Fakultät für
Wirtschaftswissenschaft
Dr. Alfred Bischoff

RUHR
UNIVERSITÄT
BOCHUM

AUFGABENSAMMLUNG
ZUR
MATHEMATIK FÜR ÖKONOMEN

Inhalt

Stand: 12.2.2019

1. Vektoren

1.1 Berechnen Sie - falls definiert - die Ausdrücke unter (1) - (8) mit

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\mathbf{d} = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$.

(1) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{b}-\mathbf{a}$, $\mathbf{a}+\mathbf{b}'$, $\mathbf{a}'+\mathbf{b}'$, $\mathbf{b}'-\mathbf{a}'$, $\mathbf{a}-\mathbf{c}$, $\mathbf{d}'-\mathbf{c}$

(2) $\lambda_1\mathbf{a}+\lambda_1\mathbf{b}$, $\lambda_2\mathbf{b}-\lambda_2\mathbf{a}$, $\lambda_1\mathbf{c}+\lambda_2\mathbf{c}$, $\lambda_1\mathbf{a}-\lambda_2\mathbf{b}'$

(3) $\mathbf{a}'\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\mathbf{b}$, $\mathbf{a}'\mathbf{b}'$, $\mathbf{a}'\mathbf{c}$, $\mathbf{d}'\mathbf{b}$, $\mathbf{c}'\mathbf{d}$, $\mathbf{d}'\mathbf{c}$

(4) $(\lambda_1\mathbf{a})'\mathbf{b}$, $\mathbf{a}'(\lambda_2\mathbf{b})$, $\lambda_1\mathbf{a}'\mathbf{b}-\mathbf{c}'\mathbf{d}$

(5) $\mathbf{a}'\mathbf{a}+2\mathbf{a}'\mathbf{b}+\mathbf{b}'\mathbf{b}$, $\mathbf{a}'\mathbf{a}-2\mathbf{a}'\mathbf{b}+\mathbf{b}'\mathbf{b}$, $\mathbf{a}'\mathbf{a}-\mathbf{b}'\mathbf{b}$

(6) $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}-\mathbf{a}|$, $|\lambda_1(\mathbf{b}-\mathbf{a})|$, $|\lambda_2(\mathbf{d}-\mathbf{c})|$

(7) $|\mathbf{1}_n|$, $|\mathbf{a}+\lambda_2\mathbf{1}|$, $|\mathbf{a}-\frac{\mathbf{a}'\mathbf{1}}{2}\mathbf{1}|$

(8) $\overline{c} = \frac{1}{3}\mathbf{c}'\mathbf{1}$, $\mathbf{c}_z = \mathbf{c}-\overline{c}\cdot\mathbf{1}$, $|\mathbf{c}_z|$, $\mathbf{c}_{ZN} = \frac{1}{|\mathbf{c}_z|}\mathbf{c}_z$

1.2 Bestimmen Sie die Winkel $\varphi_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$, $\varphi_{\mathbf{a},\mathbf{c}}$, $\varphi_{\mathbf{b},\mathbf{c}}$, $\varphi_{2\mathbf{a},3\mathbf{b}}$, $\varphi_{-\mathbf{a},\mathbf{b}}$, $\varphi_{-2\mathbf{a},-3\mathbf{b}}$ zwischen den Vektoren

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$!

1.3 Bestimmen Sie $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ so, dass $\mathbf{a} = \begin{pmatrix}\lambda_1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix}1\\\lambda_2\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix}1\\1\\\lambda_3\end{pmatrix}$ paarweise orthogonal sind!

1.4 Sind folgende Vektoren linear abhängig?

(1) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$

1.5 Bilden Sie für $\mathbf{a} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\mathbf{d} = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ die äußeren Produkte

$\mathbf{a}\mathbf{b}'$, $\mathbf{b}\mathbf{a}'$, $\mathbf{a}\mathbf{c}'$, $\mathbf{c}\mathbf{a}'$, $\mathbf{d}\mathbf{b}'$, $\mathbf{d}\mathbf{c}'$, $\mathbf{d}\mathbf{b}'-\mathbf{d}\mathbf{a}'-\mathbf{c}\mathbf{b}'+\mathbf{c}\mathbf{a}'$, $\mathbf{1}_n\mathbf{c}'$, $\mathbf{a}\mathbf{1}_n'$, $\mathbf{1}_m\mathbf{1}_n'$, $\mathbf{a}\mathbf{e}_i'$, $\mathbf{e}_i\mathbf{b}'$.

2. Matrizen

2.1 Berechnen Sie - falls definiert- die Ausdrücke (1) bis (14), wobei

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1 & -4\\-2 & 5\\3 & -6\end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\2 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

(1) $\mathbf{A}'\mathbf{A}$	(2) $\mathbf{A}\mathbf{A}'$	(3) $\mathbf{A}^2$	(4) $\mathbf{A}\mathbf{B}$	(5) $\mathbf{B}\mathbf{A}$
(6) $\mathbf{A}\mathbf{C}$	(7) $\mathbf{A}'\mathbf{C}$	(8) $\mathbf{C}\mathbf{A}$	(9) $\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{A}$	(10) $\mathbf{A}\mathbf{a}$
(11) $\mathbf{b}'\mathbf{A}\mathbf{a}$	(12) $\mathbf{a}'\mathbf{B}\mathbf{b}$	(13) $\mathbf{a}'\mathbf{A}'\mathbf{A}\mathbf{a}$	(14) $\mathbf{x}'\mathbf{C}\mathbf{x}$	

2.2 Bestimmen Sie den Rang folgender Matrizen:

(1) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 4\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 4 & 6\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 2\\3 & 1\end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\3 & 1 & 0\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}$

2.3 Bestimmen Sie Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass für die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1 & 1 & c\\1 & b & 0\\a & 1 & 1\end{pmatrix}$ gilt: $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ ist eine Diagonalmatrix.

2.4 Bestimmen Sie die Matrix $\mathbf{A}$ so, dass für $\mathbf{B} = \begin{pmatrix}1 & b\\b & 1\end{pmatrix}$, $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ gilt: $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{A}+\mathbf{B}$.

2.5 Bestimmen Sie Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a + b + 1 = 0$ und $\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3 & 6\\1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$.

2.6 Bestimmen Sie eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Matrix $\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & a & a\\a & 2 & a\\a & a & 2\end{pmatrix}$ idempotent ist.

2.7 Bestimmen Sie für $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass $\mathbf{A} = \mathbf{ab}'$ idempotent ist.

2.8 Bestimmen Sie für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Zahl $a > 0$ so, dass $\text{Spur}\,(\,\mathbf{Abb}'\mathbf{A}'\,) = 11$ ist.

2.9 Bestimmen Sie für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ so, dass $\text{Spur}\,(\,\mathbf{Abb}'\mathbf{A}'\,) = \text{Spur}(\,\mathbf{A}^2\,)$ ist.

2.10 Bestimmen Sie für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ so, dass $\text{Spur}(\,\mathbf{A\,D\,A}'\,) = \text{Spur}(\,\mathbf{A}'\,\mathbf{A}\,)$.

2.11 Ein Unternehmen stellt aus den Rohstoffen R_i die Zwischenprodukte Z_j und daraus die Endprodukte E_k her. Die dazu benötigten Einsatzmengen, die Rohstoffkosten sowie das Produktionssoll liegen in Tabellenform vor.

(a) Stellen Sie die Angaben durch zwei Matrizen und zwei Vektoren dar. Benennen Sie die Größen und verwenden Sie *ausschließlich* diese *benannten* Größen zur Beantwortung folgender Fragen:

(b) Welche Rohstoffmengen sind zur Produktion je einer Mengeneinheit (ME) der Endprodukte E_k notwendig?

(c) Wie hoch ist der Bedarf an Rohstoffen zur Fertigung des Produktionssolls?

(d) Wie hoch sind die dabei insgesamt entstehenden Rohstoffkosten?

(1)

	Z_1	Z_2	Z_3	Rohstoffkosten
R_1	1	0	2	2
R_2	0	2	1	1
R_3	2	1	0	1
R_4	1	1	1	2

	E_1	E_2
Z_1	1	1
Z_2	0	2
Z_3	2	0
Produktionssoll	5	10

(2)

	Z_1	Z_2	Z_3	Rohstoffkosten
R_1	1	1	1	1
R_2	2	1	0	2
R_3	0	2	1	2
R_4	1	0	2	1

	E_1	E_2
Z_1	1	1
Z_2	2	0
Z_3	0	2
Produktionssoll	10	5

(3)

	Z_1	Z_2	Z_3	Rohstoffkosten
R_1	1	0	2	1
R_2	1	1	0	2
R_3	0	1	1	2
R_4	1	1	2	1

	E_1	E_2
Z_1	1	3
Z_2	2	0
Z_3	1	3
Produktionssoll	5	10

2.12 Ein Unternehmen stellt die Produkte P_i auf den Maschinen M_j her. Die dazu benötigten Zeiten, das Produktionssoll sowie die Kosten pro Maschinenstunde liegen in Tabellenform vor.

(a) Stellen Sie die Angaben durch eine Matrix und zwei Vektoren dar. Benennen Sie die Größen und verwenden Sie *ausschließlich* diese *benannten* Größen zur Beantwortung folgender Fragen:

(b) Welche Maschinenkosten verursacht die Fertigung je eines Stückes der Produkte P_i ?

(c) Wie lange wird jede der Maschinen M_j zur Herstellung des Produktionssolls insgesamt eingesetzt?

(d) Welche Maschinenkosten entstehen dabei insgesamt?

(1)

	M_1	M_2	M_3	Produktionssoll
P_1	16	10	10	30
P_2	22	0	10	10
P_3	13	15	10	20
Maschinenkosten	100	60	80	

(Benötigte Zeiten in Minuten / Stück)

(2)

	M_1	M_2	M_3	Produktionssoll
P_1	30	25	22	30
P_2	20	15	36	20
P_3	20	45	12	10
Maschinenkosten	60	80	100	

(Benötigte Zeiten in Minuten / Stück)

(3)

	M_1	M_2	M_3	M_4	Produktionssoll
P_1	1	–	2	1	200
P_2	–	1	–	2	100
Maschinenkosten	70	100	90	150	

(Benötigte Zeiten in Stunden / Stück)

(4)

	M_1	M_2	M_3	Produktionssoll
P_1	5	0	10	12
P_2	0	10	5	24
P_3	12	0	0	15
Maschinenkosten	100	85	70	

(Benötigte Zeiten in Minuten / Stück)

2.13 Ein landwirtschaftlicher Betrieb baut die Fruchtarten F_i an. Dabei setzt er die Maschinen M_j ein. Die benötigten Zeiten (in Stunden / Hektar), die Anbaufläche (in Hektar) sowie die Maschinenkosten (in € / Stunde) liegen in Tabellenform vor.

(a) Stellen Sie die Angaben durch eine Matrix und zwei Vektoren dar. Benennen Sie die Größen und verwenden Sie *ausschließlich* diese *benannten* Größen zur Beantwortung folgender Fragen:

(b) Wie hoch sind die Kosten je Hektar Anbaufläche für die einzelnen Fruchtarten?

(c) Wie lange wird jede der Maschinen M_j insgesamt eingesetzt?

(d) Wie hoch sind die dabei entstehenden Gesamtkosten?

(1)

	M_1	M_2	Anbaufläche
F_1	7	2	2
F_2	3	10	1
F_3	1	2	3
Maschinenkosten	50	75	

(2)

	M_1	M_2	M_3	Anbaufläche
F_1	3	2	1	20
F_2	2	4	6	10
Maschinenkosten	50	100	150	

(3)

	M_1	M_2	M_3	Anbaufläche
F_1	2	3	6	3
F_2	4	5	0	2
F_3	6	1	2	1
Maschinenkosten	100	80	60	

2.14 In der Mensa werden an einem Tag 3 verschiedene Menus M_1, M_2, M_3 angeboten. Die im Wesentlichen benötigten Zutaten $Z_1, \ldots, Z_6$ (in kg / Menu), die Einkaufspreise der Zutaten (in € / kg) sowie die Anzahl ausgegebener Menus liegen in Tabellenform vor.

(a) Stellen Sie die Angaben durch eine Matrix und zwei Vektoren dar. Benennen Sie die Größen und verwenden Sie *ausschließlich* diese *benannten* Größen zur Beantwortung folgender Fragen:

(b) Wie hoch sind die Kosten der Zutaten pro Menu für M_1, M_2 bzw. M_3?

(c) Welche Mengen an Zutaten $Z_1, \ldots, Z_6$ werden insgesamt zur Herstellung aller ausgegebenen Menus benötigt?

(d) Wie hoch sind die dabei entstehenden Gesamtkosten für alle Zutaten?

(1)

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Auszugebende Menus
M_1	0,2	–	–	0,1	–	0,1	4000
M_2	–	0,1	–	–	0,2	0,1	2000
M_3	–	–	0,1	0,1	0,2	–	4000
Preise	1	2	2	8	4	3	

(2)

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Auszugebende Menus
M_1	0,1	–	0,2	0,2	–	–	2000
M_2	–	0,1	–	0,1	0,2	–	4000
M_3	0,1	–	0,1	–	–	0,2	4000
Preise	2	3	4	5	6	7	

2.15 Ein Unternehmen stellt aus den Rohstoffen R_i die Zwischenprodukte Z_j her. Aus diesen Zwischenprodukten werden die Vorprodukte V_k erzeugt und daraus die Endprodukte E_1, E_2, E_3 .
Die zur Herstellung benötigten Mengen sind in drei Tabellen zusammengefasst.

(a) Stellen Sie die Angaben durch drei Matrizen und einen Vektor dar. Benennen Sie die Größen und verwenden Sie *ausschließlich* diese *benannten* Größen zur Beantwortung folgender Fragestellungen:

(b) Bestimmen Sie die Matrix des Rohstoffverbrauchs für die Vorprodukte V_k .

(c) Ermitteln Sie die Matrix des Rohstoffverbrauchs für die Endprodukte E_1 , E_2 , E_3 .

(d) Wie hoch ist der Rohstoffbedarf zur Herstellung des Produktionssolls?

(1)

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
R_1	0	1	0	1
R_2	1	0	0	1
R_3	1	0	1	0
R_4	0	1	1	0
R_5	0	1	0	1

	V_1	V_2	V_3	V_4
Z_1	3	1	1	2
Z_2	4	1	0	1
Z_3	0	0	1	1
Z_4	1	0	0	0

	E_1	E_2	E_3
V_1	1	1	1
V_2	1	1	2
V_3	1	2	0
V_4	1	0	0

Produktionssoll: 10 ME E_1 , 20 ME E_2 , 30 ME E_3.

(2)

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
R_1	0	1	0	1
R_2	1	1	1	0
R_3	1	0	0	1
R_4	1	1	1	0
R_5	0	1	0	1

	V_1	V_2	V_3	V_4
Z_1	1	1	1	2
Z_2	1	1	1	2
Z_3	0	1	2	1
Z_4	1	2	3	3

	E_1	E_2	E_3
V_1	1	3	0
V_2	0	0	2
V_3	2	1	1
V_4	2	1	0

Produktionssoll: 5 ME E_1 , 10 ME E_2 , 15 ME E_3.

2.16 Ein Weihnachtsmann steht vor der Aufgabe, einige ausgesuchte Haushalte aus vier Ländern L_1 , L_2 , L_3 , L_4 mit Gabentellern zu versorgen. Der Gabenteller setzt sich aus Früchten F, Nüssen N und Süßigkeiten S zusammen. Die von Land zu Land unterschiedliche Zusammensetzung (in kg / Teller), die Anzahl der zu beliefernden Haushalte sowie die Einkaufspreise der Zutaten (in € / kg) liegen in Tabellenform vor.

(a) Stellen Sie die obigen Angaben durch eine Matrix und zwei Vektoren dar. Benennen Sie die Größen und verwenden Sie *ausschließlich* diese *benannten* Größen zur Beantwortung folgender Fragen:

(b) Wie viele kg Früchte, Nüsse bzw. Süßigkeiten werden zur Versorgung aller Haushalte insgesamt benötigt?

(c) Welche Kosten pro Gabenteller entstehen in jedem der vier Länder?

(d) Wie hoch sind die Gesamtkosten zur Versorgung aller Haushalte?

(1)

	L_1	L_2	L_3	L_4	Einkaufspreise
F	0,2	0,4	–	0,6	5
N	0,1	–	0,1	0,1	10
S	0,2	0,1	0,3	–	20
Anzahl Haushalte	100	50	50	50	

(2)

	L_1	L_2	L_3	L_4	Einkaufspreise
F	0,4	0,3	0,4	0,5	5
N	0,3	0,2	0,2	0,1	10
S	–	0,1	0,2	0,1	15
Anzahl Haushalte	50	50	50	50	

2.17 Ein Unternehmen verkauft die Maschinen M_i in die Länder L_j. Die Absätze pro Land und Maschine (in Stück) sowie die Verkaufspreise der Maschinen (in T€ / Stück) liegen in Tabellenform vor.

(a) Stellen Sie die Angaben durch eine Matrix und einen Vektor dar.

Verwenden Sie *ausschließlich* die Matrix-Vektor-Schreibweise zur Beantwortung folgender Fragen:

(b) Welche Umsatzerlöse werden in jedem Land erzielt?

(c) Wie hoch ist der Absatz für jede Maschine?

(d) Welchen Gesamtumsatz erwirtschaftet das Unternehmen?

(1)

	M_1	M_2	M_3
L_1	7	2	3
L_2	10	5	0
L_3	7	5	1
L_4	11	3	1
Verkaufspreise	5	10	15

(2)

	M_1	M_2	M_3	M_4
L_1	3	1	1	3
L_2	9	2	1	1
L_3	3	2	3	1
Verkaufspreise	10	20	30	40

2.18 Ein Unternehmen stellt die Produkte P_1, P_2, P_3 auf den Maschinen M_1, M_2 her. Die Herstellung kann an zwei alternativen Standorten S_1, S_2 mit unterschiedlichen Produktionskosten erfolgen. Die Fertigungszeiten pro Maschine (in Stunden/Stück), das Produktionssoll sowie die Kosten pro Maschinenstunde an den beiden Standorten liegen in Tabellenform vor:

Produktionszeiten	M_1	M_2	Produktionssoll
P_1	2	0	30
P_2	1	1	40
P_3	0	2	30

Maschinenkosten	S_1	S_2
M_1	75	100
M_2	75	50

(a) Stellen Sie die Angaben durch zwei Matrizen und einen Vektor dar. Benennen Sie die Größen und verwenden Sie *ausschließlich* diese *benannten* Größen zur Beantwortung folgender Fragestellungen:

(b) Ermitteln Sie die Matrix **K** der Fertigungskosten (k_{ij} = Fertigungskosten von Produkt P_i am Standort S_j).

(c) Wie lange wird jede der Maschinen M_1, M_2 zur Herstellung des Produktionssolls insgesamt eingesetzt?

(d) Welche Gesamtkosten entstünden dabei an jedem der beiden Standorte?

3. Gauß-Algorithmus

Während der Durchführung des Gauß-Algorithmus bei verschiedenen linearen Gleichungssystemen ergeben sich die folgenden Darstellungen. Geben Sie jeweils die Lösungsmenge des Gleichungssystems an.

(1)

(a)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	1	2	8
1	3	0	8
2	3	–1	8

(b)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	1	2	8
1	3	0	8
1	–3	6	9

(c)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	1	2	8
1	3	0	8
1	2	1	8

(2)

(a)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	2	3	4
4	5	6	10
1	1	1	2

(b)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	2	3	4
4	5	6	10
2	3	2	4

(c)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	2	3	4
4	5	6	10
5	7	9	11

(3)

x_1	x_2	x_3	r.S.	x_1	x_2	x_3	r.S.	x_1	x_2	x_3	r.S.
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	3	5	6	1	3	5	6	1	3	5	6
0	1	2	3	0	1	2	2	1	0	1	2

(4)

x_1	x_2	x_3	r.S.	x_1	x_2	x_3	r.S.	x_1	x_2	x_3	r.S.
1	3	5	14	1	3	5	14	1	3	5	14
1	2	3	10	1	2	3	10	1	2	3	10
3	4	5	22	3	4	15	32	3	4	5	32

(5)

x_1	x_2	x_3	r.S.	x_1	x_2	x_3	r.S.	x_1	x_2	x_3	r.S.
0	1	1	2	0	1	1	2	0	1	1	2
1	0	2	3	1	0	2	3	1	0	2	3
1	2	4	8	1	1	3	5	2	1	1	4

(6)

x_1	x_2	x_3	r.S.	x_1	x_2	x_3	r.S.	x_1	x_2	x_3	r.S.
1	2	3	16	1	2	3	16	1	2	3	16
0	1	2	7	0	1	2	7	0	1	2	7
−1	−1	4	1	1	1	1	10	1	4	7	30

(7)

x_1	x_2	x_3	r.S.	x_1	x_2	x_3	r.S.	x_1	x_2	x_3	r.S.
1	1	1	6	1	1	1	6	1	1	1	6
2	3	3	16	2	3	3	16	2	3	3	16
1	2	2	11	3	3	5	22	4	5	5	28

(8)

x_1	x_2	x_3	r.S.	x_1	x_2	x_3	r.S.	x_1	x_2	x_3	r.S.
1	1	1	6	1	1	1	6	1	1	1	6
2	2	3	14	2	2	3	14	2	2	3	14
3	5	5	26	3	3	4	21	5	5	7	34

(9)

x_1	x_2	x_3	r.S.	x_1	x_2	x_3	r.S.	x_1	x_2	x_3	r.S.
1	2	3	10	1	2	3	10	1	2	3	10
2	1	3	11	2	1	3	11	2	1	3	11
1	0	1	1	4	5	9	31	3	2	1	14

(10)

x_1	x_2	x_3	r.S.	x_1	x_2	x_3	r.S.	x_1	x_2	x_3	r.S.
3	2	1	7	3	2	1	7	3	2	1	7
2	3	0	8	2	1	2	3	0	1	−4	2
1	0	3	1	1	0	3	1	1	0	3	1

(11)

x_1	x_2	x_3	r.S.	x_1	x_2	x_3	r.S.	x_1	x_2	x_3	r.S.
−8	1	2	5	−8	1	2	5	−8	1	2	5
−7	2	1	4	−7	2	1	4	−7	2	1	4
−3	0	1	0	0	1	2	5	−5	1	1	3

(12)

x_1	x_2	x_3	r.S.	x_1	x_2	x_3	r.S.	x_1	x_2	x_3	r.S.
2	0	1	7	−2	1	0	−4	−1	3	1	4
3	1	−1	10	−1	2	1	2	0	1	−2	0
1	1	1	6	0	3	2	6	2	−5	−4	−8

(13)

x_1	x_2	x_3	r.S.	x_1	x_2	x_3	r.S.	x_1	x_2	x_3	r.S.
1	2	3	6	2	3	4	9	2	3	4	−1
2	1	1	4	3	−1	2	4	3	4	2	2
5	4	5	13	1	7	6	14	4	3	2	1

(14)

x_1	x_2	x_3	r.S.	x_1	x_2	x_3	r.S.	x_1	x_2	x_3	r.S.
3	−2	1	4	2	−1	0	2	3	0	1	8
2	1	−1	4	−4	3	2	2	1	3	−2	4
7	7	−6	16	3	−1	1	5	−1	1	−1	−2

(15)

x_1	x_2	x_3	r.S.	x_1	x_2	x_3	r.S.	x_1	x_2	x_3	r.S.
2	−2	−3	−4	2	−2	−3	−4	2	−2	−3	−4
−3	2	2	−2	−3	2	2	−2	−3	2	2	−2
1	−2	−4	−8	−4	2	1	−8	0	1	−1	1

4. Lineare Gleichungssysteme

4.1 Die zur Herstellung einer Mengeneinheit (ME) der Produkte P_1, P_2, P_3 benötigten Rohstoffe R_1, R_2, R_3, R_4 sowie die einzusetzenden Mengen dieser Rohstoffe sind in nachstehender Tabelle zusammengefasst.
Wie viele Produkte P_1, P_2, P_3 können damit gefertigt werden?

