | 10    | 10    | 10    |           |

| Zwischentableau |       |       |       |       |       |       |       |      |          |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|----------|
| BV              | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | r.S. | $\theta$ |
| $x_3$           | 0     | -1/4  | 1     | 1/2   | 0     | -1/4  | 0     | 5    |          |
| $u_2$           | 0     | 9/4   | 0     | -1/2  | 1     | 1/4   | 0     | 45   |          |
| $x_1$           | 1     | 1/2   | 0     | 0     | 0     | 1/2   | 0     | 40   |          |
| $u_4$           | 0     | 3/4   | 0     | -1/2  | 0     | -1/4  | 1     | 15   |          |
| $z$             | 0     | -7,5  | 0     | 5     | 0     | 2,5   | 0     | 450  |          |

Anfangstableau

| BV  | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | r.S. |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
|     |       |       |       |       |       |       |       |      |
|     |       |       |       |       |       |       |       |      |
|     |       |       |       |       |       |       |       |      |
|     |       |       |       |       |       |       |       |      |
| $z$ |       |       |       |       |       |       |       |      |

Endtableau

| BV    | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | r.S. |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| $x_3$ | 0     | 0     | 1     | 1/3   | 0     | -1/3  | 1/3   | 10   |
| $u_2$ | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     | 1     | -3    | 0    |
| $x_1$ | 1     | 0     | 0     | 1/3   | 0     | 2/3   | -2/3  | 30   |
| $x_2$ | 0     | 1     | 0     | -2/3  | 0     | -1/3  | 4/3   | 20   |
| $z$   | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 10    | 600  |

(6)

| Daten |       |       |           |
|-------|-------|-------|-----------|
|       | $P_1$ | $P_2$ | Kapazität |
| $F_1$ | 1     | 0,5   | 40        |
| $F_2$ | 2     | 2     | 150       |
| $F_3$ | 3     | 2     | 150       |
| $F_4$ | 2     | 3     | 240       |
| DB    | 20    | 12    |           |

| Zwischentableau |       |       |       |       |       |       |      |          |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|----------|
| BV              | $x_1$ | $x_2$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | r.S. | $\theta$ |
| $x_1$           | 1     | 0,5   | 1     | 0     | 0     | 0     | 40   |          |
| $u_2$           | 0     | 1     | -2    | 1     | 0     | 0     | 70   |          |
| $u_3$           | 0     | 0,5   | -3    | 0     | 1     | 0     | 30   |          |
| $u_4$           | 0     | 2     | -2    | 0     | 0     | 1     | 160  |          |
| $z$             | 0     | -2    | 20    | 0     | 0     | 0     | 800  |          |

Anfangstableau

| BV  | $x_1$ | $x_2$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | r.S. |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
|     |       |       |       |       |       |       |      |
|     |       |       |       |       |       |       |      |
|     |       |       |       |       |       |       |      |
|     |       |       |       |       |       |       |      |
| $z$ |       |       |       |       |       |       |      |

Endtableau

| BV    | $x_1$ | $x_2$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | r.S. |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| $x_1$ | 1     | 0     | 4     | 0     | -1    | 0     | 10   |
| $u_2$ | 0     | 0     | 4     | 1     | -2    | 0     | 10   |
| $x_2$ | 0     | 1     | -6    | 0     | 2     | 0     | 60   |
| $u_4$ | 0     | 0     | 10    | 0     | -4    | 1     | 40   |
| $z$   | 0     | 0     | 8     | 0     | 4     | 0     | 920  |

(7)

| Daten |       |       |           |
|-------|-------|-------|-----------|
|       | $P_1$ | $P_2$ | Kapazität |
| $F_1$ | 1     | 0,5   | 25        |
| $F_2$ | 4     | 3     | 120       |
| $F_3$ | 3     | 2     | 80        |
| $F_4$ | 4     | 4     | 150       |
| DB    | 10    | 6     |           |

| Zwischentableau |       |       |       |       |       |       |      |          |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|----------|
| BV              | $x_1$ | $x_2$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | r.S. | $\theta$ |
| $x_1$           | 1     | 0,5   | 1     | 0     | 0     | 0     | 25   |          |
| $u_2$           | 0     | 1     | -4    | 1     | 0     | 0     | 50   |          |
| $u_3$           | 0     | 0,5   | 3     | 0     | 1     | 0     | 5    |          |
| $u_4$           | 0     | 2     | -4    | 0     | 0     | 1     | 50   |          |
| $z$             | 0     | -1    | 10    | 0     | 0     | 0     | 250  |          |

Anfangstableau

| BV  | $x_1$ | $x_2$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | r.S. |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
|     |       |       |       |       |       |       |      |
|     |       |       |       |       |       |       |      |
|     |       |       |       |       |       |       |      |
|     |       |       |       |       |       |       |      |
| $z$ |       |       |       |       |       |       |      |

Endtableau

| BV    | $x_1$ | $x_2$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | r.S. |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| $x_1$ | 1     | 0     | 4     | 0     | -1    | 0     | 20   |
| $u_2$ | 0     | 0     | 2     | 1     | -2    | 0     | 10   |
| $x_2$ | 0     | 1     | -6    | 0     | 2     | 0     | 10   |
| $u_4$ | 0     | 0     | 8     | 0     | -4    | 1     | 30   |
| $z$   | 0     | 0     | 4     | 0     | 2     | 0     | 260  |

(8)

| Daten |       |       |       |           |
|-------|-------|-------|-------|-----------|
|       | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | Kapazität |
| $F_1$ | -     | 1     | 1     | 50        |
| $F_2$ | 1     | 1     | -     | 30        |
| $F_3$ | 1     | -     | 1     | 40        |
| $F_4$ | 1     | 1     | 1     | 65        |
| DB    | 20    | 15    | 10    |           |

| Anfangstableau |       |       |       |       |       |       |       |      |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| BV             | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | r.S. |
|                |       |       |       |       |       |       |       |      |
|                |       |       |       |       |       |       |       |      |
|                |       |       |       |       |       |       |       |      |
|                |       |       |       |       |       |       |       |      |
| $z$            |       |       |       |       |       |       |       |      |

| Zwischentableau |       |       |       |       |       |       |       |      |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| BV              | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | r.S. |
| $u_1$           | 0     | 2     | 0     | 1     | 1     | -1    | 0     | 40   |
| $x_1$           | 1     | 1     | 0     | 0     | 1     | 0     | 0     | 30   |
| $x_3$           | 0     | -1    | 1     | 0     | -1    | 1     | 0     | 10   |
| $u_4$           | 0     | 1     | 0     | 0     | 0     | -1    | 1     | 25   |
| $z$             | 0     | -5    | 0     | 0     | 10    | 10    | 0     | 700  |

| Endtableau |       |       |       |       |       |       |       |      |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| BV         | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | r.S. |
| $x_2$      | 0     | 1     | 0     | 0,5   | 0,5   | -0,5  | 0     | 20   |
| $x_1$      | 1     | 0     | 0     | -0,5  | 0,5   | 0,5   | 0     | 10   |
| $x_3$      | 0     | 0     | 1     | 0,5   | -0,5  | 0,5   | 0     | 30   |
| $u_4$      | 0     | 0     | 0     | -0,5  | -0,5  | -0,5  | 1     | 5    |
| $z$        | 0     | 0     | 0     | 2,5   | 12,5  | 7,5   | 0     | 800  |