	P_1	P_2	P_3	Einzusetzende Rohstoffmengen
R_1	1	0	2	50
R_2	0	2	1	50
R_3	2	1	0	80
R_4	1	1	1	60

4.2 Die Produkte P_i eines Unternehmens werden in den Ländern L_j verkauft. Die geplanten Verkaufsmengen für jedes Produkt und Land sowie die geplanten Umsätze in den Ländern liegen in Tabellenform vor.
Wie hoch müssen die Preise p_i für die Produkte gewählt werden, damit die Umsatzziele in den einzelnen Ländern erreicht werden?

(1)

	P_1	P_2	P_3	Geplanter Umsatz
L_1	1	1	1	60
L_2	2	1	3	120
L_3	3	2	1	120

(2)

	P_1	P_2	P_3	Geplanter Umsatz
L_1	1	1	1	60
L_2	2	3	4	200
L_3	3	5	3	220
L_4	4	6	4	280

4.3 Die Hilfsabteilungen N_i geben an die Hauptabteilungen H_j Leistungen ab, "beliefern" sich aber auch gegenseitig. Die Höhe dieses Leistungstransfers (gemessen in Leistungseinheiten (LE)) sowie die in den Hilfsabteilungen angefallenen primären Kosten liegen in Tabellenform vor.

(a) Bestimmen Sie die Verrechnungspreise in €/LE für jede der Abteilungen N_i !

(b) Verteilen Sie die primären Gesamtkosten auf die Hauptabteilungen H_j !

(1) Lieferant

	Empfänger					
	N_1	N_2	N_3	H_1	H_2	Primärkosten
N_1	-	4	5	15	6	240
N_2	3	-	5	12	20	320
N_3	3	4	-	18	25	400

(2) Lieferant

	Empfänger					
	N_1	N_2	N_3	H_1	H_2	Primärkosten
N_1	-	3	4	5	8	130
N_2	2	-	4	10	14	360
N_3	2	3	-	15	20	700

(3) Lieferant

	Empfänger					
	N_1	N_2	N_3	H_1	H_2	Primärkosten
N_1	-	5	6	4	5	240
N_2	4	-	6	6	9	300
N_3	4	5	-	10	11	360

(4) Lieferant

	Empfänger					
	N_1	N_2	N_3	H_1	H_2	Primärkosten
N_1	-	0	10	7	3	250
N_2	5	-	10	4	6	350
N_3	0	10	-	1	9	300

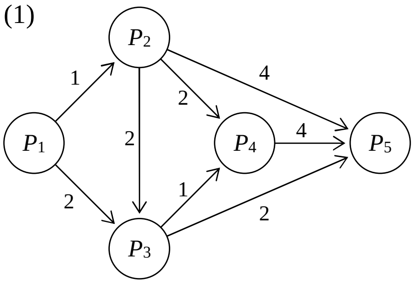
(5) Lieferant

	Empfänger					
	N_1	N_2	N_3	H_1	H_2	Primärkosten
N_1	-	3	2	9	11	150
N_2	5	-	2	6	2	270
N_3	5	3	-	1	1	300

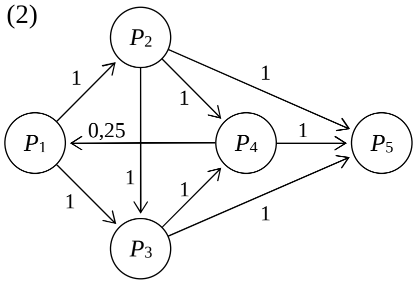
4.4 Ein Produkt P_n wird über Zwischenprodukte P_1 ,..., P_{n-1} hergestellt. Der Produktionsprozess ist durch einen Gozintografen dargestellt. Wie viele Mengeneinheiten (ME) P_1 ,..., P_{n-1} werden zur Herstellung *einer* ME P_n benötigt?

Hinweis: Die Zahl 4 an dem Pfeil von P_4 nach P_5 in (1) bedeutet beispielsweise, dass zur Produktion *einer* ME P_5 *vier* ME P_4 benötigt werden.

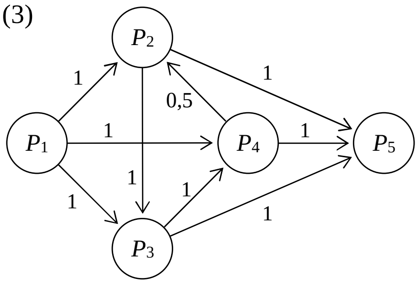
(1)



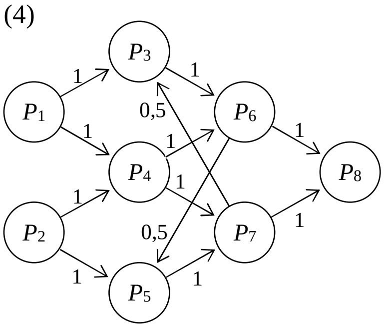
(2)



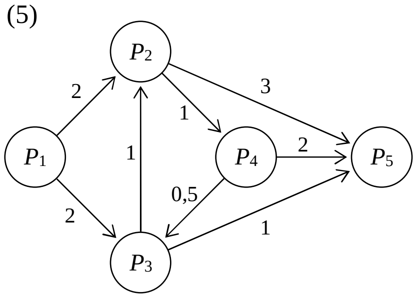
(3)



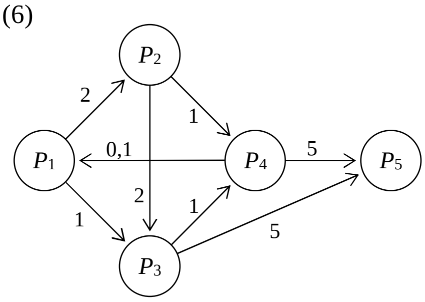
(4)



(5)

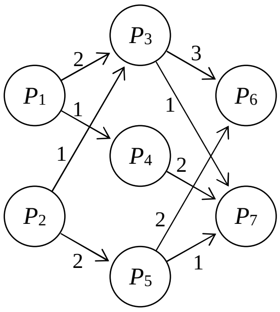


(6)

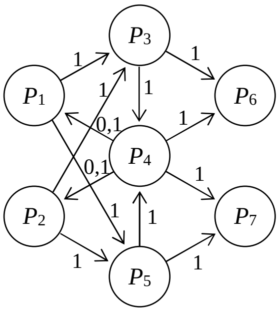


4.5 Die Produkte P_6 , P_7 werden aus Rohstoffen P_1 , P_2 über Zwischenprodukte P_3 , P_4 , P_5 gefertigt. Der Produktionsprozess ist durch einen Gozintografen dargestellt. Wie viele ME P_1 , ... , P_5 werden zur Herstellung von 10 ME P_6 und 10 ME P_7 insgesamt benötigt?

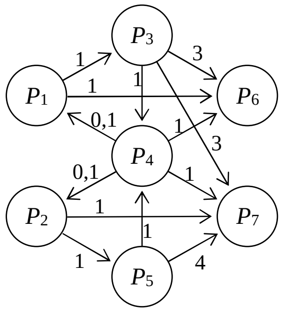
(1)



(2)



(3)



5. Determinanten

5.1 Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen:

(1) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

(2) $4 \cdot \mathbf{A}$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{B}^{-1}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $(\mathbf{B}'\mathbf{B})^{-1}$, $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, $\mathbf{B}'\mathbf{AC}$

(3) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(4) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(5) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & 9 & 12 \\ 4 & 5 & 13 & 15 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie in den folgenden Aufgaben die Zahl $r\ (s, t) \in \mathbb{R}$ so, dass die gegebenen Bedingungen erfüllt sind:

5.2 $\left| \begin{pmatrix} r & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right| = 8, \quad r > 0$

5.3 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & r & 0 \\ s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = (\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B})$, $|\mathbf{A}| = 1$

5.4 $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$, $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v'M'DMv} = 0$, $|\mathbf{D}| = -1$, $r > 0$

5.5 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $|(r \cdot \mathbf{A})^{-1}| = 8$

5.6 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$, $|\mathbf{A}^2| = 64$, **A** positiv definit

5.7 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} r & r & r & r \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, Spur (**A**) = | **A** |

5.8 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & r \end{pmatrix}$, $|\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|$, **A** positiv definit

5.9 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} r & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}| = \text{Spur}(\mathbf{B})$

5.10 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$, $\text{Spur}(\mathbf{A'}\,\mathbf{D}\,\mathbf{A}) = |\mathbf{A'}\,\mathbf{D}\,\mathbf{A}|$

5.11 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $|(\mathbf{A'} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A})^{-1}| = \text{Spur}(\frac{1}{r}\mathbf{B})$

5.12 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $|\mathbf{A'}\,\mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{A}| = 3$, $r > 0$

5.13 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & r \end{pmatrix}$, $|\mathbf{A}| = 4$, **A** positiv definit

5.14 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $|(r \cdot \mathbf{A'A})^{-1}| = \frac{1}{8}$

5.15 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $|\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{A}| = \text{Spur}(\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{A})$

5.16 (1) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & r \end{pmatrix}$ (2) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & -5 & 6 & -8 \\ -3 & 6 & -10 & 12 \\ 4 & -8 & 12 & r \end{pmatrix}$ (a) $|\mathbf{A}| = 1$ (b) Welche Aussage lässt sich dann über die Definitheit von **A** treffen? (Begründung!)

5.17 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & r-1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 5 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, $|\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| = |\mathbf{B'B}|$

5.18 Existieren reelle Zahlen a, b, c, u, v, so dass die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & a+u & a+v \\ b & b+u & b+v \\ c & c+u & c+v \end{pmatrix}$ regulär wird? (Begründung!)

5.19 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} r & r & 0 \\ 0 & r & r \\ r & 0 & r \end{pmatrix}$, $|\mathbf{A}^{-1}| \cdot \text{Spur}(\mathbf{A'A}) = 1$

5.20 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & r \end{pmatrix}$, $|\mathbf{A}| = |4\mathbf{A}^{-1}|$, **A** negativ definit

5.21 (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} r & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v'Av} = |\mathbf{A}|$ (b) Welche Definitheit besitzt **A** für $r < 0$? (Begründung!)

5.22 Bestimmen Sie für die gegebenen Matrizen und Vektoren folgende Ausdrücke bzw. Eigenschaften:

(1) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(a) inverse Matrix von **A** , (b) Determinante von **B** , (c) Spur von $\mathbf{C} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v'}$, (d) Definitheit von **D**

(2) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

(a) inverse Matrix von **A** , (b) Determinante von **B** , (c) quadratische Form **x' B x** , (d) Definitheit von **B**

(3) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

(a) Determinante von **A**, (b) quadratische Form **x' A x** , (c) Definitheit von **A** , (d) inverse Matrix von **A**

(4) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, (a) Determinante von $\mathbf{A}$, (b) Definitheit von $\mathbf{A}$, (c) $|\, 2\cdot\mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1}\,|$

6. Inverse Matrizen

6.1 Bestimmen Sie, falls existent, die Inversen der Matrizen.

(1) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

(2) $4\cdot\mathbf{A}$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{B}^{-1}$, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$, $\mathbf{B}'\mathbf{B}$, $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$, $\mathbf{B}'\mathbf{A}\mathbf{C}$

(3) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(4) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(5) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6.2 Für eine quadratische Matrix $\mathbf{A}$ gilt die Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{L}\cdot\mathbf{L}'$ mit $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie (a) die Inverse $\mathbf{L}^{-1}$ von $\mathbf{L}$, (b) die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ von $\mathbf{A}$.

Bestimmen Sie in den folgenden Aufgaben die Zahl $r \in \mathbb{R}$ so, dass die gegebenen Bedingungen erfüllt sind:

6.3 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2r \\ 3 \end{pmatrix}$, Spur $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{A}^{-1}) = |\,\mathbf{D}^{-1}\,\mathbf{v}\,|$

6.4 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$, $|\,(\frac{1}{r}\mathbf{A})^{-1}\,| = \text{Spur}\,((\frac{1}{r}\mathbf{A})^{-1})$

6.5 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 7 & r \end{pmatrix}$, $|\,\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}\,| = \text{Spur}(\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A})$

6.6 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ r \end{pmatrix}$, Spur $(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\mathbf{b}'(\mathbf{A}')^{-1}) = 34\cdot|\,(\mathbf{A}^2)^{-1}\,|$, $r > 0$

6.7 (a) Bestimmen Sie die inverse Matrix von $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Überprüfen Sie die nichtsymmetrische Matrix $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ auf Definitheit.

6.8 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $|\,2\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}\,| = \text{Spur}(2\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B})$

6.9 (a) Bestimmen Sie die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ von $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$.

(b) Welche Definitheit besitzt $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$? (Begründung!)

(c) Bestimmen Sie $|\,3\cdot\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^{-1})^{-1}\,|$ für die obigen Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$.

7. Lineare Optimierung

7.1 Ein Unternehmen stellt die Produkte P_i an Fertigungsstellen F_j her. Die je Produkt- und Fertigungsstelle benötigten Produktionszeiten, die Kapazitäten der Fertigungsstellen sowie die Deckungsbeiträge (DB) der Produkte liegen in Tabellenform vor.

(a) Stellen Sie das zugehörige Simplex-Anfangstableau zur Maximierung des DB auf.

(b) Während der Durchführung des Simplex-Algorithmus ergibt sich ein Zwischentableau.
Welche Variable ist in die Basis aufzunehmen, welche zu eliminieren?
(Füllen Sie die letzte Spalte des Tableaus aus und markieren Sie das Pivotelement.)

(c) Interpretieren Sie das Endtableau:

– Wie lauten die optimalen Produktionsmengen? – Welcher DB wird dabei erzielt?

– An welcher Fertigungsstelle gibt es noch wie viel freie Kapazität?

– Um wie viele Einheiten steigt der DB, wenn die Ausgangskapazität von F_j um eine Einheit erhöht wird?

(1) Daten

	P_1	P_2	Kapazität
F_1	1	0	12
F_2	0	1	10
F_3	1	2	26
F_4	2	1	28
DB	2	2	

Anfangstableau

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
z							

Zwischentableau

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.	θ
x_1	1	0	1	0	0	0	12	
u_2	0	0	2	1	0	–1	6	
u_3	0	0	3	0	1	–2	6	
x_2	0	1	–2	0	0	1	4	
z	0	0	–2	0	0	2	32	

Endtableau

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
x_1	1	0	0	0	–1/3	2/3	10
u_2	0	0	0	1	–2/3	1/3	2
u_1	0	0	1	0	1/3	–2/3	2
x_2	0	1	0	0	2/3	–1/3	8
z	0	0	0	0	2/3	2/3	36

(2) Daten

	P_1	P_2	P_3	Kapazität
F_1	5	25	8	215
F_2	1	4	1	30
F_3	1	5	2	50
DB	8	35	13	

Anfangstableau

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.
z							

Zwischentableau

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.	θ
u_1	0	5	3	1	–5	0	65	
x_1	1	4	1	0	1	0	30	
u_3	0	1	1	0	–1	1	20	
z	0	–3	–5	0	8	0	240	

Endtableau

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.
u_1	0	2	0	1	–2	–3	5
x_1	1	3	0	0	2	–1	10
x_3	0	1	1	0	–1	1	20
z	0	2	0	0	3	5	340

(3) Daten

	P_1	P_2	Kapazität
F_1	1	0,5	20
F_2	0	1	30
F_3	3	2	70
F_4	2	3	100
DB	25	15	

Anfangstableau

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
z							

Zwischentableau

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.	θ
x_1	1	0,5	1	0	0	0	20	
u_2	0	1	0	1	0	0	30	
u_3	0	0,5	–3	0	1	0	10	
u_4	0	2	–2	0	0	1	60	
z	0	–2,5	25	0	0	0	500	

Endtableau

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
x_1	1	0	4	0	–1	0	10
u_2	0	0	6	1	–2	0	10
x_2	0	1	–6	0	2	0	20
u_4	0	0	10	0	–4	1	20
z	0	0	10	0	5	0	550

(4) Daten

	P_1	P_2	P_3	Kapazität
F_1	1	0	2	50
F_2	0	2	1	50
F_3	2	1	0	80
F_4	1	1	1	60
DB	10	10	10	

Anfangstableau

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
z								

Zwischentableau

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.	θ
x_3	0	–1/4	1	1/2	0	–1/4	0	5	
u_2	0	9/4	0	–1/2	1	1/4	0	45	
x_1	1	1/2	0	0	0	1/2	0	40	
u_4	0	3/4	0	–1/2	0	–1/4	1	15	
z	0	–7,5	0	5	0	2,5	0	450	

Endtableau

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
x_3	0	0	1	1/3	0	–1/3	1/3	10
u_2	0	0	0	1	1	1	–3	0
x_1	1	0	0	1/3	0	2/3	–2/3	30
x_2	0	1	0	–2/3	0	–1/3	4/3	20
z	0	0	0	0	0	0	10	600

(5) Daten

	P_1	P_2	P_3	Kapazität
F_1	2	1	1	40
F_2	1	1	2	50
F_3	2	2	2	60
DB	2	1	3	

Anfangstableau

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.
z							

Zwischentableau

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.	θ
u_1	1,5	0,5	0	1	–0,5	0	15	
x_3	0,5	0,5	1	0	0,5	0	25	
u_3	1	1	0	0	–1	1	10	
z	–0,5	0,5	0	0	1,5	0	75	

Endtableau

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.
u_1	0	–1	0	1	1	–1,5	0
x_3	0	0	1	0	1	–0,5	20
x_1	1	1	0	0	–1	1	10
z	0	1	0	0	1	0,5	80

(6) Daten

	P_1	P_2	P_3	Kapazität
F_1	1	1	3	60
F_2	2	0	2	40
F_3	0	1	1	30
DB	15	10	5	

Anfangstableau

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.
z							

Zwischentableau

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.	θ
u_1	0	1	2	1	–0,5	0	40	
x_1	1	0	1	0	0,5	0	20	
u_3	0	1	1	0	0	1	30	
z	0	–10	10	0	7,5	0	300	

Endtableau

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.
u_1	0	0	1	1	–0,5	–1	10
x_1	1	0	1	0	0,5	0	20
x_2	0	1	1	0	0	1	30
z	0	0	20	0	7,5	10	600

(7) Daten

	P_1	P_2	Kapazität
F_1	3	2	300
F_2	0,5	1	40
F_3	2	3	150
F_4	4	6	360
DB	60	100	

Anfangstableau

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
z							

Zwischentableau

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.	θ
u_1	2	0	1	–2	0	0	220	
x_2	0,5	1	0	1	0	0	40	
u_3	0,5	0	0	–3	1	0	30	
u_4	1	0	0	–6	0	1	120	
z	–10	0	0	100	0	0	4000	

Endtableau

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
u_1	0	0	1	10	–4	0	100
x_2	0	1	0	4	–1	0	10
x_1	1	0	0	–6	2	0	60
u_4	0	0	0	0	–2	1	60
z	0	0	0	40	20	0	4600

(8) Daten

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	Kapazität
F_1	3	1	0	0	1	10
F_2	1	1	1	0	0	4
F_3	0	1	1	2	1	8
F_4	2	1	3	1	2	12
DB	2	5	1	2	1	

Anfangstableau

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
z										

Zwischentableau

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.	θ
u_1	2	0	–1	0	1	1	–1	0	0	6	
x_2	1	1	1	0	0	0	1	0	0	4	
u_3	–1	0	0	2	1	0	–1	1	0	4	
u_4	1	0	2	1	2	0	–1	0	1	8	
z	3	0	4	–2	–1	0	5	0	0	20	

Endtableau

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
u_1	2	0	–1	0	1	1	–1	0	0	6
x_2	1	1	1	0	0	0	1	0	0	4
x_4	–0,5	0	0	1	0,5	0	–0,5	0,5	0	2
u_4	1,5	0	2	0	1,5	0	–0,5	–0,5	1	6
z	2	0	4	0	0	0	4	1	0	24

7.2 (a) Während der Durchführung des Simplex-Algorithmus für ein Optimierungsproblem ergibt sich ein Tableau. Welche Variable ist in die Basis aufzunehmen, welche zu eliminieren?
(Füllen Sie die letzte Spalte des Tableaus aus und markieren Sie das Pivotelement.)
Führen Sie den nächsten Pivotschritt durch und tragen Sie das Ergebnis in die gegebene Tabelle ein.

(b) Das Endtableau <u>eines anderen</u> Optimierungsproblems (Ermittlung eines DB-maximalen Produktionsprogramms unter Kapazitätsbeschränkungen an den Fertigungsstellen F_i) liegt vor.
– Wie lauten die optimalen Produktionsmengen x_i ?
– Welcher DB wird dabei erzielt?
– An welcher Fertigungsstelle gibt es noch wie viel freie Kapazität?
– Wie ändern sich die optimalen Produktionsmengen bzw. der optimale DB, wenn die Ausgangskapazität der Fertigungsstelle F_k um eine Zeiteinheit erhöht wird?

(1) (a)

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.	θ
x_1	1	0,5	1	0	0	0	40	
u_2	0	1	–2	1	0	0	70	
u_3	0	0,5	–3	0	1	0	30	
u_4	0	2	–2	0	0	1	160	
z	0	–2	20	0	0	0	800	

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
z							

(b) k = 2

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.
u_1	0	–1	0	1	1	–1,5	0
x_3	0	0	1	0	1	–0,5	20
x_1	1	1	0	0	–1	1	10
z	0	1	0	0	1	0,5	80

(2) (a)

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.	θ
x_1	1	1	1	0	0	0	20	
u_2	0	2	0	1	0	0	30	
u_3	0	1	–3	0	1	0	10	
u_4	0	4	–2	0	0	1	60	
z	0	–4	25	0	0	0	500	

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
z							

(b) k = 1

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.
x_2	0	1	3	2	–1	0	10
x_1	1	0	1	–1	1	0	20
u_3	0	0	2	–2	–3	1	5
z	0	0	2	3	5	0	340

(3) (a)

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.	θ
u_1	0	1	2	1	–0,5	0	40	
x_1	1	0	1	0	0,5	0	20	
u_3	0	1	1	0	0	1	30	
z	0	–10	10	0	7,5	0	300	

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.
z							

(b) k = 3

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
x_1	1	0	4	0	–1	0	8
u_2	0	0	–2	1	–2	0	16
x_2	0	1	–6	0	2	0	48
u_4	0	0	0	0	–4	1	60
z	0	0	16	0	8	0	1472

(4) (a)

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.	θ
x_1	1	0,5	1	0	0	0	20	
u_2	0	1	–8	1	0	0	40	
u_3	0	0,5	–3	0	1	0	15	
u_4	0	2	–4	0	0	1	80	
z	0	–5	70	0	0	0	1400	

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
z							

(b) k = 2

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.
x_2	0	1	3	2	–1	0	10
x_1	1	0	1	–1	1	0	20
u_3	0	0	2	–2	–3	1	5
z	0	0	2	3	5	0	340

(5) (a)

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.	θ
x_1	1	0,5	1	0	0	0	40	
u_2	0	1	–6	1	0	0	120	
u_3	0	0,5	–3	0	1	0	30	
u_4	0	2	–2	0	0	1	220	
z	0	–10	100	0	0	0	4000	

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
z							

(b) k = 3

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.
u_1	0	0	1	1	–0,5	–1	10
x_1	1	0	1	0	0,5	0	20
x_2	0	1	1	0	0	1	30
z	0	0	20	0	7,5	10	600

7.3

Ein Unternehmen stellt die Produkte P_1 , P_2 , P_3 an den Fertigungsstellen F_1 , F_2 , F_3 , F_4 her. Die je Produkt- und Fertigungsstelle benötigten Produktionszeiten, die Kapazitäten der Fertigungsstellen sowie die Deckungsbeiträge (*DB*) der Produkte sind in nebenstehender Tabelle zusammengefasst:

	P_1	P_2	P_3	Kapazität
F_1	0	1	1	50
F_2	1	1	0	30
F_3	1	0	1	40
F_4	1	1	1	65
DB	20	15	10	

(a) Stellen Sie das zugehörige Simplex-Anfangstableau zur Maximierung des *DB* auf.

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
z								

(b) Während der Durchführung des Simplex-Algorithmus ergibt sich folgendes Tableau:

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.	θ
u_1	0	2	0	1	1	–1	0	40	
x_1	1	1	0	0	1	0	0	30	
x_3	0	–1	1	0	–1	1	0	10	
u_4	0	1	0	0	0	–1	1	25	
z	0	–5	0	0	10	10	0	700	

– Welche Variable ist in die Basis aufzunehmen?

– Füllen Sie die letzte Spalte des Tableaus aus und markieren Sie das Pivotelement.

– Welche Variable entfällt aus der Basis?

(c) Das Endtableau eines anderen Optimierungsproblems (Ermittlung eines DB-maximalen Produktionsprogramms unter Kapazitätsbeschränkungen an den Fertigungsstellen F_i) besitzt folgende Gestalt:

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.
x_2	0	1	3	2	–1	0	10
x_1	1	0	1	–1	1	0	20
u_3	0	0	2	–2	–3	1	5
z	0	0	2	3	5	0	340

– Wie lauten die optimalen Produktionsmengen? $x_1 =$ $x_2 =$ $x_3 =$

– Welcher DB wird dabei erzielt? DB =

– An welcher Fertigungsstelle gibt es noch wie viel freie Kapazität? F_1 : F_2 : F_3 :

– Wie lauten die optimalen Produktionsmengen, wenn *eine* ME von P_3 hergestellt wird? $x_1 =$ $x_2 =$ $x_3 =$

8. Folgen und Reihen

8.1 Überprüfen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und ermitteln Sie ggf. den Grenzwert:

(1) $a_n = 3 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$ (2) $a_n = \frac{n^3-2n^2+3n-4}{n^3+n^2+n+1}$ (3) $a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n^2-2}$

(4) $a_n = (-1)^n (2 + \frac{1}{n})$ (5) $a_n = \frac{\sqrt{2n^2+1}}{n+1}$ (6) $a_n = n \cdot \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}$

(7) $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$ (8) $a_{n+1} = \sqrt{2a_n - 1}$ mit $a_1 \geq 1$

8.2 Welche der zu den Folgen aus 8.1 gehörenden Reihen können *nicht* konvergieren?

9. Finanzmathematik

Geben Sie bei allen Aufgaben zunächst die jeweils zu verwendende Formel an.

9.1 Bei der Geburt ihres Kindes beschließen die Eltern, einen Betrag K mit 7 % Verzinsung und jährlicher Zinsgutschrift so anzulegen, dass dem Kind nach 20 Jahren 20.000 € für ein sorgenfreies Studium zur Verfügung stehen.

(a) Berechnen Sie K .

(b) Während der 20 Jahre muss mit einer *stetigen* Inflation von 3 % gerechnet werden. Wie hoch muss K sein, damit nach 20 Jahren ein Betrag K_n zur Verfügung steht, welcher der heutigen Kaufkraft von 20.000 € entspricht? Berechnen Sie zunächst K_n .

9.2 1000 € sollen für 3 Jahre angelegt werden. Die Bank bietet folgende Zinskonditionen:

(a) 8,5 % bei jährlicher Zinszahlung,

(b) 8,2 % bei monatlicher Zinszahlung,

(c) 8 % im ersten Jahr, 8,5 % im zweiten Jahr, 9 % im dritten Jahr, bei jeweils jährlicher Zinszahlung.

Wie hoch ist das Kapital nach 3 Jahren in jeder der drei obigen Anlageformen, wenn die Zinsen jeweils dem Konto gutgeschrieben und mitverzinst werden?

9.3 Zu Beginn jeder Zinsperiode wird ein Betrag E auf ein Konto eingezahlt. Die Verzinsung beträgt p % nominal. Am Ende jeder Zinsperiode werden die Zinsen dem Konto gutgeschrieben.

(a) Wie hoch ist das Guthaben am Ende des m-ten Jahres?

(b) Nach wie vielen Zinsperioden ist der Betrag K_n angespart?

(1) Zinsperiode: Monat, $E = 1000$, $p = 6$, $m = 1$; $K_n = 100.000$

(2) Zinsperiode: Quartal, $E = 100$, $p = 4$, $m = 5$; $K_n = 4.000$

$416 \cdot \frac{1{,}04^5-1}{0{,}04} = 2253{,}19$	$2000 \cdot 1{,}04^5 = 2433{,}31$	$100 \cdot \frac{1{,}04^{20}-1}{0{,}04} = 2977{,}81$	$2000 \cdot 1{,}01^{20} = 2440{,}38$	$101 \cdot \frac{1{,}01^{20}-1}{0{,}01} = 2223{,}92$	$2000\, e^{0{,}2} = 2442{,}81$
$\frac{\ln\left(\frac{40}{104}+1\right)}{\ln(1{,}04)} = 8{,}30$	$\frac{\ln(4)}{\ln(1{,}04)} = 35{,}35$	$\frac{4000}{100} = 40$	$\frac{\ln\left(\frac{40}{101}+1\right)}{\ln(1{,}01)} = 33{,}53$	$\frac{\ln(1{,}4)}{\ln(1{,}01)} = 33{,}82$	$10 \cdot \ln(40) = 36{,}89$

9.4 Ein Index für den Lebensstandard weise für die Länder A und B die Werte I_a bzw. I_b auf.

(a) Wie viele Jahre dauert es, bis das Land B bei einer *stetigen* Steigerung des Lebensstandards um p_b % ebenfalls den Wert I_a erreicht?

(b) Die *stetige* Steigerung des Standards in Land A betrage für die nächsten m Jahre p_a % . Welches *stetige* Wachstum muss das Land B erreichen, damit in m Jahren beide Länder den gleichen Standard aufweisen?

(1) $I_a = 100$, $I_b = 50$, $p_b = 3{,}5$; $m = 20$, $p_a = 2$

(2) $I_a = 3 \cdot I_b$, $p_b = 5$; $m = 20$, $p_a = 3$

$\ln(1{,}03) = 0{,}0296$	$\ln(3) = 1{,}1$	$\frac{\ln(3)}{\ln(1{,}05)} = 22{,}52$	$1{,}03 \cdot \sqrt[20]{3} = 1{,}0882$	$\sqrt[20]{3 \cdot e^{0{,}6}} = 1{,}0886$

9.5 10.000 € werden für 5 Jahre angelegt. Das Geldinstitut bietet eine Verzinsung von 5 % jährlich zuzüglich einer jährlichen Bonuszahlung von 100 €. Zinsen und Bonus werden dem Konto am Ende jeden Jahres gutgeschrieben.

(a) Wie hoch ist das Guthaben am Ende des fünften Jahres?

(b) Welche Rendite (effektive Verzinsung) erzielt der Anleger?

9.6 K € sollen angelegt werden.

Wie hoch ist das Kapital nach m Jahren in jeder der drei folgenden Anlageformen, wenn die Zinsen bzw. der Bonus dem Konto jeweils am Ende eines Jahres gutgeschrieben und mitverzinst werden?

Welche Rendite (effektive Verzinsung) erzielt man bei der Anlageform (b), welche bei (c)?

Alternative Anlageformen:

(a) Sparbrief mit einer Verzinsung von p_s % ;

(b) Bundesschatzbrief mit einer Verzinsung von p_i % im i. Jahr;

(c) Bonussparen mit p_b % Verzinsung und einem jährlichen Bonus in Höhe von B .

(1) $K = 1.000$, $m = 3$, $p_s = 4$; $p_1 = 2{,}6$, $p_2 = 4{,}1$, $p_3 = 5{,}6$; $p_b = 2$, $B = 20$

$1{,}02^3 = 1{,}06121$	$1{,}04^3 = 1{,}12486$	$1{,}041^3 = 1{,}12811$	$e^{0{,}06} = 1{,}06184$	$e^{0{,}12} = 1{,}1275$	$1{,}026 \cdot 1{,}041 \cdot 1{,}056 = 1{,}12788$
$1{,}02 \cdot 61{,}21 = 62{,}43$	$\sqrt[3]{1{,}1275} = 1{,}0408$	$\sqrt[3]{1{,}06184} = 1{,}0202$	$\sqrt[3]{1{,}12242} = 1{,}0392$	$\sqrt[3]{1{,}12788} = 1{,}0409$	$\sqrt[3]{1{,}12364} = 1{,}0396$

(2) $K = 10.000$, $m = 4$, $p_s = 4$; $p_1 = 3{,}1$, $p_2 = 3{,}3$, $p_3 = 4$, $p_4 = 6$; $p_b = 3{,}1$, $B = 100$

$1{,}04^4 = 1{,}16986$	$1{,}031 \cdot 1{,}033 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}06 = 1{,}17408$	$\frac{12989}{31} = 419$	$1{,}031^4 = 1{,}12989$	$e^{0{,}16} = 1{,}17351$	$1{,}041^4 = 1{,}17436$
$25 \cdot \ln(1{,}17179) = 3{,}96$	$\sqrt[4]{1{,}17351} = 1{,}0408$	$\sqrt[4]{1{,}17258} = 1{,}0406$	$\sqrt[4]{1{,}17408} = 1{,}0409$	$\sqrt[4]{1{,}17179} = 1{,}0404$	$25 \cdot \ln(1{,}17408) = 4{,}01$

9.7 Zu Beginn eines Jahres werden einmalig K € auf ein Bausparkonto eingezahlt, in den folgenden Jahren jeweils E €. Die Verzinsung beträgt p %, der Zinsfaktor $q = 1 + p/100$. Die Zinsen werden dem Konto am Ende jeden Jahres gutgeschrieben.

(a) Wie hoch ist das Guthaben am Ende des 1., 2., 3. und 4. Jahres?

(b) Wie hoch ist das Guthaben am Ende des m. Jahres?

9.8 (a) Auf ein Konto mit jährlicher Zinsgutschrift werden einmalig K € eingezahlt. Nach 15 Jahren hat sich das Kapital verdreifacht. Wie hoch war der Zinssatz p?

(b) Die Weltbevölkerung wachse *stetig* um 2 %. In wie vielen Jahren verdoppelt sie sich?

$15 \ln(3) = 16{,}48$	$\frac{100}{15} \ln(3) = 7{,}32$	$3 \ln(15) = 8{,}12$	$15 \ln(1{,}03) = 0{,}44$	$\sqrt[15]{3} = 1{,}076$	$\sqrt[3]{15} = 2{,}47$
$\frac{100}{1{,}02} = 98{,}04$	$100 \ln(2) = 69{,}31$	$50 \ln(2) = 34{,}66$	$\frac{\ln(2)}{\ln(1{,}02)} = 35{,}0$	$2 \ln(100) = 9{,}21$	$100 \ln(1{,}02) = 1{,}98$

9.9 Eine Aktie wird für K € erworben.

(a) Wie hoch ist der Wert der Aktie nach m Jahren, wenn in dieser Zeit mit einer *stetigen* Wertsteigerung von p_s % gerechnet werden kann?

(b) Am Ende jeden Jahres erhält man D € Dividende ausgezahlt. Die Dividende wird auf einem Extrakonto mit einer Verzinsung von p_d % und jährlicher Zinsgutschrift angelegt. Welcher Betrag steht auf diesem Konto am Ende des m. Jahres zur Verfügung?

(c) Welche Rendite (effektive Verzinsung) erzielt man insgesamt mit dem Erwerb der Aktie?

(1) $K = 1000$, $m = 5$, $p_s = 4$; $D = 20$, $p_d = 2$

$e^{0{,}02} = 1{,}0202$	$1{,}02^5 = 1{,}1041$	$e^{0{,}2} = 1{,}2214$	$1{,}04^5 = 1{,}2167$	$102 \cdot (1{,}02^5 - 1) = 10{,}616$	$e^{0{,}04} = 1{,}0408$
$1{,}2^5 = 2{,}48832$	$e^{0{,}1} = 1{,}10517$	$2 \cdot 1{,}4^5 = 10{,}756$	$e^{0{,}4} = 1{,}49182$	$52 \cdot (1{,}04^5 - 1) = 11{,}266$	$e^2 = 7{,}38906$
$\sqrt[5]{1{,}3255} = 1{,}058$	$\sqrt[5]{1{,}32075} = 1{,}0572$	$2 \cdot \ln(1{,}32156) = 0{,}558$	$\sqrt[5]{1{,}33406} = 1{,}0593$	$2 \cdot \ln(1{,}3255) = 0{,}564$	$\sqrt[5]{1{,}32156} = 1{,}0573$

(2) $K = 10.000$, $m = 10$, $p_s = 5$; $D = 300$, $p_d = 3$

$1{,}05^{10} = 1{,}628895$	$\frac{1{,}05^{10} - 1}{0{,}05} = 12{,}577893$	$e^{1{,}05} = 2{,}857651$	$e^{0{,}5} = 1{,}648721$	$e^{0{,}05} = 1{,}051271$	$\ln(5) = 1{,}609438$
$1{,}03^{10} = 1{,}343916$	$105 \cdot (1{,}03^{10} - 1) = 36{,}1112$	$3 \cdot 1{,}03^{10} = 4{,}03175$	$3 \cdot e^{0{,}3} = 4{,}04958$	$3 \cdot e^3 = 20{,}0855$	$\ln(30) = 3{,}4012$
$\sqrt[10]{2{,}051896} = 1{,}0745$	$\sqrt[10]{2{,}033853} = 1{,}0736$	$\sqrt[10]{2{,}009833} = 1{,}0723$	$\sqrt[10]{1{,}992637} = 1{,}0714$	$\sqrt[10]{1{,}988841} = 1{,}0712$	$\sqrt[10]{1{,}972811} = 1{,}0703$

(3) $K = 100$, $m = 25$, $p_s = 4$; $D = 4$, $p_d = 4$

$e^4 = 54{,}5982$	$e = 2{,}7183$	$e^{0{,}4} = 1{,}4918$	$e^{1{,}04} = 2{,}8292$	$e^{4/25} = 1{,}1735$	$e^{25/4} = 518{,}01$
$1{,}04^{100} = 50{,}5049$	$1{,}04^{25} = 2{,}6658$	$1{,}01^{100} = 2{,}7048$	$1{,}025^4 = 1{,}1038$	$1{,}4^{25} = 4500$	$1{,}25^4 = 2{,}4414$
$\sqrt[25]{4{,}3316} = 1{,}0604$	$\sqrt[25]{4{,}3841} = 1{,}0609$	$\sqrt[25]{4{,}3982} = 1{,}0601$	$\sqrt[25]{4{,}3706} = 1{,}0608$	$\sqrt[25]{4{,}495} = 1{,}062$	$\sqrt[25]{3{,}9332} = 1{,}0563$

9.10 Auf ein Konto werden nach Vertragsabschluss einmalig K € zu Beginn der Zinsperiode eingezahlt, danach zu Beginn jeder weiteren Zinsperiode E €. Die Verzinsung beträgt p % nominal. Die Zinsen werden dem Konto am Ende jeder Zinsperiode gutgeschrieben.

(a) Wie lautet allgemein die Formel zur Berechnung des Guthabens nach n Zinsperioden für diese Sparform?

(b) Wie hoch ist das Guthaben für die nachstehend gegebenen Werte am Ende des m. Jahres?

(c) Stellen Sie die Formel aus (a) nach n um.

(d) Nach wie vielen Zinsperioden ist der Betrag K_n angespart?

(1) Zinsperiode: Monat, $K = 1000$, $E = 100$, $p = 3$, $m = 4$; $K_n = 10000$

$1{,}03^4 = 1{,}12551$	$1{,}03^{47} = 4{,}01190$	$1{,}03^{48} = 4{,}13225$	$5700\cdot 1{,}03^4 = 6415{,}40$	$1{,}0025^{48} = 1{,}12733$	$401\cdot(1{,}0025^{47}-1) = 49{,}9312$
$\frac{\ln(\frac{501}{410})}{\ln(1{,}0025)} = 80{,}28$	$\frac{\ln(\frac{501}{411})}{\ln(1{,}0025)} = 79{,}30$	$\frac{\ln(\frac{403}{133})}{\ln(1{,}03)} = 37{,}50$	$\ln(6415{,}40) = 8{,}77$	$\frac{\ln(\frac{10000}{1027{,}33})}{\ln(1{,}03)} = 73{,}84$	$\frac{\ln(\frac{403}{130})}{\ln(1{,}03)} = 38{,}28$

(2) Zinsperiode: Quartal, $K = 10000$, $E = 1000$, $p = 4$, $m = 5$; $K_n = 50000$

$1{,}04^5 = 1{,}2167$	$26\cdot(1{,}04^5-1) = 5{,}633$	$26\cdot(1{,}04^4-1) = 4{,}416$	$1{,}01^{20} = 1{,}2202$	$101\cdot(1{,}01^{20}-1) = 22{,}239$	$101\cdot(1{,}01^{19}-1) = 21{,}019$
$\frac{\ln(\frac{19}{9})}{\ln(1{,}04)} = 19{,}04$	$\frac{\ln(\frac{76}{35})}{\ln(1{,}04)} = 19{,}77$	$\frac{\ln(5)}{\ln(1{,}01)} = 161{,}75$	$\frac{\ln(\frac{50}{101})}{\ln(1{,}01)} = -70{,}66$	$\frac{\ln(\frac{151}{110})}{\ln(1{,}01)} = 31{,}84$	$\frac{\ln(\frac{151}{111})}{\ln(1{,}01)} = 30{,}93$

9.11 Das Guthaben auf einem Konto beträgt K €, die Verzinsung p %, der Zinsfaktor $q = 1 + p/100$. Die Zinsen werden dem Konto am Ende jeden Jahres gutgeschrieben. Zu Beginn jeden Jahres werden E € entnommen.

(a) Wie hoch ist der Kontostand am Ende der ersten, zweiten, dritten, vierten und allgemein des n. Jahres?

(b) Stellen Sie die Formel aus (a) nach n um.

(c) Nach wie vielen Jahren ist für $K = 1000$, $E = 100$ und $p = 5$ das Kapital aufgebraucht, also der Kontostand 0 erreicht?

$\frac{\ln(\frac{10}{21}+1)}{\ln(1{,}05)} = 7{,}98$	$\frac{\ln(\frac{21}{11})}{\ln(1{,}05)} = 13{,}25$	$\frac{\ln(2)}{\ln(1{,}05)} = 14{,}21$	$5\cdot\ln(10) = 11{,}51$	$\frac{\ln(1{,}5)}{\ln(1{,}05)} = 8{,}31$	$\frac{\ln(10)}{\ln(1{,}05)} = 47{,}19$

9.12 (a) Ein Betrag K wird *einmalig* auf ein Konto eingezahlt. Die Zinsgutschrift erfolgt am Ende jeder Zinsperiode. Nach m Jahren hat sich das Kapital ver-x-facht. Wie hoch war der nominale Zinsfuß p?

(b) Wie viele Jahre dauert es, bis der Wert einer Währung auf den y-ten Teil des Ausgangswertes geschrumpft ist, wenn mit einer *stetigen* Inflation von p_I % gerechnet werden muss?

(1) Zinsperiode: Quartal, $m = 10$, $x = 2$; $p_I = 2{,}5$, $y = 2$

$\ln(2) = 0{,}693$	$40\cdot\ln(2) = 27{,}7$	$\sqrt[40]{2} = 1{,}0175$	$\sqrt[10]{2} = 1{,}0718$	$\sqrt[120]{2} = 1{,}0058$	$\ln(10) = 2{,}3$

(2) Zinsperiode: Quartal, $m = 20$, $x = 4$; $p_I = 2$, $y = 4$

$5\cdot\ln(4) = 6{,}93$	$\sqrt[20]{4} = 1{,}0718$	$\sqrt[80]{4} = 1{,}0175$	$\frac{\ln(4)}{\ln(1{,}02)} = 70$	$\frac{\ln(1+\frac{4}{51})}{\ln(1{,}02)} = 3{,}81$	$20\cdot e^{0{,}25} = 25{,}7$

(3) Zinsperiode: Monat, $m = 15$, $x = 3$; $p_I = 2{,}5$, $y = 3$

$\ln(3) = 1{,}1$	$\sqrt[15]{3} = 1{,}076$	$\sqrt[180]{3} = 1{,}00612$	$12\cdot 0{,}612 = 7{,}34$	$e^{0{,}18} = 1{,}2$	$\ln(180) = 5{,}19$

9.13 (a) Auf ein Rentenkonto werden zu Beginn jeder Zinsperiode E € eingezahlt. Die Verzinsung beträgt p % nominal. Die Zinsen werden dem Konto am Ende jeder Zinsperiode gutgeschrieben.
Wie hoch ist das Guthaben am Ende des m. Jahres?

(b) Dieses Guthaben dient nach Ablauf der m Jahre zur Zahlung einer Rente. Zu Beginn jeder Zinsperiode werden A € entnommen. Die Verzinsung beträgt weiterhin p % nominal; die Gutschrift der Zinsen erfolgt nach wie vor am Ende jeder Zinsperiode.
Nach wie vielen Zinsperioden ist das Kapital aufgebraucht?

(1) Zinsperiode: Monat, $E = 300$, $p = 3{,}6$, $m = 40$; $A = 3000$

$1{,}036^{40} = 2{,}115$	$1036 \cdot \frac{1{,}036^{40}-1}{12} = 268{,}95$	$e^{1{,}44} = 4{,}221$	$1{,}003^{480} = 4{,}212$	$1003 \cdot (1{,}003^{480}-1) = 3221{,}24$	$1{,}0036^{480} = 5{,}612$
$\frac{1036}{1036-12 \cdot 26{,}895} = 1{,}452$	$\frac{\ln(1{,}452)}{\ln(1{,}036)} = 10{,}55$	$\frac{\ln(1{,}473)}{\ln(1{,}036)} = 11{,}0$	$\frac{\ln(1{,}452)}{\ln(1{,}003)} = 186{,}7$	$\frac{1003}{1003-322{,}12} = 1{,}473$	$\frac{\ln(1{,}473)}{\ln(1{,}003)} = 129{,}3$

(2) Zinsperiode: Quartal, $E = 1000$, $p = 4$, $m = 35$; $A = 5000$

$1{,}04^{35} = 3{,}946$	$101 \cdot (1{,}01^{140}-1) = 305{,}737$	$e^{1{,}4} = 4{,}055$	$1{,}01^{140} = 4{,}027$	$1{,}04 \cdot \frac{1{,}04^{35}-1}{0{,}04} = 76{,}60$	$1{,}04^{140} = 242{,}475$
$\frac{130}{130-76{,}60} = 2{,}4345$	$\frac{\ln(2{,}4345)}{\ln(1{,}04)} = 22{,}69$	$\frac{\ln(2{,}4345)}{\ln(1{,}01)} = 89{,}42$	$\frac{\ln(2{,}5343)}{\ln(1{,}04)} = 23{,}71$	$\frac{505}{505-305{,}737} = 2{,}5343$	$\frac{\ln(2{,}5343)}{\ln(1{,}01)} = 93{,}46$

9.14 Ein Betrag von 1000 € soll angelegt werden. Als alternative Anlageformen stehen zur Auswahl:

(a) Sparbrief mit einer nominalen Verzinsung von 3 % und monatlicher Zinszahlung;

(b) Bundesschatzbrief mit einer Verzinsung von 1 % im 1. Jahr, 2% im 2. Jahr, 3 % im 3. Jahr, 6 % im 4. Jahr und jährlicher Zinszahlung.