(9)

| Daten |       |       |           |
|-------|-------|-------|-----------|
|       | $P_1$ | $P_2$ | Kapazität |
| $F_1$ | 2     | 1     | 1         |
| $F_2$ | 1     | 1     | 2         |
| $F_3$ | 2     | 2     | 2         |
| DB    | 2     | 1     | 3         |

| Anfangstableau |       |       |       |       |       |       |      |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| BV             | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | r.S. |
|                |       |       |       |       |       |       |      |
|                |       |       |       |       |       |       |      |
|                |       |       |       |       |       |       |      |
|                |       |       |       |       |       |       |      |
| $z$            |       |       |       |       |       |       |      |

| Zwischentableau |       |       |       |       |       |       |      |          |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|----------|
| BV              | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | r.S. | $\theta$ |
| $u_1$           | 1,5   | 0,5   | 0     | 1     | -0,5  | 0     | 15   |          |
| $x_3$           | 0,5   | 0,5   | 1     | 0     | 0,5   | 0     | 25   |          |
| $u_3$           | 1     | 1     | 0     | 0     | -1    | 1     | 10   |          |
| $z$             | -0,5  | 0,5   | 0     | 0     | 1,5   | 0     | 75   |          |

| Endtableau |       |       |       |       |       |       |      |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| BV         | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | r.S. |
| $u_1$      | 0     | -1    | 0     | 1     | 1     | -1,5  | 0    |
| $x_3$      | 0     | 0     | 1     | 0     | 1     | -0,5  | 20   |
| $x_1$      | 1     | 1     | 0     | 0     | -1    | 1     | 10   |
| $z$        | 0     | 1     | 0     | 0     | 1     | 0,5   | 80   |

(10)

| Daten |       |       |           |
|-------|-------|-------|-----------|
|       | $P_1$ | $P_2$ | Kapazität |
| $F_1$ | 1     | 0,5   | 20        |
| $F_2$ | 8     | 5     | 200       |
| $F_3$ | 3     | 2     | 75        |
| $F_4$ | 4     | 4     | 160       |
| DB    | 70    | 40    |           |

| Anfangstableau |       |       |       |       |       |       |      |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| BV             | $x_1$ | $x_2$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | r.S. |
|                |       |       |       |       |       |       |      |
|                |       |       |       |       |       |       |      |
|                |       |       |       |       |       |       |      |
|                |       |       |       |       |       |       |      |
| $z$            |       |       |       |       |       |       |      |

| Zwischentableau |       |       |       |       |       |       |      |          |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|----------|
| BV              | $x_1$ | $x_2$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | r.S. | $\theta$ |
| $x_1$           | 1     | 0,5   | 1     | 0     | 0     | 0     | 20   |          |
| $u_2$           | 0     | 1     | -8    | 1     | 0     | 0     | 40   |          |
| $u_3$           | 0     | 0,5   | -3    | 0     | 1     | 0     | 15   |          |
| $u_4$           | 0     | 2     | -4    | 0     | 0     | 1     | 80   |          |
| $z$             | 0     | -5    | 70    | 0     | 0     | 0     | 1400 |          |

| Endtableau |       |       |       |       |       |       |      |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| BV         | $x_1$ | $x_2$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | r.S. |
| $x_1$      | 1     | 0     | 4     | 0     | -1    | 0     | 5    |
| $u_2$      | 0     | 0     | -2    | 1     | -2    | 0     | 10   |
| $x_2$      | 0     | 1     | -6    | 0     | 2     | 0     | 30   |
| $u_4$      | 0     | 0     | 8     | 0     | -4    | 1     | 20   |
| $z$        | 0     | 0     | 40    | 0     | 10    | 0     | 1550 |

(11)

| Daten |       |       |           |
|-------|-------|-------|-----------|
|       | $P_1$ | $P_2$ | Kapazität |
| $F_1$ | 1     | 0,5   | 100       |
| $F_2$ | 4     | 3     | 600       |
| $F_3$ | 3     | 2     | 360       |
| $F_4$ | 6     | 5     | 900       |
| DB    | 48    | 30    |           |

| Anfangstableau |       |       |       |       |       |       |      |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| BV             | $x_1$ | $x_2$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | r.S. |
|                |       |       |       |       |       |       |      |
|                |       |       |       |       |       |       |      |
|                |       |       |       |       |       |       |      |
|                |       |       |       |       |       |       |      |
| $z$            |       |       |       |       |       |       |      |

| Zwischentableau |       |       |       |       |       |       |      |          |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|----------|
| BV              | $x_1$ | $x_2$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | r.S. | $\theta$ |
| $x_1$           | 1     | 0,5   | 1     | 0     | 0     | 0     | 100  |          |
| $u_2$           | 0     | 1     | -4    | 1     | 0     | 0     | 200  |          |
| $u_3$           | 0     | 0,5   | -3    | 0     | 1     | 0     | 60   |          |
| $u_4$           | 0     | 2     | -6    | 0     | 0     | 1     | 300  |          |
| $z$             | 0     | -6    | 48    | 0     | 0     | 0     | 4800 |          |

| Endtableau |       |       |       |       |       |       |      |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| BV         | $x_1$ | $x_2$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | r.S. |
| $x_1$      | 1     | 0     | 4     | 0     | -1    | 0     | 40   |
| $u_2$      | 0     | 0     | 2     | 1     | -2    | 0     | 80   |
| $x_2$      | 0     | 1     | -6    | 0     | 2     | 0     | 120  |
| $u_4$      | 0     | 0     | 6     | 0     | -4    | 1     | 60   |
| $z$        | 0     | 0     | 12    | 0     | 12    | 0     | 5520 |

(12)

| Daten |       |       |       |           |
|-------|-------|-------|-------|-----------|
|       | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | Kapazität |
| $F_1$ | 1     | 0     | 2     | 20        |
| $F_2$ | 0     | 2     | 1     | 30        |
| $F_3$ | 2     | 1     | 0     | 40        |
| $F_4$ | 1     | 1     | 1     | 29        |
| DB    | 10    | 5     | 5     |           |

| Zwischentableau |       |       |       |       |       |       |       |      |          |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|----------|
| BV              | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | r.S. | $\theta$ |
| $x_1$           | 1     | 0     | 2     | 1     | 0     | 0     | 0     | 20   |          |
| $u_2$           | 0     | 0     | 9     | 4     | 1     | -2    | 0     | 30   |          |
| $x_2$           | 0     | 1     | -4    | -2    | 0     | 1     | 0     | 0    |          |
| $u_4$           | 0     | 0     | 3     | 1     | 0     | -1    | 1     | 9    |          |
| z               | 0     | 0     | -5    | 0     | 0     | 5     | 0     | 200  |          |

| Anfangstableau |       |       |       |       |       |       |       |      |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| BV             | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | r.S. |
|                |       |       |       |       |       |       |       |      |
|                |       |       |       |       |       |       |       |      |
|                |       |       |       |       |       |       |       |      |
|                |       |       |       |       |       |       |       |      |
| z              |       |       |       |       |       |       |       |      |

| Endtableau |       |       |       |       |       |       |       |      |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| BV         | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | r.S. |
| $x_1$      | 1     | 0     | 0     | 1/3   | 0     | 2/3   | -2/3  | 14   |
| $u_2$      | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     | 1     | -3    | 3    |
| $x_2$      | 0     | 1     | 0     | -2/3  | 0     | -1/3  | 4/3   | 12   |
| $x_3$      | 0     | 0     | 1     | 1/3   | 0     | -1/3  | 1/3   | 3    |
| z          | 0     | 0     | 0     | 5/3   | 0     | 10/3  | 5/3   | 215  |