Wie hoch ist das Kapital nach 4 Jahren in jeder der beiden Anlageformen, wenn die Zinsen dem Konto jeweils am Ende der Zinsperiode gutgeschrieben und mitverzinst werden?

Welche Rendite (effektive Verzinsung) erzielt man in jeder der beiden Anlageformen?

$1{,}03^4 = 1{,}12551$	$1{,}01 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}06 = 1{,}12477$	$1{,}0025^4 = 1{,}01004$	$1{,}03^{48} = 4{,}13225$	$e^{0{,}12} = 1{,}12750$	$1{,}0025^{48} = 1{,}12733$
$25 \cdot \ln(1{,}12551) = 2{,}96$	$\sqrt[4]{1{,}12477} = 1{,}0298$	$\sqrt[4]{1{,}12750} = 1{,}0305$	$\frac{4{,}13225}{4} = 1{,}0331$	$\sqrt[4]{1{,}12733} = 1{,}0304$	$25 \cdot \ln(1{,}12477) = 2{,}94$

9.15 (a) Zu Beginn des 1. und des 2. Quartals wird auf ein Konto jeweils der Betrag K eingezahlt. Danach erfolgen keine weiteren Einzahlungen. Die Verzinsung beträgt p % nominal; die Zinsen werden dem Konto am Ende jeden Quartals gut geschrieben.

Wie hoch ist das Guthaben am Ende des 1., 2., 3., 4. und allgemein des n. Quartals?

(b) Welcher Kontostand ergibt sich am Ende des 2. <u>Jahres</u> für $K = 200$ und $p = 4$?

$1{,}04^2 = 1{,}0816$	$1{,}04^8 = 1{,}3686$	$1{,}01^7 = 1{,}0721$	$1{,}01^8 = 1{,}0829$	$402 \cdot 1{,}01^7 = 431$	$400 \cdot 1{,}01^8 = 433{,}14$

9.16 (a) Zu Beginn jeden Monats werden 100€ auf ein Konto eingezahlt. Die Verzinsung beträgt 1,2 % nominal; die Zinsen werden am Ende jeden Monats dem Konto gut geschrieben.

Wie hoch ist das Guthaben am Ende des 5. Jahres?

(b) Während der 5 Jahre muss mit einer *stetigen* Inflation von 0,8% gerechnet werden.

Welcher heutigen Kaufkraft entspricht dann das zu erwartende Guthaben?

$1001 \cdot (1{,}001^{60}-1) = 61{,}8665$	$1012 \cdot (1{,}012^5-1) = 62{,}1949$	$1{,}001^{60} = 1{,}0618047$	$1{,}012^5 = 1{,}0614574$	$e^{0{,}06} = 1{,}0618365$
$61{,}8665 \cdot 0{,}992^5 = 59{,}4311$	$62{,}1949 \cdot 0{,}992^5 = 59{,}7466$	$62{,}1949 \cdot e^{-0{,}04} = 59{,}7562$	$61{,}8665 \cdot e^{0{,}04} = 64{,}3913$	$61{,}8665 \cdot e^{-0{,}04} = 59{,}4407$

10. Ableitungen

Bestimmen Sie die erste Ableitung für folgende Funktionen:

(1) $f(x) = 5x^4-4x^3+3x^2-2x+1$ (2) $f(x) = (3x-2)(4x+3)$ (3) $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$

(4) $f(x) = \frac{3x(x^2-4)}{4x-1}$ (5) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ (6) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$

(7) $f(x) = x\sqrt{x}$ (8) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^3}}$ (9) $f(x) = 3^x$

(10) $f(x) = x^3 \cdot 3^x$ (11) $f(x) = \dfrac{x \cdot e^x}{x+1}$ (12) $f(x) = \log_3(x)$

(13) $f(x) = x \cdot \ln(x)$ (14) $f(x) = \dfrac{x^2 \cdot \ln(x)}{x-1}$ (15) $f(x) = (2x-3)^4$

(16) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ (17) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}$ (18) $f(x) = e^{2x+1}$

(19) $f(x) = \ln(2x^4+1)$ (20) $f(x) = e^{x^2-1}\,(x-1)$ (21) $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{\sqrt[3]{x+1}}$

(22) $f(x) = e^{\sqrt{3x+1}}$ (23) $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}\,)$ (24) $f(x) = \sqrt{e^{(3x+1)^2}}$

(25) $f(x) = \dfrac{x^4 \cdot e^{2x+1}}{(x-1)^2 \cdot \sqrt{x^2+1}}$ (26) $f(x) = x^x$ (27) $f(x) = (2x+1)^{(3x-2)}$

11. Globale Extrema

11.1 Bestimmen Sie - sofern existent - die globalen Extrema folgender Funktionen:

(1) $f(x) = \begin{cases} f_l(x) = -x^2+4 & \text{für } x \le 1 \\ f_r(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 6x + \frac{41}{6} & \phantom{\text{für }} x > 1 \end{cases}$

(2) $f(x) = \begin{cases} f_l(x) = -2x^2+8x-4 & \text{für } 0 \le x \le 3 \\ f_r(x) = 2x^2-16x+32 & \phantom{\text{für }} 3 < x \le 6 \end{cases}$

(3) $f(x) = \begin{cases} f_1(x) = -x^2+2x+2 & 0 \le x \le 3 \\ f_2(x) = 11-4x & \text{für } 3 < x \le 4 \\ f_3(x) = -9+x & 4 < x \le 6 \end{cases}$

(4) $f(x) = \dfrac{x-2}{(x-1)^2}$

(5) $f(x) = \begin{cases} f_l(x) = -2x^2+4x & \text{für } 0 \le x \le 2 \\ f_r(x) = \frac{1}{2}x^2-6x+10 & \phantom{\text{für }} 2 < x \le 4 \end{cases}$

(6) $f(x) = \begin{cases} f_l(x) = \frac{1}{2}x^2+2x & \text{für } 0 \le x \le 2 \\ f_r(x) = -2x^2+12x-14 & \phantom{\text{für }} 2 < x \le 5 \end{cases}$

(7) $f(x) = e^{\frac{1}{3}x^3-x}$

(8) $f(x) = \begin{cases} f_l(x) = (x-1)^2 & \text{für } x \le 0 \\ f_r(x) = (x+1)^2 & \phantom{\text{für }} x > 0 \end{cases}$

(9) $f(x) = \begin{cases} f_l(x) = 1 + \dfrac{x^3+8}{x^3-8} & \text{für } x \le 0 \\ f_r(x) = 1 + \dfrac{x^3-8}{x^3+8} & \phantom{\text{für }} x > 0 \end{cases}$

(10) $f(x) = \begin{cases} f_1(x) = (x+3)^2 & x \le -2 \\ f_2(x) = -\frac{1}{2}x^2+3 & \text{für } -2 < x < 1 \\ f_3(x) = \frac{1}{2}x^2-2x+4 & x \ge 1 \end{cases}$

(11) $f(x) = \begin{cases} f_l(x) = e^{-x} & \text{für } x \le 0 \\ f_r(x) = \frac{1}{2}x^2+x+1 & \phantom{\text{für }} x > 0 \end{cases}$

(12) $f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x^2+2x-1 & 0 \le x \le 2 \\ f_2(x) = -2x+11 & \text{für } 2 < x < 4 \\ f_3(x) = -\frac{1}{4}x^2+4x-9 & 4 \le x \le 6 \end{cases}$

(13) $f(x) = \begin{cases} f_l(x) = e^x & \text{für } x \le 0 \\ f_r(x) = -\frac{1}{4}x^2+x+1 & \phantom{\text{für }} x > 0 \end{cases}$

(14) $f(x) = \begin{cases} f_1(x) = -2/x & x \le -1 \\ f_2(x) = -x^2+3 & \text{für } -1 < x < 1 \\ f_3(x) = 2/x & x \ge 1 \end{cases}$

(15) $f(x) = \begin{cases} f_l(x) = -x^2-2x+9 & \text{für } 0 \le x \le 2 \\ f_r(x) = x^2-10x+17 & \phantom{\text{für }} 2 < x \le 4 \end{cases}$

(16) $f(x) = \begin{cases} f_1(x) = -x^2+2x & -2 \le x \le 0 \\ f_2(x) = x^2+2x & \text{für } 0 < x \le 2 \\ f_3(x) = -2x+8 & 2 < x \le 4 \end{cases}$

(17) $f(x) = \begin{cases} f_l(x) = 3^{x^2} & \text{für } x \le 0 \\ f_r(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1 & \phantom{\text{für }} x > 0 \end{cases}$

(18) $f(x) = \begin{cases} f_l(x) = 16^{\frac{1}{x+2}} & \text{für } 0 \le x \le 2 \\ f_r(x) = x^3-27x+48 & \phantom{\text{für }} 2 < x \le 4 \end{cases}$

(19) $f(x) = \begin{cases} f_l(x) = \dfrac{1}{1-x} & \text{für } x \le 0 \\ f_r(x) = \frac{1}{3}x^3-x^2+x+1 & \phantom{\text{für }} x > 0 \end{cases}$

(20) $f(x) = \begin{cases} f_l(x) = x^3-6x^2+9x+6 & \text{für } 0 \le x \le 2 \\ f_r(x) = 2^{\frac{x+1}{x-1}} & \phantom{\text{für }} 2 < x \le 3 \end{cases}$

(21) $f(x) = \begin{cases} f_l(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 6 & \text{für } 0 \le x \le 3 \\ f_r(x) = -\frac{1}{9}x^3 + x^2 - 3x + 3 & \text{für } 3 < x \le 6 \end{cases}$

(22) $f(x) = \begin{cases} f_l(x) = 2^{-x} & \text{für } x < -1 \\ f_r(x) = x^3 - 3x & x \ge -1 \end{cases}$

(23) $f(x) = \begin{cases} f_l(x) = x & \text{für } x \le 1 \\ f_r(x) = x^{1/x} & x > 1 \end{cases}$

(24) $f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \dfrac{x-1}{x+1} & x \le -2 \\ f_2(x) = -\frac{1}{28}x^4 + \frac{9}{14}x^2 + 1 & \text{für } -2 < x < 2 \\ f_3(x) = \dfrac{x+1}{x-1} & x \ge 2 \end{cases}$

(25) $f(x) = \begin{cases} f_l(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2} & \text{für } 0 \le x \le 2 \\ f_r(x) = 2^{-x^2+2x} & \text{für } x > 2 \end{cases}$

(26) $f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \dfrac{4}{(x-1)^2} & \text{für } 0 \le x \le 3 \\ f_2(x) = (3-x)\cdot e^{4-x} & \text{für } x > 3 \end{cases}$

11.2 Für ein Produkt seien die Nachfragemenge x in Abhängigkeit seines Verkaufspreises p sowie die Produktionskosten K in Abhängigkeit der hergestellten Menge x gegeben. (Voraussetzung: hergestellte Menge = nachgefragte Menge !)
Bei welchem Preis p_0 (bzw. der dazugehörigen Menge x_0) wird der Gewinn maximal?

(1) $x(p) = 100 - p, \quad 0 \le p \le 100,$ $\qquad K(x) = x^2 + 20x + 200$

(2) $x(p) = \dfrac{900}{(p+1)^2},$ $\qquad K(x) = 50 + 10\sqrt{x}$

(3) $x(p) = 600 - 5p, \quad 0 \le p \le 120,$ $\qquad K(x) = 80x + 1000$

(4) $x(p) = e^{10-p},$ $\qquad K(x) = 1000 + x$

$e^2 = 7{,}4$	$e^4 = 54{,}6$	$e^6 = 403{,}4$	$e^8 = 2981{,}0$	$e^{10} = 22026{,}5$

(5) $x(p) = \dfrac{900}{p-19}, \quad p \ge 20,$ $\qquad K(x) = 400 + 20x - 20\sqrt{x}$

(6) $x(p) = \dfrac{64}{p-7}, \quad p \ge 8,$ $\qquad K(x) = 6 + 10x - 9\sqrt[3]{x^2}$

(7) $x(p) = \dfrac{400}{p-20}, \quad p \ge 21,$ $\qquad K(x) = 100 + 22x - 40\cdot\sqrt{x}$

11.3 Der Verkaufspreis eines Produktes beträgt p € pro Stück; die Produktionskosten K in Abhängigkeit der hergestellten Menge x sind gegeben durch die Funktion $K(x)$.
Bei welcher Produktionsmenge x_0 wird der Gewinn maximal?

(1) $p = 15, \quad K(x) = x\sqrt{x} + 400$

(2) $p = p_0, \quad K(x) = x^{1+a} + b, \quad a, b > 0$

(3) $p = 8, \quad K(x) = x\cdot\sqrt[3]{x} + 100$

(4) $p = 15, \quad K(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x}} + 100$

11.4 Die Produktionskosten K in Abhängigkeit der hergestellten Menge x sind gegeben durch die Funktion $K(x)$.
Bei welcher Produktionsmenge x_0 werden die Stückkosten minimal?

(1) $K(x) = x\sqrt{x} + 500$

(2) $K(x) = 5x - 3x^{2/3} + 25$

12. Differential, Wachstumsrate und Elastizität

12.1 Die Nachfragemenge x eines Produktes in Abhängigkeit seines Preises p sei gegeben.

(a) Berechnen Sie die Elastizitäten von Nachfrage und Umsatz bezüglich des Preises.

(b) Um wie viel % ändern sich Nachfrage und Umsatz approximativ, wenn der Preis p_0 um s % gesenkt wird?

(1) $x(p) = \dfrac{e^{-p}}{\sqrt{p}}, \quad p_0 = 1, \quad s = 2$

(2) $x(p) = \dfrac{e^{-p^2}}{\sqrt[3]{p}}, \quad p_0 = 1, \quad s = 3$

(3) $x(p) = \left(\dfrac{\ln(p)}{p}\right)^2, \quad p_0 = e^2, \quad s = 1$

(4) $x(p) = \dfrac{e^{4-p/2}}{\sqrt{p+1}}, \quad p_0 = 2, \quad s = 3$

(5) $x(p) = \dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{p}}}{(p+1)^2}$, $p_0 = 1$, s = 6

(6) $x(p) = \dfrac{e^{2-p^2}}{\sqrt[3]{p^2+1}}$, $p_0 = 1$, s = 3

(7) $x(p) = \dfrac{e^{p-p^2}}{\sqrt[4]{2p^2+3}}$, $p_0 = 1$, s = 5

(8) $x(p) = \dfrac{e^{2p-p^2}}{\sqrt[4]{4p^2+2}}$, $p_0 = 1$, s = 3

12.2 Die Produktionskosten K in Abhängigkeit der hergestellten Menge x eines Produktes seien gegeben.

(a) Berechnen Sie die Elastizitäten von Kosten und Stückkosten bzgl. x.

(b) Um wie viel Prozent ändern sich Kosten bzw. Stückkosten approximativ, wenn die Produktionsmenge x_0 um s % erhöht wird?

(1) $K(x) = \sqrt[3]{x^2-x+50}$, $x_0 = 100$, $s = 3$

(2) $K(x) = \sqrt{2x+100}$, $x_0 = 100$, $s = 3$

(3) $K(x) = \sqrt[4]{2x^2+200}$, $x_0 = 20$, $s = 5$

(4) $K(x) = \sqrt[3]{x^3+2000}$, $x_0 = 20$, $s = 5$

12.3 Der Verkaufspreis eines Produktes beträgt 16 € pro Stück; die Produktionskosten K in Abhängigkeit der hergestellten Menge x belaufen sich auf $K(x) = 2x\sqrt{x} + 100$.

(a) Berechnen Sie die Elastizitäten von Gewinn und Stückgewinn bezüglich der hergestellten Menge x.

(b) Um wie viel Prozent ändern sich Gewinn bzw. Stückgewinn approximativ, wenn die Produktionsmenge $x_0 = 25$ um 4 % erhöht wird?

12.4 $G(x)$ stellt den Gewinn eines Unternehmens in Abhängigkeit der hergestellten Menge x eines Produktes dar.

(a) Berechnen Sie die Elastizitäten von Gewinn und Stückgewinn bezüglich der hergestellten Menge x.

(b) Um wie viel Prozent ändern sich Gewinn bzw. Stückgewinn approximativ, wenn die Produktionsmenge x_0 um s % erhöht wird?

(1) $G(x) = 1000 \cdot e^{-\frac{(x-100)^2}{3200}}$, $x_0 = 80$, s = 1

(2) $G(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2-64}}{x+8}$, $x_0 = 12$, s = 5

(3) $G(x) = \dfrac{10\cdot(x-5)\cdot\sqrt{x^3+500}}{x^2+100}$, $x_0 = 10$, s = 10

(4) $G(x) = \dfrac{20\cdot(x^2+100)\cdot\sqrt[3]{x+10}}{(x+20)^2}$, $x_0 = 10$, s = 4

13. Taylor-Entwicklung

Bestimmen Sie für folgende Funktionen die Taylorpolynome 2. Grades, entwickelt an der Stelle x_0.

(1) $f(x) = (x^2+1)\cdot\ln(x^2+1)$, $x_0 = 0$

(2) $f(x) = g(x)\cdot\ln(g(x))$, $x_0 = 0$ und $g(x_0) = g'(x_0) = g''(x_0) = 1$

(3) $f(x) = 2x\cdot e^{1-x}$, $x_0 = 1$

(4) $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$, $x_0 = 0$

(5) $f(x) = e^{x-\sin(x)}$, $x_0 = 0$

(6) $f(x) = e^x\cdot\ln(x+1)$, $x_0 = 0$

(7) $f(x) = e^{g(x)}$, $x_0 = 0$, $g(0) = 0$ und $g'(0) = 1 = g''(0)$

(8) $f(x) = (x^5-1)\cdot(x^3-1)$, $x_0 = 1$

(9) $f(x) = (x\cdot\ln(x))^2$, $x_0 = 1$

(10) $f(x) = \ln(1+\ln(x))$, $x_0 = 1$

(11) $f(x) = \sin(e^x-1)$, $x_0 = 0$

(12) $f(x) = e^{\sin(\ln(x+1))}$, $x_0 = 0$

(13) $f(x) = \dfrac{x\cdot\ln(x)}{1+\ln(x)}$, $x_0 = 1$

(14) $f(x) = e^{\sin(x^2)}$, $x_0 = 0$

(15) $f(x) = x^x$, $x_0 = 1$

(16) $f(x) = \sin(x^2-1)\cdot\cos(x^2-1)$, $x_0 = 1$

(17) $f(x) = x\cdot\sqrt{x}\cdot\ln(x)$, $x_0 = 1$

(18) $f(x) = (x+1)\,e^{x^2}$, $x_0 = 0$

(19) $f(x) = \sin(x)\cdot\ln(e^x+x)$, $x_0 = 0$

(20) $f(x) = x - \dfrac{g(x)}{g'(x)}$, $x_0 = 0$, $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$, $g''(0) = 2$, $g'''(0) = 3$

(21) $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\left(\frac{1}{x}\right)}$, $x_0 = 1$

(22) $f(x) = \sin(\ln(x^2+1))$, $x_0 = 0$

14. Unbestimmte Ausdrücke: Die Regeln von l´Hospital

14.1 Bestimmen Sie die Grenzwerte folgender Ausdrücke.

(1) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x-1}$	(2) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^4 - 4x + 3}$	(3) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x}$
(4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$	(5) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$	(6) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$
(7) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3}$	(8) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{2x^2}$	(9) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x+1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$
(10) $\lim\limits_{x \to 1} (x-1) \cdot \ln(x^2 - 1)$	(11) $\lim\limits_{x \to \infty} x \cdot \ln(1 + \frac{a}{x})$	(12) $\lim\limits_{x \to \infty} x \cdot \tan(\frac{a}{x})$
(13) $\lim\limits_{x \to 1} (\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)})$	(14) $\lim\limits_{x \to 0} x^x$	(15) $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \frac{a}{x})^x$
(16) $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 1)^{(x-1)}$	(17) $\lim\limits_{x \to \infty} (\cos(\frac{1}{x}))^{x^2}$	

14.2 Gegeben sei eine Funktion f und eine Stelle x_0.

(a) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $f'(x)$ und $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.

(b) Wie lautet das Taylor-Polynom ersten Grades (Tangente) von f, entwickelt an der Stelle x_0?

(1) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, $x_0 = 0$	(2) $f(x) = \frac{x^5 - 1}{x-1}$, $x_0 = 1$	(3) $f(x) = \frac{2x \cdot \ln(x)}{x-1}$, $x_0 = 1$
(4) $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$, $x_0 = 0$	(5) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x-1}$, $x_0 = 1$	(6) $f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x}$, $x_0 = 0$
(7) $f(x) = \frac{e^x + \sin(x) - 1}{x}$, $x_0 = 0$	(8) $f(x) = x + \frac{\ln(x)}{x-1}$, $x_0 = 1$	(9) $f(x) = x + \frac{\sin(x)}{x}$, $x_0 = 0$

14.3 (a) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = e^{\sin(\ln(x+1))}$ die Tangente an der Stelle $x_0 = 0$. (Formel angeben!)

(b) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to \infty} x \cdot \sin(\frac{2}{x})$. (Tipp: l´Hospital)

15. Newton-Verfahren

15.1 (a) Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung der beiden Funktionen g und h.

(b) Ermitteln Sie für die Funktion f mit Hilfe des Newton-Verfahrens ausgehend vom Startwert x_0 die beiden Iterationsstellen x_1 und x_2.

(1)	$g(x) = \sqrt[4]{x^4 + 1}$,	$h(x) = 2^{3x} - e^{4x-1} + 5$;	$f(x) = x^3 + x^2 + 24x - 96$,	$x_0 = 0$
(2)	$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$,	$h(x) = e^{2x+1} - \ln(x^3 + 1) + 5$;	$f(x) = x^3 - 7x^2 + 36x - 72$,	$x_0 = 0$
(3)	$g(x) = \sqrt[3]{(3x+1)^2}$,	$h(x) = 3^{x^2+1} - e^{2x-1} + 4$;	$f(x) = x^3 - 13x^2 - 45x + 225$,	$x_0 = 0$
(4)	$g(x) = \sqrt[3]{x^3 - 1}$,	$h(x) = 2^{1-x^3} - e^{x^2} + 1$;	$f(x) = x^3 - 10x^2 - 192x + 864$,	$x_0 = 8$
(5)	$g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$,	$h(x) = \ln(x^3 + 3^x)$;	$f(x) = x^3 - 19x^2 + 19x + 255$,	$x_0 = 2$
(6)	$g(x) = x^4 \cdot 4^x$,	$h(x) = \ln(\sqrt[4]{x^4 + 1})$;	$f(x) = x^3 - 22x^2 + 60x + 216$,	$x_0 = 3$
(7)	$g(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$,	$h(x) = \ln(x^4 + 4^x)$;	$f(x) = x^3 + 2x^2 - 100x - 200$,	$x_0 = -5$
(8)	$g(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^2 + 1}}$,	$h(x) = 2^{\sin(x)} + \ln(x^4 + 1)$;	$f(x) = x^3 - 10x^2 + 36x - 48$,	$x_0 = 2$
(9)	$g(x) = e^{\sin(x^2+1)}$,	$h(x) = \sqrt{\ln(x^4 + 1)}$;	$f(x) = x^3 + 7x^2 + 36x + 72$,	$x_0 = 0$
(10)	$g(x) = \sin(e^{x^2+1})$,	$h(x) = \ln(\sqrt[4]{x^4 + 1})$;	$f(x) = x^3 - 14x^2 + 100x - 312$,	$x_0 = 1$
(11)	$g(x) = \sqrt{\ln(x^2 + 1)}$,	$h(x) = 2^{3^x}$;	$f(x) = x^3 + 4x^2 + 8x + 8$,	$x_0 = 0$
(12)	$g(x) = e^{4^x - x^4}$,	$h(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}}$;	$f(x) = x^3 - x^2 + x + 3$,	$x_0 = 2$
(13)	$g(x) = \sqrt{\sin(x^2 + 1)}$,	$h(x) = \ln(1 + e^{x^2+1})$;	$f(x) = x^3 + x^2 + 63x + 63$,	$x_0 = 3$
(14)	$g(x) = 2^{\sqrt{x^2+1}}$,	$h(x) = \ln(\sin(x^2 + 1))$;	$f(x) = x^3 - 8x^2 + 41x - 58$,	$x_0 = 5$

(15) $g(x) = \sqrt[3]{(2^x+1)^4}$, $h(x) = \sin(\ln(\frac{x^2+1}{e^x}))$; $f(x) = x^3 - 16x^2 + 105x - 270$, $x_0 = 3$

(16) $g(x) = (x^2+1)^{(x^2+1)}$, $h(x) = \sqrt[3]{2^{x+\sin(x)}}$; $f(x) = x^3 - 5x^2 + 28x - 24$, $x_0 = 4$

15.2 (a) Bestimmen Sie für die Funktion f das Taylorpolynom 2. Grades, entwickelt an der Stelle x_0.

(b) Ermitteln Sie für die Funktion f mit Hilfe des Newton-Verfahrens ausgehend vom Startwert x_0 die beiden Iterationsstellen x_1 und x_2. **Formeln angeben.**

(1) (a) $f(x) = e^{1-x^2}$, $x_0 = 1$; (b) $f(x) = x^3 + 7x^2 + 36x + 72$, $x_0 = 0$

(2) (a) $f(x) = \ln(x^4 + 4x + 1)$, $x_0 = 0$ (b) $f(x) = x^3 - x^2 + x + 3$, $x_0 = 2$

(3) (a) $f(x) = x \cdot e^{x-1}$, $x_0 = 1$ (b) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 8x + 8$, $x_0 = 0$

16. Partielle Ableitungen

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung.

(1) $f(x,y) = x^3y - xy^2 - 2(x-2y) + 1$

(2) $f(x,y) = (2x-3y)^4$

(3) $f(x,y) = (x-2y)(x^2+xy-1)$

(4) $f(x,y) = e^{x^2y-1}$

(5) $f(x,y) = \ln(\frac{x^2+1}{2y+3})$

(6) $f(x,y) = \mathrm{a} \cdot x^{\mathrm{b}} \cdot y^{\mathrm{c}}$

(7) $f(x,y) = x \cdot e^{2xy} - y \cdot \ln(x^2 - y)$

(8) $f(x,y) = \frac{x^2}{y^3} \cdot \sqrt{x(y+1)}$

(9) $f(x,y) = x^y \cdot y^x$

(10) $f(x,y,z) = \frac{(2x-1)(3y-2)}{4z-3}$

(11) $f(x,y,z) = \frac{xy^2z^3 \sqrt{(x-1)^5\,(y-1)^3\,(z-1)}}{e^{x+y+z}}$

17. Lokale Extrema für Funktionen mit mehreren Variablen

17.1 Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf lokale Extrema und Sattelpunkte!

(1) $f(x,y) = (x-1)^3 + (y-1)^3 - 3(x-1)(y-1) + 1$

(2) $f(x,y) = 3\ln(x) - xy^2 + 2(y-x)$

(3) $f(x,y) = \ln(\frac{2y}{x+1}) + y(x-1) + 2$

(4) $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}y^2 + xy - x + y + 1$

(5) $f(x,y) = (x^2-2x) \cdot (y^2-2y)$

(6) $f(x,y,z) = x(y+2z-6) + y(1-z)$

(7) $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}y^3 - xy + x - y - 1$

(8) $f(x,y) = x^3 + \frac{3}{2}(y-1)^2 - 3x(y-1) + 2$

(9) $f(x,y) = 3(x-1)^2 + 2y^3 - 6xy + 6y + 4$

(10) $f(x,y) = x^2y - 4x + 2y - 6\ln(y)$

(11) $f(x,y) = (x^2+3) \cdot y - 6x - 12\ln(y) + 1$

(12) $f(x,y) = -3x^2 + 2y^3 + 6(xy + x - y) + 1$

(13) $f(x,y) = 2 \cdot (\frac{1}{3}x^3 - x + xy + y + 1) - y^2$

(14) $f(x,y) = 2(x-y) - x^2y + 3\ln(y) + 1$

(15) $f(x,y) = 2xy + 2x - y - 8 \cdot \ln(x) - 3 \cdot \ln(y)$

(16) $f(x,y) = (2y-1) \cdot (x+1) - 3 \cdot \ln(x) - 8 \cdot \ln(y)$

17.2 (a) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung der Funktion f.

(b) Ermitteln Sie zu jedem der gegebenen kritischen Punkte die Hesse-Matrix $\mathbf{H}_f$ und überprüfen Sie diese auf Definitheit. Handelt es sich bei den kritischen Punkten um lokale Minima, lokale Maxima oder Sattelpunkte?

(1) $f(x,y) = x^2y + 2xy + y^2 + 1$, $(x_0, y_0) = (-1, \frac{1}{2})$

(2) $f(x,y) = xy^2 - 2xy - x^2 + 1$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $(x_1, y_1) = (0, 2)$, $(x_2, y_2) = (-\frac{1}{2}, 1)$

(3) $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}y^2 + 3y + 2xy + y \cdot \ln(x) - 1$, $(x_0, y_0) = (1, -1)$

(4) $f(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + xy + 4x + \frac{4}{x} + 2 \cdot \ln(x) + 1$, $(x_0, y_0) = (1, -1)$, $(x_1, y_1) = (2, -2)$

(5) $f(x,y) = x^4y + xy^3 - \frac{5}{2}x^2 - 2y^2 + 1$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $(x_1, y_1) = (1, 1)$

(6) $f(x,y) = 4x^3 - 4y^3 + 2x^2y^2 - 8xy + 1$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $(x_1, y_1) = (-1, 1)$

(7) $f(x,y) = x^3 - 10x^2 + 53x + y^3 - 8y^2 + 53y + x^2y + xy^2 - 18xy - 100$, $(x_0, y_0) = (3, 2)$, $(x_1, y_1) = (4, 3)$

(8) $f(x,y) = x^3 - 14x^2 + 92x + y^3 - 10y^2 + 92y - 24xy + x^2y + xy^2 - 200$, $(x_0, y_0) = (6, 4)$, $(x_1, y_1) = (4, 2)$

(9) $f(x,\ y) = x^5y + xy^5 - 6xy + 5$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $(x_1, y_1) = (1, 1)$

(10) $f(x,y) = x^3 + y^3 + x^2\cdot(y-2) + y^2\cdot(x-16) - 18xy + 77\cdot(x+y) + 1$, $(x_0, y_0) = (0, 7)$, $(x_1, y_1) = (-1, 6)$

17.3 (a) Die nachgefragten Mengen $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ der Produkte im Sortiment eines Herstellers in Abhängigkeit der Verkaufspreise $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ seien gegeben durch $\mathbf{x}(\mathbf{p}) = \mathbf{v} + \mathbf{M}\cdot\mathbf{p}$, $\mathbf{M}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$; die Kosten der hergestellten (= nachgefragten) Produkte belaufen sich auf $\mathrm{K}(\mathbf{x}(\mathbf{p})) = \mathbf{k}'\mathbf{x}(\mathbf{p}) + \mathrm{u}$, $\mathbf{k}\in\mathbb{R}^n$, $\mathrm{u}\in\mathbb{R}$. Bestimmen Sie Gradient und Hesse-Matrix der Gewinnfunktion $\mathrm{G}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}'\mathbf{x}(\mathbf{p}) - \mathrm{K}(\mathbf{x}(\mathbf{p}))$ in Abhängigkeit von $\mathbf{p}$.

(b) Bilden Sie alle Ableitungen 1. und 2. Ordnung der Funktion $f(x,y) = \ln(x^3) - x(y^2+2) + 2y$.

(c) (1, 1) ist ein kritischer Punkt der Funktion unter (b).
Handelt es sich dabei um ein lokales Minimum, ein lokales Maximum oder um einen Sattelpunkt?

17.4 Die Absätze x_i von 3 Produkten eines Unternehmens in Abhängigkeit ihrer Preise p_i sind:
Bei welchen Preisen wird der Umsatz maximal?

$x_1 = 6 - 2p_1 + p_2$
$x_2 = 12 + p_1 - 4p_2 + p_3$
$x_3 = 6 + p_2 - 2p_3$

17.5 Die Absätze x_1, x_2 von 2 Produkten eines Unternehmens in Abhängigkeit ihrer Preise p_1, p_2 sowie ihre variablen Kosten k_1, k_2 pro hergestellter (= abgesetzter) Mengeneinheit sind gegeben. Wie müssen die Preise p_1, p_2 gewählt werden, damit der Deckungsbeitrag maximal wird? (Deckungsbeitrag = Umsatz − variable Kosten)

(1) $x_1 = 8 - 2p_1 + p_2$, $x_2 = 9 + 2p_1 - 2p_2$, $k_1 = 2$, $k_2 = 3$

(2) $x_1 = 10 - 4p_1 + p_2$, $x_2 = 18 + 2p_1 - 5p_2$, $k_1 = 2$, $k_2 = 3$

(3) $x_1 = 2 - 3p_1 + p_2$, $x_2 = 3 + 2p_1 - p_2$, $k_1 = 1$, $k_2 = 1$

18. Partielles und totales Differential, partielle Elastizität und homogene Funktionen

Gegeben sei die Funktion f.

(a) Ist die Funktion homogen? Wenn ja, von welchem Grade?

(b) Bestimmen Sie alle partiellen Elastizitäten.

(c) Um wie viel % ändert sich der aktuelle Funktionswert $f(x_0, y_0)$ bzw. $f(x_0, y_0, z_0)$ näherungsweise, wenn jede Variable ceteris paribus um s % erhöht wird?

(d) Um wie viel % ändert sich der aktuelle Funktionswert, wenn alle Variablen gleichzeitig um s % erhöht werden?

(1) $f(x,y,z) = \sqrt[6]{x^3\,y^4\,z^5}$, s = 6

(2) $f(x,y) = \sqrt{x(x+y)}$, s = 3, $x_0 = 10$, $y_0 = 20$

(3) $f(x,y) = \frac{y}{x}\sqrt{x^2+y^2}$, s = 2, $x_0 = y_0 = 10$

(4) $f(x,y,z) = \frac{(x+y)(x+z)^2}{(y+z)^3}$, s = 2, $x_0 = y_0 = z_0 = 100$

(5) $f(x,y) = \sqrt{(2x+y)(x+2y)}$, s = 2, $x_0 = y_0 = 10$

(6) $f(x,y) = \sqrt[3]{\frac{2x^4+y^4}{2x+y}}$, s = 3, $x_0 = y_0 = 10$

(7) $f(x,y) = \sqrt{x^4+2xy^3}$, s = 3, $x_0 = y_0$

(8) $f(x,y) = (x+2y)\cdot\sqrt{2x^2+y^2}$, s = 4, $x_0 = y_0 = 10$

(9) $f(x,y) = \frac{(x+2y)^2}{\sqrt{x^2+2y^2}}$, s = 3, $x_0 = y_0 = 10$

(10) $f(x,y) = \sqrt{\frac{x\cdot(x^2+y^2)}{x+y}}$, s = 4, $x_0 = y_0 = 10$

(11) $f(x,y) = \frac{\sqrt{2x^4+y^4}}{x+2y}$, s = 3, $x_0 = y_0 = 2$

(12) $f(x,y) = (x+y)\cdot\sqrt{\frac{2x^3+y^3}{x+2y}}$, s = 3, $x_0 = y_0 = 2$

(13) $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt[3]{x^3+2y^3}}$, s = 6, $x_0 = y_0 = 2$

(14) $f(x,y) = x\cdot\sqrt[3]{\frac{y^4}{x+2y}}$, s = 5, $x_0 = 6$, $y_0 = 2$

(15) $f(x,\ y) = 3xy^2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{xy^5}}$, s = 6

(16) $f(x,y) = x^2\cdot\sqrt{\frac{y}{x+2y}}$, s = 4, $x_0 = 4$, $y_0 = 2$

19. Kettenregel, totale Ableitung, Ableitung impliziter Funktionen

19.1 Bestimmen Sie die totalen Ableitungen $\frac{df}{dt}$ und $\frac{d^2f}{dt^2}$ für $f(x,y,z) = x^2+2xy-yz^2$

mit $x(t) = 2t+1,\ y(t) = t^2-1,\ z(t) = t-2.$

19.2 Bestimmen Sie die totalen Ableitungen $\frac{df}{dx}$ und $\frac{d^2f}{dx^2}$ für $f(x,y) = x^2y+x-y+1$ mit $y(x) = \ln(x+1).$

19.3 Bestimmen Sie die totalen partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}$ für $f(x,y) = xy^2-2x+3$ mit

$x(u,v) = u+2v-uv,\ y(u,v) = u^2v-1.$

19.4 Gegeben sei eine Produktionsfunktion $f(x,y)$ mit der aktuellen Produktion (x_0, y_0).
Wie viele Einheiten von y können (näherungsweise) durch den zusätzlichen Einsatz einer Einheit von x substituiert werden, wenn die Produktion konstant bleiben soll?

(1) $f(x,y) = 2\cdot\sqrt[3]{x^2y},\ (x_0, y_0) = (8, 64)$

(2) $f(x,y) = \sqrt{7x^2+y^2+xy},\ (x_0, y_0) = (40, 40)$

(3) $f(x,y) = \ln(x^2y^2+1),\ x_0 = y_0$

(4) $f(x,y) = \sqrt[3]{2x^2+3y^2+xy+1},\ (x_0, y_0) = (5, 3)$

(5) $f(x,y) = \dfrac{30}{\sqrt{\frac{6}{x^2}+\frac{12}{y^2}}},\ (x_0, y_0) = (10, 20)$

(6) $f(x,y) = \dfrac{20}{\sqrt{\frac{2}{x^2}+\frac{8}{y^2}}},\ (x_0, y_0) = (10, 20)$

19.5 Gegeben sei die Gleichung $x^2\ln(y)+zy^3 = z^4$.
Bestimmen Sie die Steigungen $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ und $\frac{dy}{dz}$ jeweils in dem Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$.

19.6 (a) Gegeben ist eine Funktion $f(x,y)$ bzw. $f(x,y,z)$, wobei x, y, z wiederum von einer Variablen t abhängen. Bestimmen Sie die totale Ableitung $\frac{df}{dt}$ mit Hilfe der Kettenregel.

(b) Ermitteln Sie die Steigung $\frac{dy}{dx}$ der gegebenen impliziten Funktion in dem Punkt (x_0, y_0).

Geben Sie bei (a) und (b) zunächst die jeweils zu verwendende Formel an.

(1) (a) $f(x,y) = x\cdot e^y - y\cdot\ln(x),\ x(t) = t^2-1,\ y(t) = t^3+1;$ (b) $x^3 = 2xy^2-3y+2,\ (x_0, y_0) = (1, 1)$

(2) (a) $f(x,y) = 3\cdot x^{1/3}\cdot y^{2/3},\ x(t) = t^2+1,\ y(t) = \ln(t);$ (b) $e^{4x-2y} = 1,\ (x_0, y_0)$ beliebig

(3) (a) $f(x,y,z) = xy^2z^3,\ x(t) = e^t,\ y(t) = \ln(t),\ z(t) = \sqrt{t};$ (b) $3^{x^2-2y} = \frac{1}{3},\ (x_0, y_0) = (1, 1)$

(4) (a) $f(x,y) = (3x-4y)^5,\ x(t) = \ln(t^2+1),\ y(t) = \sqrt{t^3};$ (b) $x^5y^2+x^2 = xy^5+y+1,\ (x_0, y_0) = (1, 0)$

(5) (a) $f(x,y) = \sqrt[3]{3x^2-2y^3},\ x(t) = e^{2t+1},\ y(t) = \ln(t^2+1);$ (b) $\ln(x^4y^2+1) = 3,\ x_0 = y_0$

(6) (a) $f(x,y) = y\cdot e^x + x\cdot\ln(y),\ x(t) = \sin(t^2),\ y(t) = t^4+1;$ (b) $e^{x^2-2y} = 1,\ (x_0, y_0) = (2, 2)$

(7) (a) $f(x,y) = x\cdot\sin(y^2) + y\cdot\ln(x^2+1),\ x(t) = e^{2t},\ y(t) = \sqrt[3]{t};$ (b) $x^4 = y^3 - xy^2 + 1,\ (x_0, y_0) = (1, 1)$

(8) (a) $f(x,y) = x^2\cdot e^{y^2+1} - \sin(2y+1)\cdot\ln(x^2+1),\ x(t) = \sqrt{2t+1},\ y(t) = (3t+1)^3;$

(b) $y^5 + 10x + 1 = 4x^3 - 4xy^2 + 12y,\ (x_0, y_0) = (1, 1)$

19.7 (a) Bestimmen Sie die beiden partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion $f(x,y)$.

(b) Ermitteln Sie die Steigung $\frac{dy}{dx}$ der impliziten Funktion $f(x,y) = 0$ in dem Punkt (x_0, y_0).

(1) $f(x,y) = (2x+y)^{(2x+y)} - 3$

(2) $f(x,y) = \dfrac{(\ln(x+1)+2)\cdot(y+2)}{(x+1)\cdot e^y} - 4,\ (x_0, y_0) = (0, 0)$

20. Extrema unter Nebenbedingungen

20.1 Bestimmen Sie die lokalen Extrema folgender Funktionen unter Nebenbedingungen.

(1) $f(x,y,z) = x^2+xy+z^2,\ x+y+z = 10,\ x = 2y$

(2) $f(x,y) = x^{1/3}\,y^{2/3},\ x, y > 0,\ x^{1/3}+y^{2/3} = 8$

(3) $f(x,y) = -x^2-y^2+4,\ (x-1)^2+(y-1)^2 = 2$

(4) $f(x,y) = x^3-xy+y^3,\ x\cdot y = 1$

(5) $f(x,y) = x-y, \quad x^2+y^2 = 8$

(6) $f(x,y) = x+y, \quad x^2+xy+y^2 = 3$

(7) $f(x,y) = 2x+3y, \quad x^2 + 3y^2 = 7$

(8) $f(x,y) = 4x+2y, \quad 2x^2+y^2 = 12$

(9) $f(x,y) = 4x+2y, \quad x^2 + y^2/4 - 2x - 2y = 3$

(10) $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2, \quad x^2 + y^2 = 5$

(11) $f(x,y) = 2x+6y, \quad x^2 + y^2 = 4x + 6y - 3$

(12) $f(x,y) = x-y, \quad x^2+y^2 = 2y+7$

(13) $f(x,y) = 2x+3y, \quad 4x^2+y^2 = 8x+2y+35$

(14) $f(x,y) = (x-2)^2 + (y-1)^2, \quad x^2 + y^2 = 5$

(15) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10, \quad y^2 = 10 - x^2$

(16) $f(x,y) = (x-4)^2 + (y-3)^2, \quad x^2 + y^2 = 25$

20.2 Gesucht sind die lokalen Extrema der Funktion f unter einer Nebenbedingung.

(a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion $L(x, y, \lambda)$ auf und bestimmen Sie für diese Funktion alle notwendigen partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung.

(b) Gegeben sind kritische Punkte (x_i, y_i) von L. Berechnen Sie die dazugehörigen λ_i.

(c) Bestimmen Sie die Hesse-Matrizen $\mathbf{H}_L(x_i, y_i, \lambda_i)$.

(d) Handelt es sich bei den kritischen Punkten um lokale Minima oder lokale Maxima der Funktion f unter der Nebenbedingung? (Rechnung!)

(1) $f(x,y) = \ln(x) + y, \quad x^2 + xy + y^2 = 3; \quad (x_0, y_0) = (1, 1)$

(2) $f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x) + y, \quad x + 2y = 2 - \sqrt{x+2y}; \quad (x_0, y_0) = (1, 0)$

(3) $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 - x + 1, \quad x^2 + y^2 = 1; \quad (x_0, y_0) = (1, 0), \quad (x_1, y_1) = (-1, 0)$

(4) $f(x,y) = \dfrac{y}{x}, \quad y + 1 + \ln(x+y) = 0; \quad (x_0, y_0) = (2, -1)$

(5) $f(x,y) = \dfrac{y}{x+2} + x + 1, \quad x^2 + y^2 = 4 - 2xy; \quad (x_0, y_0) = (0, 2), \quad (x_1, y_1) = (-4, 6)$

(6) $f(x,y) = xy^2+2xy-3y+x-1, \quad x^3-y^3 = 1+3x^2y-3xy^2; \quad (x_0, y_0) = (1, 0), \quad (x_1, y_1) = (-1, -2)$

(7) $f(x,y) = x+y, \quad \ln(x^2+y) = y^2+x-1; \quad (x_0, y_0) = (0, 1), \quad (x_1, y_1) = (1, 0)$

21. Integralrechnung

Berechnen Sie die Integrale

(1) $\int_0^1 \int_0^1 -3x^2-3y^2+4 \, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$

(2) $\int_1^3 \int_1^3 3y^2-2xy-4 \, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$

(3) $\int_0^1 \int_1^2 6yx^2-6xy^2-1 \, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$

(4) $\int_1^e \int_2^3 \dfrac{2x}{y} \, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$

(5) $\int_{0,25}^{0,5} \int_{0,5}^1 \dfrac{1}{x^3y^3} \, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$

(6) $\int_1^4 \int_1^2 \dfrac{y}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$

(7) $\int_1^8 \int_0^1 \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt[3]{x}} \, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$

(8) $\int_0^{\frac{1}{e+1}} \int_1^e 4xy + \dfrac{2}{y} \, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$

(9) $\int_1^e \int_4^9 \dfrac{1}{y\cdot\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$

(10) $\int_1^8 \int_1^2 \dfrac{6\,x^2}{7\sqrt[3]{y}} \, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$

(11) $\int_1^2 \int_0^1 9x^2y^2-4xy+1 \, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$

(12) $\int_1^e \int_0^1 \dfrac{3\sqrt{x}}{2y} \, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$

(13) $\int_1^3 \int_0^3 x^2y + \dfrac{1}{y^2} \, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$

(14) $\int_0^1 \int_0^2 3x^2y + \dfrac{2x}{\sqrt{y}} \, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$

(15) $\int_0^1 \int_1^4 4xy - \frac{3}{2}\sqrt{\dfrac{y}{x}} \, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$

(16) $\int_1^4 \int_0^1 30 \cdot \sqrt{\dfrac{x^3}{y^5}} \, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$

(17) $\int_0^1 \int_1^4 6xy^2 + \dfrac{y}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$

(18) $\int_1^9 \int_0^1 3x^2\sqrt{y} + \dfrac{3}{2y^2\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$

(19) $\int_1^{e^2} \int_1^2 \dfrac{2x}{y} + \dfrac{1}{x^2\sqrt{y}} + \mathrm{c} \, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ mit $\mathrm{c} = -\dfrac{e}{e^2-1}$

(20) $\int_1^3 \int_0^3 xy^2 - \dfrac{1}{x^2} \, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$

(21) $\int_0^1 \int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{x}} + 4xy + 5\sqrt[3]{y^2} \, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$

(22) $\int_1^{27} \int_1^8 \frac{2}{9} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{x}{y^2}} \, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$

(23) $\int_1^4 \int_0^1 8xy - 3\cdot\sqrt{\dfrac{x}{y}} \, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$

(24) $\int_1^e \int_1^4 \; 15\sqrt{y^3} + 2\frac{y}{x} + \frac{8}{y^2} - \frac{4}{x} - 64 \;\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$

(25) $\int_4^9 \int_1^4 \; 5\sqrt{\frac{x^3}{y}} - 9\sqrt{\frac{y}{x^3}} \;\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$

(26) $\int_1^9 \int_1^4 \; 2x - 4y + 3\cdot\sqrt{\frac{x}{y^3}} \;\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$

(27) $\int_1^e \int_1^8 \; \frac{2}{y\cdot\sqrt[3]{x}} \;\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$

(28) $\int_1^8 \int_0^1 \; 3x^2 + 2y + \frac{40}{9}\cdot\sqrt[3]{\frac{x}{y^2}} \;\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$

(29) $\int_1^e \int_1^4 \; \frac{4}{xy^2} - \sqrt{\frac{9}{y^3}} + 1 \;\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$

ERGEBNISSE

1. Vektoren

1.1 (1) $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, n.d., (3, 5), (1, 1), n.d., n.d. (2) $3\cdot\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}, 2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, 5\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, n.d.