(13)

| Daten |       |       |           |
|-------|-------|-------|-----------|
|       | $P_1$ | $P_2$ | Kapazität |
| $F_1$ | 1     | 0,5   | 32        |
| $F_2$ | 8     | 5     | 320       |
| $F_3$ | 3     | 2     | 120       |
| $F_4$ | 12    | 8     | 540       |
| DB    | 40    | 24    |           |

| Zwischentableau |       |       |       |       |       |       |      |          |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|----------|
| BV              | $x_1$ | $x_2$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | r.S. | $\theta$ |
| $x_1$           | 1     | 0,5   | 1     | 0     | 0     | 0     | 32   |          |
| $u_2$           | 0     | 1     | -8    | 1     | 0     | 0     | 64   |          |
| $u_3$           | 0     | 0,5   | -3    | 0     | 1     | 0     | 24   |          |
| $u_4$           | 0     | 2     | -12   | 0     | 0     | 1     | 156  |          |
| z               | 0     | -4    | 40    | 0     | 0     | 0     | 1280 |          |

| Anfangstableau |       |       |       |       |       |       |      |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| BV             | $x_1$ | $x_2$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | r.S. |
|                |       |       |       |       |       |       |      |
|                |       |       |       |       |       |       |      |
|                |       |       |       |       |       |       |      |
|                |       |       |       |       |       |       |      |
| z              |       |       |       |       |       |       |      |

| Endtableau |       |       |       |       |       |       |      |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| BV         | $x_1$ | $x_2$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | r.S. |
| $x_1$      | 1     | 0     | 4     | 0     | -1    | 0     | 8    |
| $u_2$      | 0     | 0     | -2    | 1     | -2    | 0     | 16   |
| $x_2$      | 0     | 1     | -6    | 0     | 2     | 0     | 48   |
| $u_4$      | 0     | 0     | 0     | 0     | -4    | 1     | 60   |
| z          | 0     | 0     | 16    | 0     | 8     | 0     | 1472 |

(14)

| Daten |       |       |       |           |
|-------|-------|-------|-------|-----------|
|       | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | Kapazität |
| $F_1$ | 1     | 1     | 3     | 60        |
| $F_2$ | 2     | 0     | 2     | 40        |
| $F_3$ | 0     | 1     | 1     | 30        |
| DB    | 15    | 10    | 5     |           |

| Zwischentableau |       |       |       |       |       |       |      |          |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|----------|
| BV              | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | r.S. | $\theta$ |
| $u_1$           | 0     | 1     | 2     | 1     | -0,5  | 0     | 40   |          |
| $x_1$           | 1     | 0     | 1     | 0     | 0,5   | 0     | 20   |          |
| $u_3$           | 0     | 1     | 1     | 0     | 0     | 1     | 30   |          |
| z               | 0     | -10   | 10    | 0     | 7,5   | 0     | 300  |          |

| Anfangstableau |       |       |       |       |       |       |      |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| BV             | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | r.S. |
|                |       |       |       |       |       |       |      |
|                |       |       |       |       |       |       |      |
|                |       |       |       |       |       |       |      |
| z              |       |       |       |       |       |       |      |

| Endtableau |       |       |       |       |       |       |      |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| BV         | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | r.S. |
| $u_1$      | 0     | 0     | 1     | 1     | -0,5  | -1    | 10   |
| $x_1$      | 1     | 0     | 1     | 0     | 0,5   | 0     | 20   |
| $x_2$      | 0     | 1     | 1     | 0     | 0     | 1     | 30   |
| z          | 0     | 0     | 20    | 0     | 7,5   | 10    | 600  |

(15)

| Daten |       |       |           |
|-------|-------|-------|-----------|
|       | $P_1$ | $P_2$ | Kapazität |
| $F_1$ | 1     | 0,5   | 40        |
| $F_2$ | 6     | 4     | 360       |
| $F_3$ | 3     | 2     | 150       |
| $F_4$ | 2     | 3     | 300       |
| DB    | 100   | 60    |           |

| Anfangstableau |       |       |       |       |       |       |      |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| BV             | $x_1$ | $x_2$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | r.S. |
|                |       |       |       |       |       |       |      |
|                |       |       |       |       |       |       |      |
|                |       |       |       |       |       |       |      |
|                |       |       |       |       |       |       |      |
| z              |       |       |       |       |       |       |      |

| Zwischentableau |       |       |       |       |       |       |      |          |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|----------|
| BV              | $x_1$ | $x_2$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | r.S. | $\theta$ |
| $x_1$           | 1     | 0,5   | 1     | 0     | 0     | 0     | 40   |          |
| $u_2$           | 0     | 1     | -6    | 1     | 0     | 0     | 120  |          |
| $u_3$           | 0     | 0,5   | -3    | 0     | 1     | 0     | 30   |          |
| $u_4$           | 0     | 2     | -2    | 0     | 0     | 1     | 220  |          |
| $z$             | 0     | -10   | 100   | 0     | 0     | 0     | 4000 |          |

(16)

| Daten |       |       |       |           |
|-------|-------|-------|-------|-----------|
|       | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | Kapazität |
| $F_1$ | 1     | 1     | 4     | 30        |
| $F_2$ | 2     | 1     | 5     | 50        |
| $F_3$ | 8     | 5     | 25    | 215       |
| DB    | 13    | 8     | 35    |           |

| Zwischentableau |       |       |       |       |       |       |      |          |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|----------|
| BV              | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | r.S. | $\theta$ |
| $x_2$           | 1     | 1     | 4     | 1     | 0     | 0     | 30   |          |
| $u_2$           | 1     | 0     | 1     | -1    | 1     | 0     | 20   |          |
| $u_3$           | 3     | 0     | 5     | -5    | 0     | 1     | 65   |          |
| $z$             | -5    | 0     | -3    | 8     | 0     | 0     | 240  |          |

(17)

| Daten |       |       |           |
|-------|-------|-------|-----------|
|       | $P_1$ | $P_2$ | Kapazität |
| $F_1$ | 3     | 2     | 300       |
| $F_2$ | 0,5   | 1     | 40        |
| $F_3$ | 2     | 3     | 150       |
| $F_4$ | 4     | 6     | 360       |
| DB    | 60    | 100   |           |

| Zwischentableau |       |       |       |       |       |       |      |          |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|----------|
| BV              | $x_1$ | $x_2$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | r.S. | $\theta$ |
| $u_1$           | 2     | 0     | 1     | -2    | 0     | 0     | 220  |          |
| $x_2$           | 0,5   | 1     | 0     | 1     | 0     | 0     | 40   |          |
| $u_3$           | 0,5   | 0     | 0     | -3    | 1     | 0     | 30   |          |
| $u_4$           | 1     | 0     | 0     | -6    | 0     | 1     | 120  |          |
| $z$             | -10   | 0     | 0     | 100   | 0     | 0     | 4000 |          |

(18)

| Daten |       |       |       |           |
|-------|-------|-------|-------|-----------|
|       | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | Kapazität |
| $F_1$ | 2     | 5     | 1     | 50        |
| $F_2$ | 8     | 25    | 5     | 215       |
| $F_3$ | 1     | 4     | 1     | 30        |
| DB    | 13    | 35    | 8     |           |

| Zwischentableau |       |       |       |       |       |       |      |          |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|----------|
| BV              | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | r.S. | $\theta$ |
| $u_1$           | 1     | 1     | 0     | 1     | 0     | -1    | 20   |          |
| $u_2$           | 3     | 5     | 0     | 0     | 1     | -5    | 65   |          |
| $x_3$           | 1     | 4     | 1     | 0     | 0     | 1     | 30   |          |
| $z$             | -5    | -3    | 0     | 0     | 0     | 8     | 240  |          |