(3) 8, n.d., n.d., n.d., n.d., 20, 20 (4) 3·8, 2·8, 24 –20 (5) 34, 2, –8

(6) $\sqrt{5}, \sqrt{2}, 3\cdot\sqrt{2}, 2\cdot\sqrt{3}$ (7) $\sqrt{n}$, 5, $\sqrt{1/2}$ (8) 2, $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

1.2 120°, 45°, 135°, 120°, 60°, 120° 1.3 –1, –2, 1 1.4 ja, ja, nein, nein, ja, ja

1.5 $\begin{pmatrix}2&3\\4&6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&4\\3&6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2\\2&4\\3&6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4&6\\6&9\\8&12\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&4&6\\3&6&9\\4&8&12\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\1&1\\1&1\end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix}1&2&3\\\vdots&\vdots&\vdots\\1&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&\cdots&1\\2&\cdots&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&\cdots&1\\\vdots&&\vdots\\1&\cdots&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&\cdots&0&1&0&\cdots&0\\0&\cdots&0&2&0&\cdots&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\\vdots&\vdots\\0&0\\2&3\\0&0\\\vdots&\vdots\\0&0\end{pmatrix}$

2. Matrizen

2.1 $\begin{pmatrix}14&-32\\-32&77\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}17&-22&27\\-22&29&-36\\27&-36&45\end{pmatrix}$, n.d., $\begin{pmatrix}-7&-1&-10\\8&-1&11\\-9&3&-12\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&-1\\9&-21\end{pmatrix}$, n.d., $\begin{pmatrix}1&-4&9\\-4&10&-18\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&-4\\-4&10\\9&-18\end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix}7&-10\\25&-52\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-7\\8\\-9\end{pmatrix}$, –33, 39, 194, $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$

2.2 2, 1, 2, 3 2.3 1, –2, –1 2.4 $\begin{pmatrix}1&1/b\\1/b&1\end{pmatrix}$ 2.5 2, –3 2.6 –1

2.7 0 2.8 2 2.9 –2 2.10 1

2.11 (1) $\begin{pmatrix}5&1\\2&4\\2&4\\3&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}35\\50\\50\\45\end{pmatrix}$, 260 (2) $\begin{pmatrix}3&3\\4&2\\4&2\\1&5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}45\\50\\50\\35\end{pmatrix}$, 280 (3) $\begin{pmatrix}3&9\\3&3\\3&3\\5&9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}105\\45\\45\\115\end{pmatrix}$, 400

2.12 (1) $\begin{pmatrix}50\\50\\50\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}16\\10\\10\end{pmatrix}$, 3000 (2) $\begin{pmatrix}100\\100\\100\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}25\\25\\25\end{pmatrix}$, 6000 (3) $\begin{pmatrix}400\\400\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}200\\100\\400\\400\end{pmatrix}$, 120000

(4) $\begin{pmatrix}20\\20\\20\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}$, 1020

2.13 (1) $\begin{pmatrix}500\\900\\200\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}20\\20\end{pmatrix}$, 2500 (2) $\begin{pmatrix}500\\1400\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}80\\80\\80\end{pmatrix}$, 24000 (3) $\begin{pmatrix}800\\800\\800\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}20\\20\\20\end{pmatrix}$, 4800

2.14 (1) $\begin{pmatrix}1{,}3\\1{,}3\\1{,}8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}800\\200\\400\\800\\1200\\600\end{pmatrix}$, 15000 (2) $\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}600\\400\\800\\800\\800\\800\end{pmatrix}$, 20000

2.15 (1) $\begin{pmatrix}5&1&0&1\\4&1&1&2\\3&1&2&3\\4&1&1&2\\5&1&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7&6&7\\8&7&6\\9&8&5\\8&7&6\\7&6&7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}400\\400\\400\\400\\400\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}2&3&4&5\\2&3&4&5\\2&3&4&5\\2&3&4&5\\2&3&4&5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}20&15&10\\20&15&10\\20&15&10\\20&15&10\\20&15&10\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}400\\400\\400\\400\\400\end{pmatrix}$

2.16 (1) $\begin{pmatrix}70\\20\\40\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\4\\7\\4\end{pmatrix}$, 1350 (2) $\begin{pmatrix}80\\40\\20\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\5\\7\\5\end{pmatrix}$, 1100

2.17 (1) $\begin{pmatrix}100\\100\\100\\100\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}35\\15\\5\end{pmatrix}$, 400 (2) $\begin{pmatrix}200\\200\\200\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}15\\5\\5\\5\end{pmatrix}$, 600

2.18 $\begin{pmatrix}150&200\\150&150\\150&100\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}100\\100\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}15000\\15000\end{pmatrix}$

3. Gauß-Algorithmus

(1) $\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$, $\varnothing$, ∞ viele (2) ∞ viele, $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\varnothing$ (3) $\varnothing$, ∞ viele, $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ (4) ∞ viele, $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$, $\varnothing$

(5) $\varnothing$, ∞ viele, $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}$, $\varnothing$, ∞ viele (7) $\varnothing$, $\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$, ∞ viele (8) $\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$, $\varnothing$, ∞ viele

(9) $\varnothing$, ∞ viele, $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ (10) $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\varnothing$, ∞ viele (11) $\varnothing$, $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$, ∞ viele (12) $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$, $\varnothing$, ∞ viele

(13) $\varnothing$, ∞ viele, $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ (14) ∞ viele, $\varnothing$, $\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$ (15) $\varnothing$, ∞ viele, $\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}$

4. Lineare Gleichungssysteme

4.1 $\begin{pmatrix}30\\20\\10\end{pmatrix}$ 4.2 (1) $\begin{pmatrix}20\\20\\20\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}10\\20\\30\end{pmatrix}$

4.3 (1) $\begin{pmatrix}10\\10\\10\end{pmatrix}$, 450, 510 (2) $\begin{pmatrix}10\\15\\20\end{pmatrix}$, 500, 690 (3) $\begin{pmatrix}20\\20\\20\end{pmatrix}$, 400, 500 (4) $\begin{pmatrix}20\\30\\40\end{pmatrix}$, 300, 600

(5) $\begin{pmatrix}20\\30\\40\end{pmatrix}$, 400, 320

4.4 (1) 36, 24, 6, 4 (2) 24, 16, 8, 7 (3) 15, 6, 5, 4 (4) 6, 6, 2, 4, 2, 2, 2 (5) 46, 11, 12, 8
(6) 200, 85, 30, 25

4.5 (1) 100, 100, 40, 20, 30 (2) 100, 100, 50, 40, 50 (3) 110, 90, 100, 40, 80

5. Determinanten

5.1 (1) 6, 5, 0 (2) 96, 5, 1/5, 30, 1/25, 5, 0 (3) 6, −1, 0 (4) 1, 1/2 (5) −1, 0, −2, 2

5.2 1 5.3 −1, −1, −1 5.4 1, −1 5.5 1/2 5.6 2
5.7 3 5.8 2 5.9 5 5.10 −5 5.11 6

5.12 2 5.13 3 5.14 2 5.15 –1

5.16 (1) 20, pos. def. (2) –17, neg. def. 5.17 8 5.18 nein, da $|\mathbf{A}| = 0$ 5.19 3

5.20 –12 5.21 –1, indefinit

5.22 (1) $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$, 2, 14, neg. definit; (2) $\begin{pmatrix} 9 & -7 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$, –1, $2x_1^2 + 4x_2^2 - 3x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3$, indef.

(3) 1, $x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$, positiv definit, $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (4) 2, indefinit, 2

6. Inverse Matrizen

6.1 (1) $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, n.d. (2) $\frac{1}{4}\mathbf{A}^{-1}$, $(\mathbf{B}^{-1})'$, $\mathbf{B}$, $\frac{1}{30}\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$, n.d.

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, n.d. (4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, n.d.

6.2 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 6.3 –2 6.4 10 6.5 4 6.6 7

6.7 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, indefinit 6.8 1 6.9 $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$, indefinit, 9

7. Lineare Optimierung

7.1 (1) u_1 aufnehmen, u_3 eliminieren; 10, 8; 36; F_1: 2, F_2: 2; 0, 0, 2/3, 2/3

(2) (x_2 aufnehmen, x_1 eliminieren) oder (x_3 aufnehmen, u_3 eliminieren); 10, 0, 20; 340; F_1: 5; 0, 3, 5

(3) x_2 aufnehmen, u_3 eliminieren; 10, 20; 550; F_2: 10, F_4: 20; 10, 0, 5, 0

(4) x_2 aufnehmen, u_2 oder u_4 eliminieren; 30, 20, 10; 600; keine freie Kapazität; 0, 0, 0, 10

(5) x_1 aufnehmen, u_1 oder u_3 eliminieren; 10, 0, 20; 80; keine freie Kapazität; 0, 1, 1/2

(6) x_2 aufnehmen, u_3 eliminieren; 20, 30, 0; 600; F_1: 10; 0, 7,5 , 10

(7) x_1 aufnehmen, u_3 eliminieren; 60, 10; 4600; F_1: 100, F_4: 60; 0, 40, 20, 0

(8) (x_4 aufnehmen, u_3 eliminieren) oder (x_5 aufnehmen, u_3 oder u_4 elimin.); 0, 4, 0, 2, 0; 24; F_1, F_4: 6; 0, 4, 1, 0

7.2 (1) (a) x_2 aufnehmen, u_3 eliminieren; θ: 80, 70, 60, 80

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
x_1	1	0	4	0	–1	0	10
u_2	0	0	4	1	–2	0	10
x_2	0	1	–6	0	2	0	60
u_4	0	0	10	0	–4	1	40
z	0	0	8	0	4	0	920

(b) 10, 0, 20; 80; alle ($F_1 - F_3$) ausgelastet; x_1 sinkt um 1 ME, x_2 bleibt, x_3 steigt um 1 ME

(2) (a) x_2 aufnehmen, u_3 eliminieren; θ: 20, 15, 10, 15

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
x_1	1	0	4	0	–1	0	10
u_2	0	0	6	1	–2	0	10
x_2	0	1	–3	0	1	0	10
u_4	0	0	10	0	–4	1	20
z	0	0	13	0	4	0	540

(b) 20, 10, 0; 340; F_1, F_2 ausgelastet, F_3 noch 5 ZE freie Kapazität; *DB* steigt um 3 GE

(3) (a) x_2 aufnehmen, u_3 eliminieren; θ: 40, –, 30

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.
u_1	0	0	1	1	–0,5	–1	10
x_1	1	0	1	0	0,5	0	20
x_2	0	1	1	0	0	1	30
z	0	0	20	0	7,5	10	600

(b) 8, 48; 1472; F_1, F_3 ausgelastet, F_2 noch 16, F_4 noch 60 ZE freie Kapazität;
x_1 sinkt um 1 ME, x_2 steigt um 2 ME

(4) (a) x_2 aufnehmen, u_3 eliminieren; θ: 40, 40, 30, 40

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
x_1	1	0	4	0	–1	0	5
u_2	0	0	–2	1	–2	0	10
x_2	0	1	–6	0	2	0	30
u_4	0	0	8	0	–4	1	20
z	0	0	40	0	10	0	1550

(b) 20, 10, 0; 340; F_1, F_2 ausgelastet, F_3 noch 5 ZE freie Kapazität;
x_1 steigt um 1 ME, x_2 sinkt um 1 ME, x_3 bleibt

(5) (a) x_2 aufnehmen, u_3 eliminieren; θ: 80, 120, 60, 110

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
x_1	1	0	4	0	–1	0	10
u_2	0	0	0	1	–2	0	60
x_2	0	1	–6	0	2	0	60
u_4	0	0	10	0	–4	1	100
z	0	0	40	0	20	0	4600

(b) 20, 30, 0; 600; F_2, F_3 ausgelastet, F_1 noch 10 ZE freie Kapazität;
x_1 bleibt, x_2 steigt um 1 ME, x_3 bleibt

7.3 (b) θ: 20, 30, −, 25, x_2 aufnehmen, u_1 entfällt; (c) $\begin{matrix}20\\10\\0\end{matrix}$ 340 $\begin{matrix}0\\0\\5\end{matrix}$ $\begin{matrix}19\\7\\1\end{matrix}$

8. Folgen und Reihen

8.1 3, 1, 0, divergent, $\sqrt{2}$, 1, 1/2, 1

8.2 nur (3) könnte konvergieren

9. Finanzmathematik

9.1 5.168,38; 36.442,38; 9.417,40

9.2 1.277,29; 1.277,83; 1.277,26

9.3 (1) 12.397,24; 80,96 (2) 2.223,9; 33,53

9.4 (1) 19,8; 5,47 (2) 22; 8,5

9.5 13.315,38; 5,89

9.6 (1) 1.124,86; 1.127,88; 4,09; 1.122,42; 3,92 (2) 11.698,60; 11.740,80; 4,09; 11.717,90; 4,04

9.7 $K{\cdot}q$, $K{\cdot}q^2 + E{\cdot}q$, $K{\cdot}q^3 + E{\cdot}q(q{+}1)$, $K{\cdot}q^4 + E{\cdot}q\,\dfrac{q^3{-}1}{q{-}1}$, $K{\cdot}q^n + E{\cdot}q\,\dfrac{q^{n-1}{-}1}{q{-}1}$

9.8 7,6; 34,66

9.9 (1) 1.221,40; 104,10; 5,8 (2) 16.487,21; 3.439,16; 7,14 (3) 271,83; 166,58; 6,09

9.10 (a) $K{\cdot}q^n + E{\cdot}q\,\dfrac{q^{n-1}{-}1}{q{-}1}$, $q = 1 + \dfrac{p}{k{\cdot}100}$, $n = m{\cdot}k$, k = Anzahl der Zinsperioden pro Jahr;

(c) $n = \dfrac{\ln(T)}{\ln(q)}$ mit $T = \dfrac{K_n + \dfrac{Eq}{q-1}}{K + \dfrac{E}{q-1}}$; (1) $k = 12$; 6.120,45; 80,28 (2) $k = 4$; 33221; 31,84

9.11 $(K-E)\cdot q$, $K\cdot q^2 - E\cdot q(q+1)$, $K\cdot q^3 - E\cdot q(q^2+q+1)$, $K\cdot q^4 - E\cdot q\,\frac{q^4-1}{q-1}$, $K\cdot q^n - E\cdot q\,\frac{q^n-1}{q-1}$; $n = \frac{\ln(\frac{T-K_n}{T-K})}{\ln(q)}$

mit $T = \frac{Eq}{q-1}$; 13,25

9.12 (1) 7; 27,7 (2) 7; 69,3 (3) 7,34; 44 9.13 (1) 322.124; 129,3 (2) 305737; 93,46

9.14 1.127,33; 3,04; 1.124,77; 2,98

9.15 $K\cdot q$, $K\cdot q\cdot(q+1)$, $K\cdot q^2\cdot(q+1)$, $K\cdot q^3\cdot(q+1)$, $K\cdot q^{n-1}\cdot(q+1) = K\cdot q^n + K\cdot q^{n-1}$; 1,01, 8, 431

9.16 6186,65; 5944,07

10. Differentiationsregeln

(1) $20x^3 - 12x^2 + 6x - 2$ (2) $3(4x+3)+(3x-2)\cdot 4$ (3) $\frac{2x(x+1)-(x^2+1)}{(x+1)^2}$ (4) $\frac{[3(x^2-4)+3x\cdot 2x]\cdot(4x-1)-3x(x^2-4)\cdot 4}{(4x-1)^2}$

(5) $\frac{2}{3}x^{-1/3}$ (6) $-\frac{3}{4}x^{-7/4}$ (7) $\frac{3}{2}x^{1/2}$ (8) $\frac{1}{2}x^{-1/2}$ (9) $3^x\cdot\ln(3)$ (10) $3x^2\cdot 3^x + x^3\cdot 3^x\cdot\ln(3)$

(11) $\frac{[e^x+xe^x]\cdot(x+1)-xe^x}{(x+1)^2}$ (12) $\frac{1}{x\cdot\ln(3)}$ (13) $\ln(x)+1$ (14) $\frac{[2x\cdot\ln(x)+x^2\cdot 1/x]\cdot(x-1)-x^2\cdot\ln(x)}{(x-1)^2}$

(15) $4(2x-3)^3\cdot 2$ (16) $\frac{1}{2}\cdot(x^2+1)^{-1/2}\cdot 2x$ (17) $-\frac{1}{3}\cdot(x^3-1)^{-4/3}\cdot 3x^2$ (18) $e^{2x+1}\cdot 2$ (19) $\frac{8x^3}{2x^4+1}$

(20) $e^{x^2-1} + (x-1)e^{x^2-1}\cdot 2x$ (21) $\frac{2x}{x^2+1}\cdot(x+1)^{-1/3} + \ln(x^2+1)\cdot -\frac{1}{3}(x+1)^{-4/3}$ (22) $e^{\sqrt{3x+1}}\cdot\frac{1}{2}(3x+1)^{-1/2}\cdot 3$

(23) $\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}$ (24) $\sqrt{e^{(3x+1)^2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2(3x+1)\cdot 3$ (25) $f(x)\cdot(\frac{4}{x}+2-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2}{x-1})$ (26) $x^x(\ln(x)+1)$

(27) $(2x+1)^{(3x-2)}\,[3\ln(2x+1) + (3x-2)\frac{2}{2x+1}]$

11. Globale Extrema

11.1

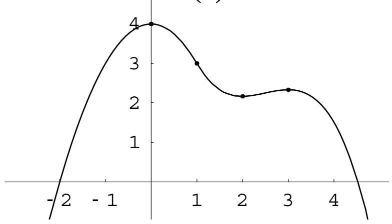
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
Glob. Min.	–	(0, –4)	(4, –5)	–	(4, –6)	(5, –4)	–	(0, 1)	(0, 0)	(–3, 0)	(0, 1)
Glob. Max.	(0, 4)	(6, 8)	(1, 3)	(3, 1/4)	(1, 2)	(2, 6)	–	–	–	–	–

	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)
Glob. Min.	(0, –1)	–	–	(4, –7)	(–2, –8)	(2, –1/3)	(3, –6)	–	(3, 4)	(3, –3), (6, –3)
Glob. Max.	(2, 7)	(2, 2)	(0, 3)	(0, 9)	(2, 8)	–	(0, 4), (4, 4)	–	(1, 10)	(0, 6)

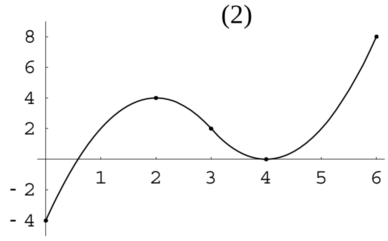
	(22)	(23)	(24)	(25)	(26)
Glob. Min.	(1, –2)	–	(0, 1)	–	(4, –1)
Glob. Max.	–	$(e, e^{1/e})$	(–2, 3), (2, 3)	–	–

Graphische Darstellung der Funktionen aus der Aufgabe 11.1

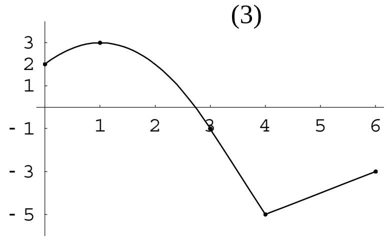
(1)



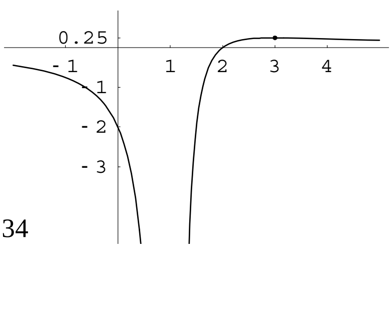
(2)



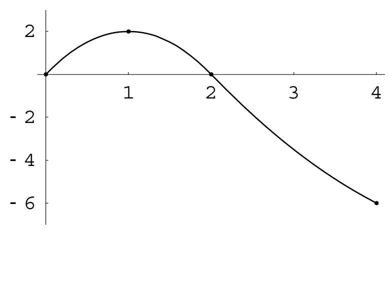
(3)



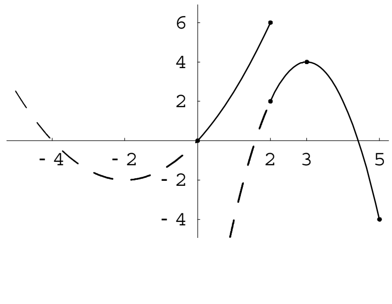
(4)



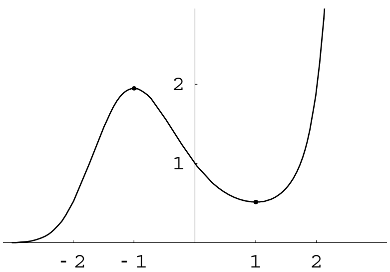
(5)



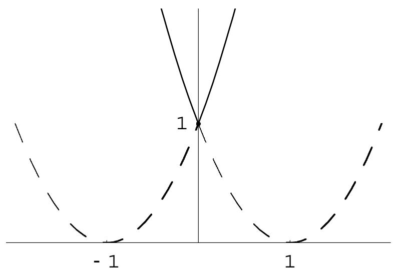
(6)



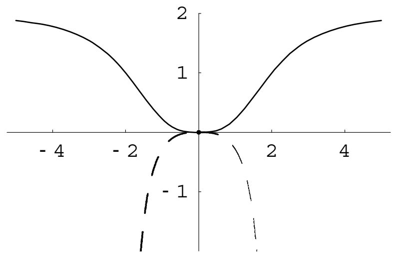
(7)



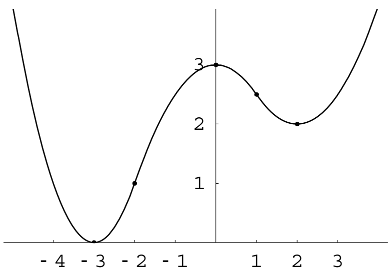
(8)



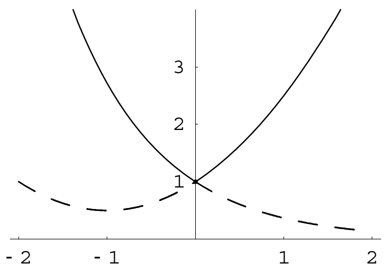
(9)



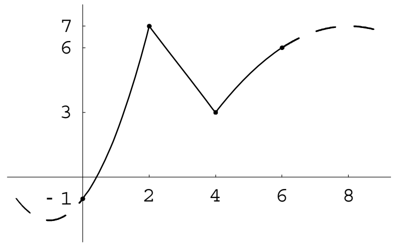
(10)



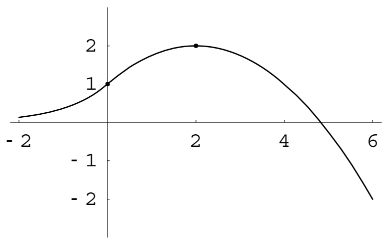
(11)



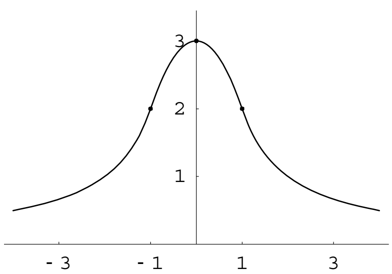
(12)



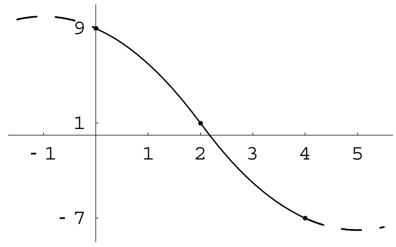
(13)



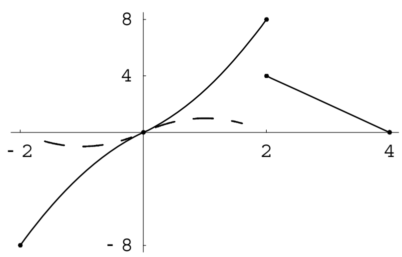
(14)



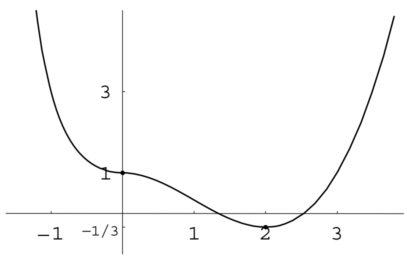
(15)



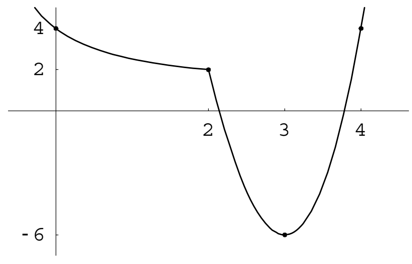
(16)



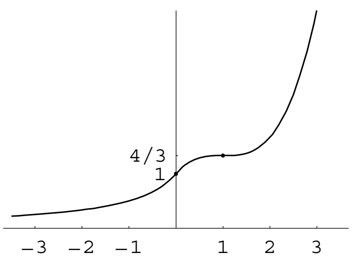
(17)



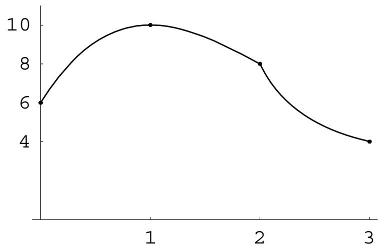
(18)



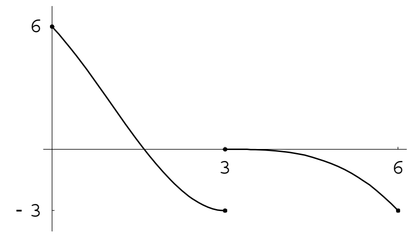
(19)



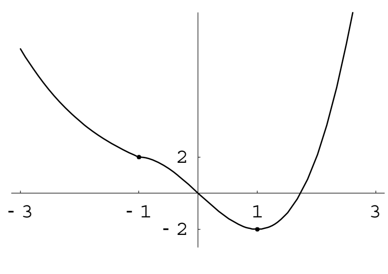
(20)



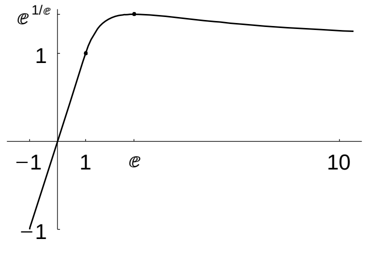
(21)



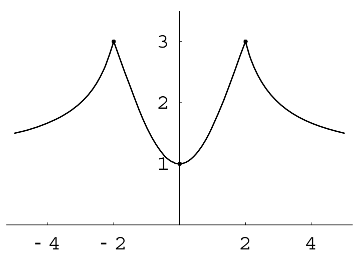
(22)



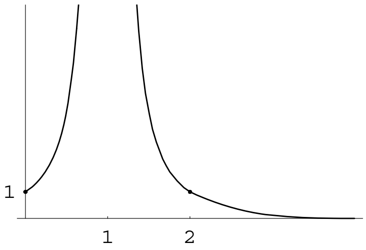
(23)

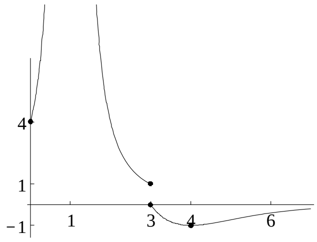


(24)



(25) (26)





11.2 (1) 80, 20 (2) 2, 100 (3) 100, 100 (4) 2, e^8 (5) 28, 100 (6) 15, 8 (7) 100, 24

11.3 (1) 100 (2) $(p_0 / (1+a))^{1/a}$ (3) 216 (4) 27 11.4 (1) 100 (2) 125

12. Differential, Wachstumsrate, Elastizität

12.1 $\varepsilon_u(p) = \varepsilon_x(p) + 1$ stets; (1) $-\frac{1}{2} - p$; 3%, 1% (2) $-\frac{1}{3} - 2p^2$; 7%, 4% (3) $\frac{2}{\ln(p)} - 2$; 1%, 0%

(4) $-\frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p+1} + p\cdot(-\frac{1}{2})$; 4%, 1% (5) $-\frac{\frac{1}{3}+2p}{p+1}$; 7%, 1% (6) $-2p^2\left(1+\frac{1}{3(p^2+1)}\right)$; 7%, 4%

(7) $p\cdot(1-2p) - \frac{p^2}{2p^2+3}$; 6%, 1% (8) $2p\cdot(1-p) - \frac{p^2}{2p^2+1}$; 1%, −2%

12.2 $\varepsilon_k(x) = \varepsilon_K(x) - 1$ stets (1) $\frac{1}{3}x\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+50}$; 2%, −1% (2) $\frac{1}{2}x\cdot\frac{2}{2x+100}$; 1%, −2%

(3) $\frac{1}{4}x\cdot\frac{4x}{2x^2+200}$; 2%, −3% (4) $\frac{1}{3}x\cdot\frac{3x^2}{x^3+2000}$; 4%, −1%

12.3 $x\cdot\frac{16-3\sqrt{x}}{16x-2x\cdot\sqrt{x}-100}$; $\varepsilon_G(x)-1$; 2%, −2%

12.4 $\varepsilon_g(x) = \varepsilon_G(x) - 1$ stets (1) $-\frac{x\cdot(x-100)}{1600}$; 1%, 0% (2) $\frac{1}{3}x\cdot\frac{2x}{x^2-64} - \frac{x}{x+8}$; 3%, −2%

(3) $\frac{x}{x-5} + \frac{1}{2}\,\frac{3x^3}{x^3+500} - \frac{2x^2}{x^2+100}$; 20%, 10% (4) $\frac{2x^2}{x^2+100} + \frac{1}{3}\,\frac{x}{x+10} - \frac{2x}{x+20}$; 2%, −2%

13. Taylor-Entwicklung

(1) x^2 (2) x^2+x (3) $2-(x-1)^2$ (4) $1+0{,}5x^2$ (5) 1 (6) $x+0{,}5x^2$ (7) $1+x+x^2$
(8) $15(x-1)^2$ (9) $(x-1)^2$ (10) $-x^2+3x-2$ (11) $x+0{,}5x^2$ (12) $1+x$ (13) $-0{,}5x^2+2x-1{,}5$
(14) $1+x^2$ (15) x^2-x+1 (16) x^2-1 (17) x^2-x (18) x^2+x+1 (19) $2x^2$ (20) x^2
(21) $2x^2-5x+4$ (22) x^2

14. Unbestimmte Ausdrücke: Die Regeln von l'Hospital

14.1 n; 2/3; 0; 1/2; 1; −1/2; 1/6; 9/4; 3; 0; a; a; 1/2; 1; e^a; 1; $1/\sqrt{e}$

14.2 (1) 1; $\frac{\cos(x)\cdot x - \sin(x)}{x^2}$; 0; 1 (2) 5; $\frac{5x^4(x-1)-(x^5-1)}{(x-1)^2}$; 10; $10x-5$ (3) 2; $2\,\frac{x-1-\ln(x)}{(x-1)^2}$; 1; $x+1$

(4) 1; $\frac{e^x\cdot(x-1)+1}{x^2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{x}{2}+1$ (5) 3; $\frac{3x^2(x-1)-(x^3-1)}{(x-1)^2}$; 3; $3x$ (6) 0; $\frac{x\cdot\sin(x)+\cos(x)-1}{x^2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{x}{2}$

(7) 2; $\frac{(e^x+\cos(x))\cdot x - (e^x+\sin(x)-1)}{x^2}$; $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}x+2$ (8) 2; $1+\frac{1-1/x-\ln(x)}{(x-1)^2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}(x+3)$

(9) 1; $1+\frac{\cos(x)\cdot x-\sin(x)}{x^2}$; 1; $1+x$

14.3 $1+x$; 2

15. Newton-Verfahren

15.1 (1) $\frac{1}{4}(x^4+1)^{-3/4}\cdot 4x^3$; $2^{3x}\cdot 3\cdot\ln(2)-e^{4x-1}\cdot 4$; $3x^2+2x+24$, 4, 3

(2) $-\frac{1}{2}(x^2+2x+3)^{-3/2}\cdot(2x+2)$; $e^{2x+1}\cdot 2-\frac{3x^2}{x^3+1}$; $3x^2-14x+36$, 2, 3

(3) $\frac{2}{3}(3x+1)^{-1/3}\cdot 3$; $3^{x^2+1}\cdot\ln(3)\cdot 2x-e^{2x-1}\cdot 2$; $3x^2-26x-45$, 5, 3

(4) $\frac{1}{3}(x^3-1)^{-2/3}\cdot 3x^2$; $2^{1-x^3}\cdot\ln(2)\cdot(-3x^2)-e^{x^2}\cdot 2x$; $3x^2-20x-192$, 3, 4

(5) $-\frac{1}{3}(x^2-1)^{-4/3}\cdot 2x$; $\frac{3x^2+3^x\cdot\ln(3)}{x^3+3^x}$; $3x^2-38x+19$, 7, 5

(6) $4x^3\cdot 4^x+x^4\cdot 4^x\cdot\ln(4)$; $\frac{1}{4}\frac{4x^3}{x^4+1}$; $3x^2-44x+60$, 8, 6

(7) $e^{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $\frac{4x^3+4^x\cdot\ln(4)}{x^4+4^x}$; $3x^2+4x-100$, 0, -2

(8) $-\frac{1}{4}(x^2+1)^{-5/4}\cdot 2x$; $2^{\sin(x)}\cdot\ln(2)\cdot\cos(x)+\frac{4x^3}{x^4+1}$; $3x^2-20x+36$, 3, 4

(9) $e^{\sin(x^2+1)}\cdot\cos(x^2+1)\cdot 2x$; $\frac{1}{2}(\ln(x^4+1))^{-1/2}\cdot\frac{4x^3}{x^4+1}$; $3x^2+14x+36$, -2, -3

(10) $\cos(e^{x^2+1})\cdot e^{x^2+1}\cdot 2x$; $\frac{1}{4}\frac{4x^3}{x^4+1}$; $3x^2-28x+100$, 4, 6

(11) $\frac{1}{2}(\ln(x^2+1))^{-1/2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}$; $2^{3^x}\cdot\ln(2)\cdot 3^x\cdot\ln(3)$; $3x^2+8x+8$, -1, -2

(12) $e^{4^x-x^4}\cdot(4^x\cdot\ln(4)-4x^3)$; $-\frac{2}{3}(x^2+1)^{-5/3}\cdot 2x$; $3x^2-2x+1$, 1, -1

(13) $\frac{1}{2}(\sin(x^2+1))^{-1/2}\cdot\cos(x^2+1)\cdot 2x$; $\frac{e^{x^2+1}\cdot 2x}{1+e^{x^2+1}}$; $3x^2+2x+63$, 0, -1

(14) $2^{\sqrt{x^2+1}}\cdot\ln(2)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; $\frac{\cos(x^2+1)\cdot 2x}{\sin(x^2+1)}$; $3x^2-16x+41$, 3, 2

(15) $\frac{4}{3}(2^x+1)^{1/3}\cdot 2^x\cdot\ln(2)$; $\cos(\ln(x^2+1)-x)\cdot(\frac{2x}{x^2+1}-1)$; $3x^2-32x+105$, 5, 6

(16) $(x^2+1)^{(x^2+1)}\cdot 2x\cdot(\ln(x^2+1)+1)$; $2^{(x+\sin(x))/3}\cdot\ln(2)\cdot(1+\cos(x))/3$; $3x^2-10x+28$, 2, 1

15.2 (1) $(x-2)^2$; -2, -3 (2) $-8x^2+4x$; 1, -1 (3) $\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$; -1, -2

16. Partielle Ableitungen

(1) $3x^2y-y^2-2$, $x^3-2xy+4$ (2) $4(2x-3y)^3\cdot 2$, $4(2x-3y)^3\cdot(-3)$

(3) $(x^2+xy-1)+(x-2y)(2x+y)$, $-2\cdot(x^2+xy-1)+(x-2y)\cdot x$ (4) $e^{x^2y-1}\cdot 2xy$, $e^{x^2y-1}\cdot x^2$ (5) $\frac{2x}{x^2+1}$, $\frac{-2}{2y+3}$

(6) $\mathrm{ab}\cdot x^{\mathrm{b}-1}\cdot y^{\mathrm{c}}$, $\mathrm{ac}\cdot x^{\mathrm{b}}\cdot y^{\mathrm{c}-1}$ (7) $e^{2xy}+xe^{2xy}\cdot 2y-y\cdot\frac{2x}{x^2-y}$, $xe^{2xy}\cdot 2x-[\ln(x^2-y)-y\cdot\frac{1}{x^2-y}]$

(8) $\frac{5}{2}x^{3/2}\cdot y^{-3}\cdot(y+1)^{1/2}$, $x^{5/2}\cdot[-3y^{-4}\cdot(y+1)^{1/2}+y^{-3}\cdot\frac{1}{2}(y+1)^{-1/2}]$ (9) $x^y\cdot y^x\cdot[\frac{y}{x}+\ln(y)]$, $x^y\cdot y^x\cdot[\ln(x)+\frac{x}{y}]$

(10) $2\cdot\frac{3y-2}{4z-3}$, $3\cdot\frac{2x-1}{4z-3}$, $(2x-1)(3y-2)\frac{-4}{(4z-3)^2}$

(11) $f(x,y,z)\cdot[\frac{1}{x}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x-1}-1]$, $f(x,y,z)\cdot[\frac{2}{y}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{y-1}-1]$, $f(x,y,z)\cdot[\frac{3}{z}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-1}-1]$

17. Lokale Extrema für Funktionen mit mehreren Variablen

17.1 (1) $\mathrm{grad}_f(x,y)=\begin{pmatrix}3(x-1)^2-3(y-1)\\3(y-1)^2-3(x-1)\end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_f(x,y)=\begin{pmatrix}6(x-1) & -3\\-3 & 6(y-1)\end{pmatrix}$, (1, 1) Sattelp., (2, 2) Min.

(2) $\mathrm{grad}_f(x,y)=\begin{pmatrix}3/x-y^2-2\\-2xy+2\end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_f(x,y)=\begin{pmatrix}-3/x^2 & -2y\\-2y & -2x\end{pmatrix}$, (1, 1) Max., (1/2, 2) Sattelp.

(3) $\mathrm{grad}_f(x,y)=\begin{pmatrix}-1/(x+1)+y\\1/y+x-1\end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_f(x,y)=\begin{pmatrix}1/(x+1)^2 & 1\\1 & -1/y^2\end{pmatrix}$, (0, 1) Sattelp.

(4) $\mathrm{grad}_f(x,y)=\begin{pmatrix}x^2+y-1\\-y+x+1\end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_f(x,y)=\begin{pmatrix}2x & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$, (0, 1) Sattelp., (–1, 0) Max.

(5) $\operatorname{grad}_f(x, y) = \begin{pmatrix} (2x-2)\cdot(y^2-2y) \\ (x^2-2x)\cdot(2y-2) \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2(y^2-2y) & (2x-2)\cdot(2y-2) \\ (2x-2)\cdot(2y-2) & 2(x^2-2x) \end{pmatrix}$,

(1, 1) Max., (0, 0), (2, 0), (0, 2), (2, 2) Sattelp.

(6) $\operatorname{grad}_f(x, y) = \begin{pmatrix} y+2z-6 \\ x+1-z \\ 2x-y \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, (1, 2, 2) Sattelp.

(7) $\operatorname{grad}_f(x, y) = \begin{pmatrix} x-y+1 \\ -y^2-x-1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2y \end{pmatrix}$, (–1, 0) Sattelp., (–2, –1) Min.

(8) $\operatorname{grad}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2-3(y-1) \\ 3(y-1)-3x \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, (0, 1) Sattelp., (1, 2) Min.

(9) $\operatorname{grad}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6(x-1)-6y \\ 6y^2-6x+6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 12y \end{pmatrix}$, (1, 0) Sattelp., (2, 1) Min.

(10) $\operatorname{grad}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy-4 \\ x^2+2-6/y \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 6/y^2 \end{pmatrix}$, (1, 2) Min., (2, 1) Sattelp.

(11) $\operatorname{grad}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy-6 \\ x^2+3-12/y \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 12/y^2 \end{pmatrix}$, (1, 3) Min., (3, 1) Sattelp.

(12) $\operatorname{grad}_f(x, y) = \begin{pmatrix} -6x+6(y+1) \\ 6y^2+6(x-1) \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 6 & 12y \end{pmatrix}$, (0, –1) Max., (1, 0) Sattelp.

(13) $\operatorname{grad}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2\,(x^2-1+y) \\ 2\,(x+1)-2y \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 4x & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, (0, 1) Sattelp., (–1, 0) Max.

(14) $\operatorname{grad}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2-2xy \\ -2-x^2+3/y \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} -2y & -2x \\ -2x & -3/y^2 \end{pmatrix}$, (1, 1) Max., (2, 1/2) Sattelp.

(15) $\operatorname{grad}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2y+2-8/x \\ 2x-1-3/y \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 8/x^2 & 2 \\ 2 & 3/y^2 \end{pmatrix}$, (1, 3) Sattelp., (2, 1) Min.

(16) $\operatorname{grad}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2y-1-3/x \\ 2x+2-8/y \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 3/x^2 & 2 \\ 2 & 8/y^2 \end{pmatrix}$, (3, 1) Sattelp., (1, 2) Min.

17.2 (1) $\operatorname{grad}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy+2y \\ x^2+2x+2y \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x+2 \\ 2x+2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_f(-1, \tfrac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, Min.

(2) $\operatorname{grad}_f(x, y) = \begin{pmatrix} y^2-2y-2x \\ 2xy-2x \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & 2y-2 \\ 2y-2 & 2x \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, Sattelp.,

$\mathbf{H}_f(0, 2) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, Sattelp., $\mathbf{H}_f(-\tfrac{1}{2}, 1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, Max.

(3) $\operatorname{grad}_f(x, y) = \begin{pmatrix} x+2+2y+y/x \\ 5y+3+2x+\ln(x) \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 1-y/x^2 & 2+1/x \\ 2+1/x & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_f(1, -1) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, Min.

(4) $\operatorname{grad}_f(x, y) = \begin{pmatrix} -x+y+4-4/x^2+2/x \\ y+x \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} -1+8/x^3-2/x^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_f(1, -1) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, Min.

$\mathbf{H}_f(2, -2) = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, Sattelp.

(5) $\operatorname{grad}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 4x^3y+y^3-5x \\ x^4+3xy^2-4y \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2y-5 & 4x^3+3y^2 \\ 4x^3+3y^2 & 6xy-4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$, Max.

$\mathbf{H}_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$, Sattelp.

(6) $\operatorname{grad}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2+4xy^2-8y \\ -12y^2+4x^2y-8x \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 24x+4y^2 & 8xy-8 \\ 8xy-8 & -24y+4x^2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$, Sattelp.

$\mathbf{H}_f(-1, 1) = \begin{pmatrix} -20 & -16 \\ -16 & -20 \end{pmatrix}$, Max.

(7) $\operatorname{grad}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2-20x+2xy+y^2-18y+53 \\ 3y^2-16y+2xy+x^2-18x+53 \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x+2y-20 & 2x+2y-18 \\ 2x+2y-18 & 6y+2x-16 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{H}_f(3, 2) = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$, Sattelp. , $\mathbf{H}_f(4, 3) = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$, Min.

(8) $\operatorname{grad}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2-28x+92-24y+2xy+y^2 \\ 3y^2-20y+92-24x+x^2+2xy \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x-28+2y & -24+2x+2y \\ -24+2x+2y & 6y-20+2x \end{pmatrix}$,

$\mathbf{H}_f(6, 4) = \begin{pmatrix} 16 & -4 \\ -4 & 16 \end{pmatrix}$, Min. , $\mathbf{H}_f(4, 2) = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}$, Sattelp.

(9) $\operatorname{grad}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 5x^4y+y^5-6y \\ x^5+5xy^4-6x \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 20x^3y & 5x^4+5y^4-6 \\ 5x^4+5y^4-6 & 20xy^3 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{H}_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$, Sattelp. , $\mathbf{H}_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$, Min.

(10) $\operatorname{grad}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2+2x(y-2)+y^2-18y+77 \\ 3y^2+x^2+2y(x-16)-18x+77 \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x+2(y-2) & 2x+2y-18 \\ 2x+2y-18 & 6y+2(x-16) \end{pmatrix}$,

$\mathbf{H}_f(0,7) = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$, Min., $\mathbf{H}_f(-1,6) = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$, Sattelp.