(19)

| Daten |       |       |       |       |       |           |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------|
|       | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | Kapazität |
| $F_1$ | 3     | 1     | 0     | 0     | 1     | 10        |
| $F_2$ | 1     | 1     | 1     | 0     | 0     | 4         |
| $F_3$ | 0     | 1     | 1     | 2     | 1     | 8         |
| $F_4$ | 2     | 1     | 3     | 1     | 2     | 12        |
| DB    | 2     | 5     | 1     | 2     | 1     |           |

| Endtableau |       |       |       |       |       |       |      |  |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|--|
| BV         | $x_1$ | $x_2$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | r.S. |  |
| $x_1$      | 1     | 0     | 4     | 0     | -1    | 0     | 10   |  |
| $u_2$      | 0     | 0     | 0     | 1     | -2    | 0     | 60   |  |
| $x_2$      | 0     | 1     | -6    | 0     | 2     | 0     | 60   |  |
| $u_4$      | 0     | 0     | 10    | 0     | -4    | 1     | 100  |  |
| $z$        | 0     | 0     | 40    | 0     | 20    | 0     | 4600 |  |

| Anfangstableau |       |       |       |       |       |       |      |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| BV             | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | r.S. |
|                |       |       |       |       |       |       |      |
|                |       |       |       |       |       |       |      |
|                |       |       |       |       |       |       |      |
| $z$            |       |       |       |       |       |       |      |

| Endtableau |       |       |       |       |       |       |      |  |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|--|
| BV         | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | r.S. |  |
| $x_2$      | 0     | 1     | 3     | 2     | -1    | 0     | 10   |  |
| $x_1$      | 1     | 0     | 1     | -1    | 1     | 0     | 20   |  |
| $u_3$      | 0     | 0     | 2     | -2    | -3    | 1     | 5    |  |
| $z$        | 0     | 0     | 2     | 3     | 5     | 0     | 340  |  |

| Anfangstableau |       |       |       |       |       |       |      |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| BV             | $x_1$ | $x_2$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | r.S. |
|                |       |       |       |       |       |       |      |
|                |       |       |       |       |       |       |      |
|                |       |       |       |       |       |       |      |
|                |       |       |       |       |       |       |      |
| $z$            |       |       |       |       |       |       |      |

| Endtableau |       |       |       |       |       |       |      |  |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|--|
| BV         | $x_1$ | $x_2$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | r.S. |  |
| $u_1$      | 0     | 0     | 1     | 10    | -4    | 0     | 100  |  |
| $x_2$      | 0     | 1     | 0     | 4     | -1    | 0     | 10   |  |
| $x_1$      | 1     | 0     | 0     | -6    | 2     | 0     | 60   |  |
| $u_4$      | 0     | 0     | 0     | 0     | -2    | 1     | 60   |  |
| $z$        | 0     | 0     | 0     | 40    | 20    | 0     | 4600 |  |

| Anfangstableau |       |       |       |       |       |       |      |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| BV             | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | r.S. |
|                |       |       |       |       |       |       |      |
|                |       |       |       |       |       |       |      |
|                |       |       |       |       |       |       |      |
| $z$            |       |       |       |       |       |       |      |

| Endtableau |       |       |       |       |       |       |      |  |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|--|
| BV         | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | r.S. |  |
| $x_1$      | 1     | 1     | 0     | 1     | 0     | -1    | 20   |  |
| $u_2$      | 0     | 2     | 0     | -3    | 1     | -2    | 5    |  |
| $x_3$      | 0     | 3     | 1     | -1    | 0     | 2     | 10   |  |
| $z$        | 0     | 2     | 0     | 5     | 0     | 3     | 340  |  |

| Anfangstableau |       |       |       |       |       |       |       |       |       |      |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| BV             | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | r.S. |
|                |       |       |       |       |       |       |       |       |       |      |
|                |       |       |       |       |       |       |       |       |       |      |
|                |       |       |       |       |       |       |       |       |       |      |
|                |       |       |       |       |       |       |       |       |       |      |
| $z$            |       |       |       |       |       |       |       |       |       |      |

| Zwischentableau |       |       |       |       |       |       |       |       |       |      |          |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|----------|
| BV              | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | r.S. | $\theta$ |
| $u_1$           | 2     | 0     | -1    | 0     | 1     | 1     | -1    | 0     | 0     | 6    |          |
| $x_2$           | 1     | 1     | 1     | 0     | 0     | 0     | 1     | 0     | 0     | 4    |          |
| $u_3$           | -1    | 0     | 0     | 2     | 1     | 0     | -1    | 1     | 0     | 4    |          |
| $u_4$           | 1     | 0     | 2     | 1     | 2     | 0     | -1    | 0     | 1     | 8    |          |
| $z$             | 3     | 0     | 4     | -2    | -1    | 0     | 5     | 0     | 0     | 20   |          |

| Endtableau |       |       |       |       |       |       |       |       |       |      |  |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|--|
| BV         | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | r.S. |  |
| $u_1$      | 2     | 0     | -1    | 0     | 1     | 1     | -1    | 0     | 0     | 6    |  |
| $x_2$      | 1     | 1     | 1     | 0     | 0     | 0     | 1     | 0     | 0     | 4    |  |
| $x_4$      | -0,5  | 0     | 0     | 1     | 0,5   | 0     | -0,5  | 0,5   | 0     | 2    |  |
| $u_4$      | 1,5   | 0     | 2     | 0     | 1,5   | 0     | -0,5  | -0,5  | 1     | 6    |  |
| $z$        | 2     | 0     | 4     | 0     | 0     | 0     | 4     | 1     | 0     | 24   |  |

## ERGEBNISSE

### 1. Vektoren

- 1.1 (1)  $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , n.d., (3, 5), (1, 1), n.d., n.d. (2)  $3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ , n.d.
- (3) 8, n.d., n.d., n.d., n.d., 20, 20 (4) 3·8, 2·8, 24-20 (5) 34, 2, -8
- (6)  $\sqrt{5}, \sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 2\sqrt{3}$  (7)  $\sqrt{n}, 5, \sqrt{1/2}$  (8)  $2, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 1.2 120°, 45°, 135°, 120°, 60°, 120° 1.3 -1, -2, 1 1.4 ja, ja, nein, nein, ja, ja

- 1.5  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 2 & \dots & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

### 2. Matrizen

- 2.1  $\begin{pmatrix} 14 & -32 \\ -32 & 77 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 17 & -22 & 27 \\ -22 & 29 & -36 \\ 27 & -36 & 45 \end{pmatrix}$ , n.d.,  $\begin{pmatrix} -7 & -1 & -10 \\ 8 & -1 & 11 \\ -9 & 3 & -12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 9 & -21 \end{pmatrix}$ , n.d.,  $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 \\ -4 & 10 & -18 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 10 \\ 9 & -18 \end{pmatrix},$
- $\begin{pmatrix} 7 & -10 \\ 25 & -52 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}, -33, 39, 194, x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$
- 2.2 2, 1, 2, 3 2.3 1, -2, -1 2.4  $\begin{pmatrix} 1 & 1/b \\ 1/b & 1 \end{pmatrix}$  2.5 2, -3 2.6 -1
- 2.7 0 2.8 2 2.9 -2 2.10 1
- 2.11 (1)  $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 35 \\ 50 \\ 50 \\ 45 \end{pmatrix}, 260$  (2)  $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \\ 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 45 \\ 50 \\ 50 \\ 35 \end{pmatrix}, 280$  (3)  $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 3 & 3 \\ 3 & 3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 105 \\ 45 \\ 45 \\ 115 \end{pmatrix}, 400$
- 2.12 (1)  $\begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 50 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix}, 3000$  (2)  $\begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 25 \\ 25 \\ 25 \end{pmatrix}, 6000$  (3)  $\begin{pmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 400 \\ 400 \end{pmatrix}, 120000$
- (4)  $\begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, 1020$
- 2.13 (1)  $\begin{pmatrix} 500 \\ 900 \\ 200 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}, 2500$  (2)  $\begin{pmatrix} 500 \\ 1400 \\ 80 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 80 \\ 80 \\ 80 \end{pmatrix}, 24000$  (3)  $\begin{pmatrix} 800 \\ 800 \\ 800 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}, 4800$

$$2.14 \quad (1) \quad \begin{pmatrix} 1,3 \\ 1,3 \\ 1,8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 800 \\ 200 \\ 400 \\ 800 \\ 1200 \\ 600 \end{pmatrix}, 15000 \quad (2) \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 600 \\ 400 \\ 800 \\ 800 \\ 800 \\ 800 \end{pmatrix}, 20000$$

$$2.15 \quad (1) \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 6 & 7 \\ 8 & 7 & 6 \\ 9 & 8 & 5 \\ 8 & 7 & 6 \\ 7 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \\ 400 \\ 400 \end{pmatrix} \quad (2) \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 500 \\ 500 \\ 500 \\ 500 \\ 500 \end{pmatrix}$$

$$2.16 \quad (1) \quad \begin{pmatrix} 70 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, 1350 \quad (2) \quad \begin{pmatrix} 80 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, 1100$$

$$2.17 \quad (1) \quad \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 35 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix}, 400 \quad (2) \quad \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, 600$$

$$2.18 \quad \begin{pmatrix} 150 & 150 \\ 200 & 150 \\ 100 & 150 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15000 \\ 15000 \end{pmatrix}$$

### 3. Blockmatrizen

$$3.1 \quad \lambda = \frac{1-b}{a} \quad 3.2 \quad \mathbf{M}'\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, -1, 1), (\mathbf{M}'\mathbf{M})^5 = 81 \mathbf{M}'\mathbf{M}$$

$$3.3 \quad (1) \quad \mathbf{M}^{10} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ 10\mathbf{A} & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (2) \quad \mathbf{M}^{10} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ 10\mathbf{A} & \mathbf{A} \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad \mathbf{M}^{10} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ 10\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} \quad (4) \quad \mathbf{M}^{10} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ 10\mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3.4 \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \mathbf{Z}^4 = \mathbf{I}_4, \mathbf{Z}^5 = \mathbf{Z} \quad 3.5 \quad (\mathbf{I} - \mathbf{M})^{10} = \mathbf{I} - \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} - \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad 3.6 \quad \mathbf{M}^2 = -\mathbf{I}_4, \mathbf{M}^3 = -\mathbf{M}, \mathbf{M}^4 = \mathbf{I}_4$$

$$3.7 \quad (1) \quad \mathbf{M}^4 = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{pmatrix}, \mathbf{M}^5 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2) \quad \mathbf{M}^4 = \mathbf{I}, \mathbf{M}^5 = \mathbf{M} \quad (3) \quad \mathbf{M}^2 = \mathbf{M}^4 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A} & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \mathbf{M}^5 = \mathbf{M}$$

$$3.8 \quad (1) \quad (\mathbf{M}'\mathbf{M})^3 = \begin{pmatrix} 13\mathbf{I} & 8\mathbf{A} \\ 8\mathbf{A}' & 5\mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (2) \quad (\mathbf{M}'\mathbf{M})^3 = \begin{pmatrix} 13\mathbf{I} & 8\mathbf{I} \\ 8\mathbf{I} & 5\mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (3) \quad (\mathbf{M}'\mathbf{M})^3 = \begin{pmatrix} 5\mathbf{I} & 8\mathbf{A} \\ 8\mathbf{A}' & 13\mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (4) \quad \text{wie (2)}$$

### 4. Gauß-Algorithmus

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \emptyset \quad (2) \quad \emptyset, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(3) \quad \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \emptyset, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (4) \quad \emptyset, \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(5) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \emptyset, \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \text{ oder } \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(6) \quad \emptyset, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(7) \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \emptyset, \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \text{ oder } \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

- (8)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \emptyset$
- (9)  $\emptyset, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \text{ oder } \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$
- (10)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \emptyset, \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$  (11)  $\emptyset, \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- (12)  $\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \emptyset, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  (13)  $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \emptyset, \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$
- (14)  $\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \emptyset$  (15)  $\emptyset, \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- (16)  $\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \emptyset$  (17)  $\emptyset, \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- (18)  $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \emptyset, \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$
- (19)  $\emptyset, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \text{ oder } \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$
- (20)  $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \emptyset, \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \text{ oder } \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$
- (21)  $\emptyset, \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  (22)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \emptyset, \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$
- (23)  $\emptyset, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

## 5. Lineare Gleichungssysteme

5.1  $\begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$  5.2 (1)  $\begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$  (2)  $\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$

5.3 (1)  $\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}, 450, 510$  (2)  $\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}, 500, 690$  (3)  $\begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}, 400, 500$  (4)  $\begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix}, 300, 600$   
 (5)  $\begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 60 \end{pmatrix}, 600, 630$

5.4 (1) 36, 24, 6, 4 (2) 24, 16, 8, 7 (3) 15, 6, 5, 4 (4) 6, 6, 2, 4, 2, 2, 2 (5) 46, 11, 12, 8  
 (6) 40, 30, 10, 5

5.5 (1) 100, 100, 40, 20, 30 (2) 100, 100, 50, 40, 50 (3) 110, 90, 100, 40, 80

## 6. Inverse einer Blockmatrix

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{B} \end{pmatrix} & (2) \quad & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5/4 & 7/4 \\ 2 & 7/4 & 5/4 \end{pmatrix} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}(0, 1, -1) & \frac{1}{2} \end{pmatrix} & (3) \quad & \begin{pmatrix} (\mathbf{B}'\mathbf{B})^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \\
 (4) \quad & \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -2\mathbf{I} \\ -2\mathbf{I} & 5\mathbf{I} \end{pmatrix} & (5) \quad & \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{-1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{B} \end{pmatrix} & (6) \quad & \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{B}^{-1} & -\mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix} & (7) \quad & \begin{pmatrix} \mathbf{I}+\mathbf{B}^{-1} & -\mathbf{B}^{-1} \\ -\mathbf{B}^{-1} & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix} \\
 (8) \quad & \begin{pmatrix} \mathbf{B}(\mathbf{I}-\mathbf{B}) & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & -\mathbf{I} \end{pmatrix} & (9) \quad & \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{B}^{-1} & -\mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix} & (10) \quad & \begin{pmatrix} 3\mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ -2\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{pmatrix} & (11) \quad & \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}^{-1}-\mathbf{I} & \mathbf{B}^{-2} \end{pmatrix} \\
 (12) \quad & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ (-1, 1, -1) & 1 \end{pmatrix} & (13) \quad & \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 6 & 3 \\ 6 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ -(3, 2, 1) & 1 \end{pmatrix} \\
 (14) \quad & \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{-1}-\mathbf{I} & \mathbf{B}^2 \\ \mathbf{B}^{-2} & -\mathbf{I} \end{pmatrix} & (15) \quad & \begin{pmatrix} 2\mathbf{B} & -\mathbf{B}^{-1} \\ -\mathbf{B}^3 & \mathbf{B} \end{pmatrix} & (16) \quad & \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{-1}+\mathbf{I} & -\mathbf{B} \\ -\mathbf{B}^{-1} & \mathbf{I} \end{pmatrix} & (17) \quad & \begin{pmatrix} -\mathbf{B}(\mathbf{I}+\mathbf{B}) & \mathbf{B} \\ 2\mathbf{I}+\mathbf{B} & -\mathbf{I} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

## 7. Determinanten

$$\begin{aligned}
 7.1 \quad & (1) \quad 6, 5, 0 & (2) \quad 96, 5, 1/5, 30, 1/25, 5, 0 & (3) \quad 6, -1, 0 & (4) \quad 1, 1/2 & (5) \quad -1, 0, -2, 2 \\
 7.2 \quad & 1 & 7.3 \quad -1, -1, -1 & 7.4 \quad 1, -1 & 7.5 \quad 1/2 & 7.6 \quad 2 \\
 7.7 \quad & 6 & 7.8 \quad 2 & 7.9 \quad 5 & 7.10 \quad -5 & 7.11 \quad 6 \\
 7.12 \quad & 2 & 7.13 \quad 3 & 7.14 \quad 2 & 7.15 \quad -1 \\
 7.16 \quad & (1) \quad 20, \text{ pos. def.} & (2) \quad -17, \text{ neg. def.} & 7.17 \quad 8 & 7.18 \quad \text{nein, da } |\mathbf{A}| = 0 & 7.19 \quad 3
 \end{aligned}$$

## 8. L-R-Zerlegung

$$\begin{aligned}
 8.1 \quad & (1) \quad 4, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & (2) \quad 2, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & (3) \quad 8, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} & (4) \quad 24, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & (5) \quad 4, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
 (6) \quad & 120, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} & (7) \quad 6, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} & (8) \quad 27, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & (9) \quad 6, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & (10) \quad 60, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 (11) \quad & 24, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & (12) \quad 60, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & (13) \quad -12, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} & (14) \quad -4, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & (15) \quad 3, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\
 (16) \quad & 24, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} & (17) \quad 12, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} & (18) \quad 20, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} & (19) \quad 24, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} & (20) \quad 24, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 8.2 \quad & (1) \quad 1, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} & (2) \quad 1, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

## 9. Inverse Matrizen

$$\begin{aligned}
 9.1 \quad & (1) \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \text{ n.d.} & (2) \quad \frac{1}{4} \mathbf{A}^{-1}, (\mathbf{B}^{-1})', \mathbf{B}, \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}, \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}, \text{ n.d.} \\
 (3) \quad & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ n.d.} & (4) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & (5) \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ n.d.} \\
 9.2 \quad & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} & 9.3 \quad -2 & 9.4 \quad 12 & 9.5 \quad 3 & 9.6 \quad 7
 \end{aligned}$$

## 10. Eigenwertzerlegung

- 10.1  $4; \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$       10.2 nein;  $\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1'$ ,  $\mathbf{A}^2 = \lambda_1^2 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1'$ ,  $\mathbf{A}^{10} = \lambda_1^{10} \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1'$
- 10.3 (1)  $-27$ ; ja;  $\mathbf{A}^2 = 9 \cdot \mathbf{I}$ ,  $(\mathbf{A}^2)^{-1} = \frac{1}{9} \cdot \mathbf{I}$       (2)  $16$ ; ja;  $\mathbf{A}^2 = 4 \cdot \mathbf{I}$ ,  $(\mathbf{A}^2)^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \mathbf{I}$
- 10.4 (1)  $1, 0, 0$ ;  $\mathbf{x}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$       (2)  $1, 0$ ;  $\mathbf{x}_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$       (3)  $1, 0, 0, 0$ ;  $\mathbf{x}_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 10.5 (1)  $1$ ;  $9$ ;  $9, 0, 0$ ;  $\mathbf{x}_1 = \frac{1}{3} \mathbf{v}$       (2)  $1$ ;  $25$ ;  $25, 0, 0, 0$ ;  $\mathbf{x}_1 = \frac{1}{5} \mathbf{v}$
- 10.6 (1)  $2, 1, -1$ ;  $-2$ ; ja; indefinit      (2)  $0, -3, -3$ ;  $0$ ; nein; negativ semidefinit  
 (3)  $4, 2, -2$ ;  $-16$ ; ja; indefinit      (4)  $0, -3, -3$ ;  $0$ ; nein; negativ semidefinit  
 (5)  $7, 0, -3$ ;  $0$ ; nein; indefinit      (6)  $4, 2, 1$ ;  $8$ ; ja; positiv definit  
 (7)  $3, 1, 1$ ;  $3$ ; ja; positiv definit      (8)  $6, 2, -3$ ;  $-36$ ; ja; indefinit
- 10.7 (1)  $0$ ; nein; indefinit;  $5$       (2)  $0$ ; nein; indefinit;  $13$
- 10.8  $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{Spur}(\mathbf{A})$ ,  $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \text{Spur}(\mathbf{A}^2)$       (1)  $-2, 3$ ; indefinit;  $-6$       (2)  $2, 1$ ; positiv definit;  $2$
- 10.9 zwei Eigenwerte sind  $0$ , ein Eigenwert  $\neq 0$ ;  $\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1'$ ;  $\lambda_1 = 9$ ;  $\mathbf{x}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- 10.10 positiv definit; alle  $\lambda_i \neq 0$ ;      (1)  $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 4 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 17 \end{pmatrix}$ ;  $29$ ;  $12$       (2)  $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ ;  $9$ ;  $2$
- 10.11 (1)  $\lambda_1 + \lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -3$ ;  $3, -1$ ; indefinit;  $-3$       (2)  $\lambda_1 + \lambda_2 = 4$ ,  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 3$ ;  $3, 1$ ; positiv definit;  $12$
- 10.12  $1$ ;  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$  ( $\mathbf{A}$  idempotent);  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_i \in \{0, 1\}$ ,  $1, 0$ ; nein      10.13  $10, 5$ ;  $10b, 5b$ ;  $10 + c, 5 + c$
- 10.14  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2$ ,  $\lambda_i \in \{0, 1\}$ ;  $1, 1, 0$ ,  $\text{rg}(\mathbf{A}) = 2$ ;  $1, 0, 0$ ,  $\text{rg}(\mathbf{A} - \mathbf{I})^2 = 1$

## 11. Singulärwertzerlegung

Bezeichnungen bei der Lösung eines LGS mittels SWZ:  $r = \text{rg}(\mathbf{A}) = \text{Anzahl der } w_i \neq 0$

Fall I:  $\text{rg}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \text{rg}(\mathbf{A})$  und  $\mathbf{A}$  besitzt vollen Rang,

also  $\mathbf{b}'\mathbf{b} = (\mathbf{u}_1'\mathbf{b})^2 + \dots + (\mathbf{u}_r'\mathbf{b})^2$  und alle  $w_i \neq 0$

$\Rightarrow$  es gibt genau 1 Lösung und  $\mathbf{x}^+$  ist dieser Lösungsvektor

Fall II:  $\text{rg}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \text{rg}(\mathbf{A})$  und  $\mathbf{A}$  besitzt vollen Rang,

also  $\mathbf{b}'\mathbf{b} \neq (\mathbf{u}_1'\mathbf{b})^2 + \dots + (\mathbf{u}_r'\mathbf{b})^2$  und alle  $w_i \neq 0$

$\Rightarrow$  es gibt keine Lösung und  $\mathbf{x}^+$  ist der (eindeutig bestimmte) Vektor, für den  $|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}|$  minimal wird

Fall III:  $\text{rg}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \text{rg}(\mathbf{A})$  und  $\mathbf{A}$  besitzt nicht vollen Rang,

also  $\mathbf{b}'\mathbf{b} = (\mathbf{u}_1'\mathbf{b})^2 + \dots + (\mathbf{u}_r'\mathbf{b})^2$  und nicht alle  $w_i \neq 0$

$\Rightarrow$  es gibt  $\infty$  viele Lösungen und  $\mathbf{x}^+$  ist der betragsmäßig kleinste Lösungsvektor

Fall IV:  $\text{rg}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \text{rg}(\mathbf{A})$  und  $\mathbf{A}$  besitzt nicht vollen Rang

also  $\mathbf{b}'\mathbf{b} \neq (\mathbf{u}_1'\mathbf{b})^2 + \dots + (\mathbf{u}_r'\mathbf{b})^2$  und nicht alle  $w_i \neq 0$

$\Rightarrow$  es gibt keine Lösung und  $\mathbf{x}^+$  ist der betragsmäßig kleinste Vektor, für den  $|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}|$  minimal wird

- 11.1 (1)  $2$  (nicht voller Rang);  $-$ ; Fälle III oder IV möglich  
 (2)  $3$  (voller Rang); Linksinverse; Fälle I oder II möglich  
 (3)  $1$  (nicht voller Rang);  $-$ ; Fall III;  $\mathbf{x}^+ = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 1,2 \end{pmatrix}$       (4)  $2$  (voller Rang); Linksinverse; Fall II;  $\mathbf{x}^+ = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$   
 (5)  $3$  (voller Rang); Inverse; Fall I;  $\mathbf{x}^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$       (6)  $2$  (voller Rang); Linksinverse; Fall II;  $\mathbf{x}^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$   
 (7)  $2$  (voller Rang); Inverse; Fall I;  $\mathbf{x}^+ = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$       (8)  $1$  (nicht voller Rang);  $-$ ; Fall III;  $\mathbf{x}^+ = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$   
 (9)  $1$  (nicht voller Rang);  $-$ ; Fall IV;  $\mathbf{x}^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$       (10)  $2$  (voller Rang); Linksinverse; Fall II;  $\mathbf{x}^+ = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

- (11) 2 (voller Rang); Inverse; Fall I;  $\mathbf{x}^+ = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  (12) 1 (nicht voller Rang); –; Fall III;  $\mathbf{x}^+ = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$   
 (13) 2 (voller Rang); Linksinverse; Fall I;  $\mathbf{x}^+ = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  (14) 2 (voller Rang); Inverse; Fall I;  $\mathbf{x}^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$   
 (15) 1 (nicht voller Rang); –; Fall IV;  $\mathbf{x}^+ = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  (16) 3 (voller Rang); Inverse; Fall I;  $\mathbf{x}^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ -3 \end{pmatrix}$   
 (17) 2 (voller Rang); Linksinverse; Fall II;  $\mathbf{x}^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  (18) 2 (nicht voller Rang); –; Fall IV;  $\mathbf{x}^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$   
 (19) 3 (voller Rang); Linksinverse; Fall II;  $\mathbf{x}^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  (20) 2 (voller Rang); Linksinverse; Fall II;  $\mathbf{x}^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$   
 (21) 2 (nicht voller Rang); –; Fall III;  $\mathbf{x}^+ = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

11.2 (1),(2),(3) (a)  $\text{rg}(\mathbf{A}) = 1$ ,  $w_1 \neq 0$ ,  $w_2 = 0 = w_3$ ,  $\mathbf{A} = w_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1'$ ;

- (1)  $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $w_1 = 9$ ; Fall III;  $\mathbf{x}^+ = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$   
 (2)  $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $w_1 = 9$ ; Fall IV;  $\mathbf{x}^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$   
 (3)  $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $w_1 = 9$ ; Fall III;  $\mathbf{x}^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

## 12. Lineare Optimierung

12.1 3, 2

12.2 (I) Endtableau, (II) Anfangstab., (III) Zwischentab.; 8, 4; 24;  $F_1$ : 4; Anfangstab.:  $x_1$  bzw.  $x_2$  aufnehmen,  $u_3$  bzw.  $u_1$  eliminieren; Zwischentab.:  $x_2$  aufnehmen,  $u_2$  eliminieren.

- 12.3 (1)  $u_1$  aufnehmen,  $u_3$  eliminieren; 10, 8; 36;  $F_1$ : 2,  $F_2$ : 2; 0, 0, 2/3, 2/3  
 (2) ( $x_2$  aufnehmen,  $x_1$  eliminieren) oder ( $x_3$  aufnehmen,  $u_3$  eliminieren); 10, 0, 20; 340;  $F_1$ : 5; 0, 3, 5  
 (3)  $x_3$  aufnehmen,  $u_3$  eliminieren; 30, 0, 20; 600;  $F_2$ : 10; 10, 0, 7, 5  
 (4)  $x_2$  aufnehmen,  $u_3$  eliminieren; 10, 20; 550;  $F_2$ : 10,  $F_4$ : 20; 10, 0, 5, 0  
 (5)  $x_2$  aufnehmen,  $u_2$  oder  $u_4$  eliminieren; 30, 20, 10; 600; keine freie Kapazität; 0, 0, 0, 10  
 (6)  $x_2$  aufnehmen,  $u_3$  eliminieren; 10, 60; 920;  $F_2$ : 10,  $F_4$ : 40; 8, 0, 4, 0  
 (7)  $x_2$  aufnehmen,  $u_3$  eliminieren; 20, 10; 260;  $F_2$ : 10,  $F_4$ : 30; 4, 0, 2, 0  
 (8)  $x_2$  aufnehmen,  $u_1$  eliminieren; 10, 20, 30; 800;  $F_4$ : 5; 2, 5, 12, 5, 7, 5, 0  
 (9)  $x_1$  aufnehmen,  $u_1$  oder  $u_3$  eliminieren; 10, 0, 20; 80; keine freie Kapazität; 0, 1, 1/2  
 (10)  $x_2$  aufnehmen,  $u_3$  eliminieren; 5, 30; 1550;  $F_2$ : 10,  $F_4$ : 20; 40, 0, 10, 0  
 (11)  $x_2$  aufnehmen,  $u_3$  eliminieren; 40, 120; 5520;  $F_2$ : 80,  $F_4$ : 60; 12, 0, 12, 0  
 (12)  $x_3$  aufnehmen,  $u_4$  eliminieren; 14, 12, 3; 215;  $F_2$ : 3; 5/3, 0, 10/3, 5/3  
 (13)  $x_2$  aufnehmen,  $u_3$  eliminieren; 8, 48; 1472;  $F_2$ : 16,  $F_4$ : 60; 16, 0, 8, 0  
 (14)  $x_2$  aufnehmen,  $u_3$  eliminieren; 20, 30, 0; 600;  $F_1$ : 10; 0, 7, 5, 10  
 (15)  $x_2$  aufnehmen,  $u_3$  eliminieren; 10, 60; 4600;  $F_2$ : 60,  $F_4$ : 100; 40, 0, 20, 0  
 (16) ( $x_1$  aufnehmen,  $u_2$  eliminieren) oder ( $x_3$  aufnehmen,  $x_2$  eliminieren); 20, 10, 0; 340;  $F_3$ : 5; 3, 5, 0  
 (17)  $x_1$  aufnehmen,  $u_3$  eliminieren; 60, 10; 4600;  $F_1$ : 100,  $F_4$ : 60; 0, 40, 20, 0  
 (18) ( $x_1$  aufnehmen,  $u_1$  eliminieren) oder ( $x_2$  aufnehmen,  $x_3$  eliminieren); 20, 0, 10; 340;  $F_2$ : 5; 5, 0, 3  
 (19) ( $x_4$  aufnehmen,  $u_3$  eliminieren) oder ( $x_5$  aufnehmen,  $u_3$  oder  $u_4$  elimin.); 0, 4, 0, 2, 0; 24;  $F_1$ ,  $F_4$ : 6; 0, 4, 1, 0

## KLAUSUR

Die 90-minütige Semesterabschlussklausur zur Vorlesung Lineare Algebra umfasst jeweils 9 gleichgewichtige Aufgaben, so dass im Durchschnitt pro Aufgabe 10 Minuten zur Verfügung stehen. Bei jeder Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar, also 45 Punkte insgesamt. Auch für richtige Teillösungen werden Punkte vergeben. Die Klausur gilt als bestanden, wenn mindestens 20 Punkte erzielt werden. Die Noten werden nach folgendem Punkteschema vergeben:

| Punkte | 0 – 19     | 20 – 29     | 30 – 35      | 36 – 41 | 42 – 45  |
|--------|------------|-------------|--------------|---------|----------|
| Note   | Mangelhaft | Ausreichend | Befriedigend | Gut     | Sehr gut |

Es sind keinerlei Hilfsmittel bei der Klausur zugelassen, also weder Taschenrechner noch Bücher, Vorlesungsbeilagen, Aufgabensammlung, Schmierpapier oder Ähnliches. Bitte schreiben Sie nur mit Kuli oder Füller, *nicht* mit Bleistift.

Es haben nur solche Aufgaben Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg eindeutig erkennbar ist.

Alle bisher gestellten Typen von Klausuraufgaben sind in der Aufgabensammlung enthalten. Die nachstehende Tabelle zeigt, welche der Aufgaben in welchen Klausuren gestellt wurden.

| Klausur  | Aufg. 1  | Aufg. 2  | Aufg. 3     | Aufg. 4  | Aufg. 5 | Aufg. 6     | Aufg. 7   | Aufg. 8   | Aufg. 9   |
|----------|----------|----------|-------------|----------|---------|-------------|-----------|-----------|-----------|
| WS 91/92 | 2.5      | 2.11 (2) | 3.4         | 8.1 (2)  | 4 (2)   | Anal. 12.5  | 10.2      | 11.1 (2)  | 12.2      |
| SS 92    | 2.6      | 2.11 (3) | 6 (2)       | 8.1 (3)  | 4 (3)   | 5.3 (1)     | wie 10.6  | 11.1 (3)  | wie 12.2  |
| WS 92/93 | 7.2      | 2.13 (1) | 6 (3)       | 8.2 (1)  | 4 (4)   | Anal. 12.4  | 10.3 (1)  | 11.1 (4)  | 12.3 (1)  |
| SS 93    | 2.7      | 2.14 (1) | 3.5         | 9.2      | 4 (5)   | 5.4 (1)     | 10.4 (1)  | 11.1 (5)  | 12.3 (2)  |
| WS 93/94 | 7.3      | 2.12 (1) | 6 (4)       | 8.1 (4)  | 4 (6)   | 5.4 (2)     | 10.5 (1)  | 11.2 (1)  | 12.3 (3)  |
| SS 94    | 3.6      | 2.15 (1) | 6 (5)       | 8.2 (2)  | 4 (7)   | 5.3 (2)     | 10.6 (1)  | 11.1 (6)  | 12.3 (4)  |
| WS 94/95 | 7.4      | 2.13 (2) | 6 (6)       | 8.1 (5)  | 4 (8)   | 5.4 (4)     | 10.7 (1)  | 11.1 (7)  | 12.3 (5)  |
| SS 95    | 7.5      | 2.12 (3) | 3.7 (1)     | 8.1 (6)  | 4 (9)   | 5.3 (3)     | 10.6 (2)  | 11.1 (8)  | 12.3 (6)  |
| WS 95/96 | 7.6      | 2.16 (1) | 6 (7)       | 8.1 (7)  | 4 (10)  | 5.4 (3)     | 10.8 (1)  | 11.1 (9)  | 12.3 (7)  |
| SS 96    | 2.8      | 2.14 (2) | 6 (8)       | 8.1 (8)  | 4 (11)  | 5.2 (1)     | 10.6 (3)  | 11.1 (10) | 12.3 (8)  |
| WS 96/97 | 7.7      | 2.17 (1) | 3.3 (1)     | 8.1 (9)  | 4 (12)  | 5.5 (1)     | 10.9      | 11.1 (11) | 12.3 (9)  |
| SS 97    | 7.8      | 2.12 (2) | 6 (9)       | 8.1 (10) | 4 (13)  | wie 5.4 (2) | 10.10 (1) | 11.1 (12) | 12.3 (10) |
| WS 97/98 | 7.9      | 2.18     | 3.8 (1)     | 8.1 (11) | 4 (14)  | 5.5 (2)     | 10.11 (1) | 11.1 (13) | 12.3 (11) |
| SS 98    | 7.10     | 2.13 (3) | 6 (10)      | 8.1 (12) | 4 (15)  | 5.2 (2)     | 10.6 (4)  | 11.1 (14) | 12.3 (12) |
| WS 98/99 | 2.9      | 2.16 (2) | 3.8 (2)     | 8.1 (13) | 4 (16)  | 5.4 (5)     | 10.4 (2)  | 11.2 (2)  | 12.3 (13) |
| SS 99    | 7.11     | 2.15 (2) | 6 (11)      | 8.1 (14) | 4 (17)  | 5.3 (4)     | 10.12     | 11.1 (15) | 12.3 (14) |
| WS 99/00 | 2.10     | 2.12 (4) | 3.3 (4)     | 8.1 (15) | 4 (18)  | 5.4 (6)     | 10.8 (2)  | 11.1 (16) | 12.3 (15) |
| SS 2000  | 7.12     | 2.17 (2) | 6 (12)      | 8.1 (16) | 4 (19)  | 5.5 (3)     | 10.6 (5)  | 11.1 (17) | 12.3 (16) |
| WS 00/01 | 7.13     | 2.13     | 6 (13)      | 8.1 (17) | 4 (20)  | wie 5.4 (2) | 10.11 (2) | 11.1 (18) | 12.3 (17) |
| SS 01    | 9.3      | 2.15     | 3.7 (2)     | 8.1 (18) | 4 (21)  | 5.3         | 10.10 (2) | 11.1 (19) | 12.3 (18) |
| WS 01/02 | 7.14     | 2.14 (2) | 6 (8)       | 8.1 (9)  | 4 (12)  | 5.4 (3)     | 10.7 (2)  | 11.1 (8)  | 12.3 (4)  |
| SS 02    | 7.15     | 2.18     | 3.8 (3)     | 8.1 (12) | 4 (16)  | 5.4 (4)     | 10.6 (6)  | 11.1 (9)  | 12.3 (9)  |
| WS 02/03 | 7.16 (1) | 2.13     | 6 (14)      | 8.1 (19) | 4       | 5.3 (5)     | 10.4 (3)  | 11.1 (20) | 12.3      |
| SS 03    | 9.4      | 2.12     | 3.7 (3)     | 8.1 (20) | 4 (22)  | wie 5.5 (3) | 10.13     | 11.2 (3)  | 12.3 (19) |
| WS 03/04 | 7.17     | 2.16     | 3.8 (4)     | 8.1      | 4       | wie 5.5 (3) | 10.3 (2)  | 11.1 (21) | 12.3      |
| SS 04    | 7.18     | 2.11     | 6 (15)      | 8.1      | 4       | 5.3         | 10.11     | 11.1      | 12.3      |
| WS 04/05 | 9.5      | 2.15     | 6 (11)      | 8.1      | 4       | 5.2         | 10.5 (2)  | 11.1      | 12.3 (10) |
| SS 05    | 7.16 (2) | 2.12     | wie 3.7 (3) | 8.1      | 4       | wie 5.4 (6) | 10.6 (7)  | 11.1      | 12.3 (8)  |
| WS 05/06 | wie 7.15 | 2.16     | 6 (16)      | 8.1      | 4       | 5.3         | 10.14     | 11.1 (16) | 12.3      |
| SS 06    | 7.19     | 2.14     | 6 (17)      | 8.1      | 4 (23)  | 5.3         | 10.4 (2)  | 11.1      | 12.3      |
| WS 06/07 | 9.6      | 2.13     | 6           | 8.1      | 4       | wie 5.5 (3) | 10.6 (8)  | 11.1      | 12.3      |
| SS 07    | 7.14     | 2.14 (2) | 6 (8)       | 8.1 (9)  | 4 (12)  | 5.4 (3)     | 10.7 (2)  | 11.1 (8)  | 12.3 (4)  |