17.3 (a) $\operatorname{grad}_f(\mathbf{p}) = \mathbf{v} + (\mathbf{M}+\mathbf{M}')\cdot\mathbf{p} - \mathbf{M}'\mathbf{k}$, $\mathbf{H}_f(\mathbf{p}) = \mathbf{M}+\mathbf{M}'$ (b) $3/x-(y^2+2)$, $-2xy+2$ (c) Max.

17.4 3, 3, 3 17.5 (1) 9, 10 (2) 3, 4 (3) 5, 9

18. Partielles und totales Differential, partielle Elastizität und homogene Funktionen

(1) ja, 2; 3/6, 4/6, 5/6; 3%, 4%, 5%; 12,36%

(2) ja, 1; $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{x+y}$; $\frac{1}{2}y\cdot\frac{1}{x+y}$; 2%, 1%; 3%

(3) ja, 1; $-1+\frac{1}{2}x\cdot\frac{2x}{x^2+y^2}$, $1+\frac{1}{2}y\cdot\frac{2y}{x^2+y^2}$; -1%, 3%; 2%

(4) ja, 0; $\frac{x}{x+y}+\frac{2x}{x+z}$, $\frac{y}{x+y}-\frac{3y}{y+z}$, $\frac{2z}{x+z}-\frac{3z}{y+z}$; 3%, -2%, -1%; keine Änderung

(5) ja, 1; $\frac{1}{2}x\cdot\frac{2}{2x+y}+\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{x+2y}$, $\frac{1}{2}y\cdot\frac{1}{2x+y}+\frac{1}{2}y\cdot\frac{2}{x+2y}$; 1%, 1%; 2%

(6) ja, 1; $\frac{1}{3}x\cdot(\frac{8x^3}{2x^4+y^4}-\frac{2}{2x+y})$, $\frac{1}{3}y\cdot(\frac{4y^3}{2x^4+y^4}-\frac{1}{2x+y})$; 2%, 1%; 3%

(7) ja, 2; $\frac{1}{2}x\cdot\frac{4x^3+2y^3}{x^4+2xy^3}$, $\frac{1}{2}y\cdot\frac{6xy^2}{x^4+2xy^3}$; 3%, 3%; 6,09%

(8) ja, 2; $\frac{x}{x+2y}+\frac{1}{2}x\cdot\frac{4x}{2x^2+y^2}$, $\frac{2y}{x+2y}+\frac{1}{2}y\cdot\frac{2y}{2x^2+y^2}$; 4%, 4%; 8,16%

(9) ja, 1; $\frac{2x}{x+2y}-\frac{1}{2}x\cdot\frac{2x}{x^2+2y^2}$, $\frac{4y}{x+2y}-\frac{1}{2}y\cdot\frac{4y}{x^2+2y^2}$; 1%, 2%; 3%

(10) ja, 1; $\frac{1}{2}(1+x\cdot\frac{2x}{x^2+y^2}-x\cdot\frac{1}{x+y})$, $\frac{1}{2}(y\cdot\frac{2y}{x^2+y^2}-y\cdot\frac{1}{x+y})$; 3%, 1%; 4%

(11) ja, 1; $\frac{1}{2}x\cdot\frac{8x^3}{2x^4+y^4}-x\cdot\frac{1}{x+2y}$, $\frac{1}{2}y\cdot\frac{4y^3}{2x^4+y^4}-y\cdot\frac{2}{x+2y}$; 3%, 0%; 3%

(12) ja, 2; $\frac{x}{x+y}+\frac{1}{2}(x\cdot\frac{6x^2}{2x^3+y^3}-x\cdot\frac{1}{x+2y})$, $\frac{y}{x+y}+\frac{1}{2}(y\cdot\frac{3y^2}{2x^3+y^3}-y\cdot\frac{2}{x+2y})$; 4%, 2%; 6,09%

(13) ja, 1; $x\cdot\frac{2x}{x^2+y^2}-\frac{1}{3}x\cdot\frac{3x^2}{x^3+2y^3}$, $y\cdot\frac{2y}{x^2+y^2}-\frac{1}{3}y\cdot\frac{6y^2}{x^3+2y^3}$; 4%, 2%; 6%

(14) ja, 2; $1-\frac{1}{3}x\cdot\frac{1}{x+2y}$, $\frac{1}{3}(4-y\cdot\frac{2}{x+2y})$; 4%, 6%; 10,25%

(15) ja, 1; $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$; 4%, 2%; 6%

(16) ja, 2; $2-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x+2y}$, $\frac{1}{2}(1-\frac{2y}{x+2y})$; 7%, 1%; 8,16%

19. Kettenregel, totale Ableitung, Ableitung impliziter Funktionen

19.1 $(2x+2y)\cdot 2+(2x-z^2)\cdot 2t-2yz$; $(4+4t)\cdot 2+(4-2z)\cdot 2t-4zt-2y+4x-2z^2$

19.2 $2xy+1+\frac{x^2-1}{x+1}$; $2y+1+\frac{2x}{x+1}$

19.3 $(y^2-2)(1-v)+2xy\cdot 2uv$; $(y^2-2)(2-u)+2xy\cdot u^2$; $4yuv(1-v)+[2y(1-v)+4xuv]\cdot 2uv+4xyv$;
$2yu^2(2-u)+[2y(2-u)+2xu^2]\cdot u^2$; $4yuv(2-u)+[2y(1-v)+4xuv]\cdot u^2-(y^2-2)+4xyu$

19.4 (1) 16 (2) 5 (3) 1 (4) 1 (5) 4 (6) 2

19.5 0, 0, 3/4

19.6 (1) $(e^y-y/x)\cdot 2t+[x\cdot e^y-\ln(x)]\cdot 3t^2$; 1

(2) $3[\frac{1}{3}x^{-2/3}\cdot y^{2/3}\cdot 2t+x^{1/3}\cdot\frac{2}{3}y^{-1/3}\cdot\frac{1}{t}]$; 2

(3) $y^2z^3\cdot e^t+2xyz^3\cdot\frac{1}{t}+3xy^2z^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}$; 1

(4) $30(3x-4y)^4(\frac{t}{t^2+1}-\sqrt{t})$; 2

(5) $\frac{1}{3}(3x^2-2y^3)^{-2/3}\cdot 6x\cdot e^{2t+1}\cdot 2+\frac{1}{3}(3x^2-2y^3)^{-2/3}\cdot(-6y^2)\cdot\frac{2t}{t^2+1}$; -2

(6) $(y\cdot e^x+1\cdot\ln(y))\cdot\cos(t^2)\cdot 2t+(1\cdot e^x+x\cdot\frac{1}{y})\cdot 4t^3$; 2

(7) $(\sin(y^2)+y\cdot\frac{2x}{x^2+1})\cdot e^{2t}\cdot 2+(x\cdot\cos(y^2)\cdot 2y+\ln(x^2+1))\cdot\frac{1}{3}t^{-2/3}$; 5

(8) $[2x\cdot e^{y^2+1}-\sin(2y+1)\cdot\frac{2x}{x^2+1}]\cdot(2t+1)^{-1/2}+[x^2\cdot e^{y^2+1}\cdot 2y-\cos(2y+1)\cdot 2\cdot\ln(x^2+1)]\cdot 9\cdot(3t+1)^2$; -2

19.7 (1) $(2x+y)^{(2x+y)} \cdot 2 \cdot (\ln(2x+y)+1)$; $(2x+y)^{(2x+y)} \cdot (\ln(2x+y)+1)$; -2

(2) $-\dfrac{y+2}{e^y} \cdot \dfrac{\ln(x+1)+1}{(x+1)^2}$; $-\dfrac{\ln(x+1)+2}{x+1} \cdot \dfrac{y+1}{e^y}$; -1

20. Extrema unter Nebenbedingungen

20.1 (1) Einsetzen: $x = 2y \Rightarrow z = 10-3y \Rightarrow f(x,y,z) = 6y^2+(10-3y)^2 =: h(y) \Rightarrow$ (4, 2, 4) Min.

(2) Einsetzen: $y^{2/3} = 8-x^{1/3} \Rightarrow f(x,y) = x^{1/3} \cdot (8-x^{1/3}) =: h(x) \Rightarrow$ (64, 8) Max.

(3) Lagrange: $L(x,y,\lambda) = -x^2-y^2+4+\lambda \cdot ((x-1)^2+(y-1)^2-2)$, $L_x = -2x+\lambda \cdot 2(x-1)$, $L_y = -2y+\lambda \cdot 2(y-1)$,
$L_{xx} = -2+2\lambda$, $L_{xy} = 0$, $L_{x\lambda} = 2(x-1)$, $L_{yy} = -2+2\lambda$, $L_{y\lambda} = 2(y-1)$, (0, 0) Max., (2, 2) Min.

(4) Einsetzen: $y = 1/x \Rightarrow f(x,y) = x^3-1+1/x^3 =: h(x) \Rightarrow$ (1, 1) Min., (–1, –1) Max.

(5) Lagrange: $L(x,y,\lambda) = x-y+\lambda \cdot (x^2+y^2-8)$, $L_x = 1+\lambda \cdot 2x$, $L_y = -1+\lambda \cdot 2y$,
$L_{xx} = 2\lambda$, $L_{xy} = 0$, $L_{x\lambda} = 2x$, $L_{yy} = 2\lambda$, $L_{y\lambda} = 2y$, (2, –2) Max., (–2, 2) Min.

(6) Lagrange: $L(x,y,\lambda) = x+y+\lambda \cdot (x^2+xy+y^2-3)$, $L_x = 1+\lambda \cdot (2x+y)$, $L_y = 1+\lambda \cdot (x+2y)$,
$L_{xx} = 2\lambda$, $L_{xy} = \lambda$, $L_{x\lambda} = 2x+y$, $L_{yy} = 2\lambda$, $L_{y\lambda} = x+2y$, (1, 1) Max., (–1, –1) Min.

(7) Lagrange: $L(x,y,\lambda) = 2x+3y+\lambda \cdot (x^2+3y^2-7)$, $L_x = 2+\lambda \cdot 2x$, $L_y = 3+\lambda \cdot 6y$,
$L_{xx} = 2\lambda$, $L_{xy} = 0$, $L_{x\lambda} = 2x$, $L_{yy} = 6\lambda$, $L_{y\lambda} = 6y$, (2, 1) Max., (–2, –1) Min.

(8) Lagrange: $L(x,y,\lambda) = 4x+2y+\lambda \cdot (2x^2+y^2-12)$, $L_x = 4+\lambda \cdot 4x$, $L_y = 2+\lambda \cdot 2y$,
$L_{xx} = 4\lambda$, $L_{xy} = 0$, $L_{x\lambda} = 4x$, $L_{yy} = 2\lambda$, $L_{y\lambda} = 2y$, (2, 2) Max., (–2, –2) Min.

(9) Lagrange: $L(x,y,\lambda) = 4x+2y+\lambda \cdot (x^2+y^2/4-2x-2y-3)$, $L_x = 4+\lambda \cdot (2x-2)$, $L_y = 2+\lambda \cdot (y/2-2)$,
$L_{xx} = 2\lambda$, $L_{xy} = 0$, $L_{x\lambda} = 2x-2$, $L_{yy} = \lambda/2$, $L_{y\lambda} = y/2-2$, (3, 8) Max., (–1, 0) Min.

(10) Lagrange: $L(x,y,\lambda) = (x-1)^2+(y-2)^2+\lambda \cdot (x^2+y^2-5)$, $L_x = 2(x-1)+\lambda \cdot 2x$, $L_y = 2(y-2)+\lambda \cdot 2y$,
$L_{xx} = 2+2\lambda$, $L_{xy} = 0$, $L_{x\lambda} = 2x$, $L_{yy} = 2+2\lambda$, $L_{y\lambda} = 2y$, (1, 2) Min., (–1, –2) Max

(11) Lagrange: $L(x,y,\lambda) = 2x+6y+\lambda \cdot (x^2+y^2-4x-6y+3)$, $L_x = 2+\lambda \cdot (2x-4)$, $L_y = 6+\lambda \cdot (2y-6)$,
$L_{xx} = 2\lambda$, $L_{xy} = 0$, $L_{x\lambda} = 2x-4$, $L_{yy} = 2\lambda$, $L_{y\lambda} = 2y-6$, (1, 0) Min., (3, 6) Max.

(12) Lagrange: $L(x,y,\lambda) = x-y+\lambda \cdot (x^2+y^2-2y-7)$, $L_x = 1+\lambda \cdot 2x$, $L_y = -1+\lambda \cdot (2y-2)$,
$L_{xx} = 2\lambda$, $L_{xy} = 0$, $L_{x\lambda} = 2x$, $L_{yy} = 2\lambda$, $L_{y\lambda} = 2y-2$, (2, –1) Max., (–2, 3) Min.

(13) Lagrange: $L(x,y,\lambda) = 2x+3y+\lambda \cdot (4x^2+y^2-8x-2y-35)$, $L_x = 2+\lambda \cdot (8x-8)$, $L_y = 3+\lambda \cdot (2y-2)$,
$L_{xx} = 8\lambda$, $L_{xy} = 0$, $L_{x\lambda} = 8x-8$, $L_{yy} = 2\lambda$, $L_{y\lambda} = 2y-2$, (0, –5) Min., (2, 7) Max.

(14) Lagrange: $L(x,y,\lambda) = (x-2)^2+(y-1)^2+\lambda \cdot (x^2+y^2-5)$, $L_x = 2(x-2)+\lambda \cdot 2x$, $L_y = 2(y-1)+\lambda \cdot 2y$,
$L_{xx} = 2+2\lambda$, $L_{xy} = 0$, $L_{x\lambda} = 2x$, $L_{yy} = 2+2\lambda$, $L_{y\lambda} = 2y$, (2, 1) Min., (–2, –1) Max.

(15) Lagrange: $L(x,y,\lambda) = x^2+y^2-2x-6y+10+\lambda \cdot (x^2+y^2-10)$, $L_x = 2x-2+\lambda \cdot 2x$, $L_y = 2y-6+\lambda \cdot 2y$,
$L_{xx} = 2+2\lambda$, $L_{xy} = 0$, $L_{x\lambda} = 2x$, $L_{yy} = 2+2\lambda$, $L_{y\lambda} = 2y$, (1, 3) Min., (–1, –3) Max.

(16) Lagrange: $L(x,y,\lambda) = (x-4)^2+(y-3)^2+\lambda \cdot (x^2+y^2-25)$, $L_x = 2(x-4)+\lambda \cdot 2x$, $L_y = 2(y-3)+\lambda \cdot 2y$,
$L_{xx} = 2+2\lambda$, $L_{xy} = 0$, $L_{x\lambda} = 2x$, $L_{yy} = 2+2\lambda$, $L_{y\lambda} = 2y$, (4, 3) Min., (–4, –3) Max.

20.2 (1) $L(x,y,\lambda) = \ln(x)+y+\lambda \cdot (x^2+xy+y^2-3)$, $L_x = 1/x+\lambda \cdot (2x+y)$, $L_y = 1+\lambda \cdot (x+2y)$,
$L_{xx} = -1/x^2+2\lambda$, $L_{xy} = \lambda$, $L_{x\lambda} = 2x+y$, $L_{yy} = 2\lambda$, $L_{y\lambda} = x+2y$, $\mathbf{H}_L(1, 1, -\frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} -5/3 & -1/3 & 3 \\ -1/3 & -2/3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, Max.

(2) $L(x,y,\lambda) = \frac{1}{2}\ln(x)+y+\lambda \cdot (x+2y+\sqrt{x+2y}-2)$, $L_x = \dfrac{1}{2x}+\lambda \cdot (1+\frac{1}{2}(x+2y)^{-1/2})$, $L_y = 1+\lambda \cdot (2+(x+2y)^{-1/2})$ $L_{xx} =$
$-\dfrac{1}{2x^2}+\lambda \cdot (-\frac{1}{4}(x+2y)^{-3/2})$, $L_{xy} = \lambda \cdot (-\frac{1}{2}(x+2y)^{-3/2})$, $L_{x\lambda} = 1+\frac{1}{2}(x+2y)^{-1/2}$,
$L_{yy} = \lambda \cdot (-(x+2y)^{-3/2})$, $L_{y\lambda} = 2+(x+2y)^{-1/2}$, $\mathbf{H}_L(1, 0, -\frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} -5/12 & 1/6 & 3/2 \\ 1/6 & 1/3 & 3 \\ 3/2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, Max.

(3) $L(x,y,\lambda) = \frac{1}{3}x^3+xy^2-x+1+\lambda \cdot (x^2+y^2-1)$, $L_x = x^2+y^2-1+\lambda \cdot (2x)$, $L_y = 2xy+\lambda \cdot (2y)$,
$L_{xx} = 2x+2\lambda$, $L_{xy} = 2y$, $L_{x\lambda} = 2x$, $L_{yy} = 2x+2\lambda$, $L_{y\lambda} = 2y$,
$\mathbf{H}_L(1, 0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, Min., $\mathbf{H}_L(-1, 0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, Max.

(4) $L(x,y,\lambda) = \frac{y}{x} + \lambda\cdot(y+1+\ln(x+y))$, $L_x = -\frac{y}{x^2} + \lambda\cdot\frac{1}{x+y}$, $L_y = \frac{1}{x} + \lambda\cdot(1+\frac{1}{x+y})$, $L_{xx} = \frac{2y}{x^3} - \frac{\lambda}{(x+y)^2}$,

$L_{xy} = -\frac{1}{x^2} - \frac{\lambda}{(x+y)^2}$, $L_{x\lambda} = \frac{1}{x+y}$, $L_{yy} = -\frac{\lambda}{(x+y)^2}$, $L_{y\lambda} = 1 + \frac{1}{x+y}$, $\mathbf{H}_L(2,-1,-\frac{1}{4}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, Min.

(5) $L(x,y,\lambda) = \frac{y}{x+2} + x + 1 + \lambda\cdot(x^2+y^2+2xy-4)$, $L_x = \frac{-y}{(x+2)^2} + 1 + \lambda\cdot(2x+2y)$, $L_y = \frac{1}{x+2} + \lambda\cdot(2y+2x)$,

$L_{xx} = \frac{2y}{(x+2)^3} + 2\lambda$, $L_{xy} = \frac{-1}{(x+2)^2} + 2\lambda$, $L_{x\lambda} = 2x+2y$, $L_{yy} = 2\lambda$, $L_{y\lambda} = 2y+2x$, $\lambda_0 = -\frac{1}{8}$, $\lambda_1 = \frac{1}{8}$,

$\mathbf{H}_L(0,2,-\frac{1}{8}) = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 & 4 \\ -1/2 & -1/4 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, Min., $\mathbf{H}_L(-4,6,\frac{1}{8}) = \begin{pmatrix} -5/4 & 0 & 4 \\ 0 & 1/4 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, Max.

(6) $L(x,y,\lambda) = xy^2+2xy-3y+x-1+\lambda\cdot(x^3-y^3-1-3x^2y+3xy^2)$, $L_x = (y+1)^2+3\lambda\cdot(x-y)^2$,

$L_y = 2xy+2x-3-3\lambda\cdot(x-y)^2$, $L_{xx} = 6\lambda\cdot(x-y)$, $L_{xy} = 2(y+1)-6\lambda\cdot(x-y)$, $L_{x\lambda} = 3(x-y)^2$, $L_{yy} = 2x+6\lambda\cdot(x-y)$,

$L_{y\lambda} = -3(x-y)^2$, $\lambda_0 = -\frac{1}{3} = \lambda_1$, $\mathbf{H}_L(1,0,-\frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, Min., $\mathbf{H}_L(-1,-2,-\frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & -3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, Max.

(7) $L(x,y,\lambda) = x+y+\lambda\cdot(\ln(x^2+y) - y^2-x+1)$, $L_x = 1+\lambda\cdot(\frac{2x}{x^2+y}-1)$, $L_y = 1+\lambda\cdot(\frac{1}{x^2+y}-2y)$,

$L_{xx} = \lambda\cdot\frac{2y-2x^2}{(x^2+y)^2}$, $6\lambda\cdot(x-y)$, $L_{xy} = \lambda\cdot\frac{-2x}{(x^2+y)^2}$, $L_{x\lambda} = \frac{2x}{x^2+y}-1$, $L_{yy} = \lambda\cdot(\frac{-1}{(x^2+y)^2}-2)$, $L_{y\lambda} = \frac{1}{x^2+y}-2y$,

$\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = -1$, $\mathbf{H}_L(0,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, Max., $\mathbf{H}_L(1,0,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, Min.

21. Integralrechnung

2, 4, 3, 5, 9, 3, 3, 1, 2, 9, 5, 1, 38, 12, 1, 7, 16, 20, 5, 34, 6, 15, 2, 3, 10, 52, 9, 80, 3

Klausur

Die 90-minütige Semesterabschlussklausur zur Vorlesung Mathematik für Ökonomen besteht aus 8 Aufgaben, bei denen jeweils 5 Punkte erreichbar sind, also 40 Punkte insgesamt. 3 Aufgaben stammen aus dem Bereich der linearen Algebra, 5 Aufgaben aus der Analysis. Auch für richtige Teillösungen werden Punkte vergeben. Für die richtige Formel (z.B. Taylorformel) gibt es nur dann einen Punkt, wenn die Aufgabe erkennbar bearbeitet wird. Die Klausur gilt als bestanden, wenn mindestens 18 Punkte erzielt werden. Die Noten werden nach folgendem Punkteschema vergeben:

Punkte	0 – 13	14 – 17	18 – 21	22 – 24	25, 26	27, 28	29, 30	31, 32	33, 34	35, 36	37, 38	≥ 39
Note	5,0	4,7	4,0	3,7	3,3	3,0	2,7	2,3	2,0	1,7	1,3	1,0

Es sind keinerlei Hilfsmittel bei der Klausur zugelassen, also weder Taschenrechner noch Bücher, Vorlesungsbeilagen, Aufgabensammlung, Schmierpapier oder Ähnliches. Bitte schreiben Sie nur mit Kuli oder Füller, *nicht* mit Bleistift.
Es haben nur solche Aufgaben Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg eindeutig erkennbar ist.

Die Aufgabensammlung enthält zum großen Teil alte Klausuraufgaben aus dem Diplomstudiengang. Die Aufgabentypen sind aber auch im Bachelorstudiengang praktisch unverändert geblieben. Die nachstehende Tabelle zeigt, welche der Aufgaben (≈ bedeutet leicht modifiziert) in welchen Klausuren gestellt wurden (vgl. auch die alten Aufgabensammlungen zur linearen Algebra bzw. Analysis).

Klausur	Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Aufgabe 5	Aufgabe 6	Aufgabe 7	Aufgabe 8
WS 07/08	2.12 (1)	6.5	7.2 (1)	9.9 (1)	12.1 (7)	15.2 (1)	20.1 (16)	21 (26)
SS 08	4.3 (5)	5.7	7.2 (2)	9.13 (1)	11.2 (7)	17.2 (9)	18 (3)	19.6 (6)
WS 08/09	2.13 (3)	5.20	7.2 (3)	9.6 (2)	12.4 (3)	14.2 (7)	17.1 (13)	21 (27)
SS 09	4.4 (6)	5.21	7.2 (4)	9.8	11.1 (Vorkl.)	17.2 (5)	18 (9)	20.1 (8)
WS 09/10	2.18	5.22 (1)	7.2 (5)	9.13	11.1 (25)	17.1 (11)	19.4 (5)	21 (28)
SS 10	2.15 (2)	6.4	7.2	9.12 (1)	11.2 (6)	13 (10)	17.1 (14)	18 (15)
WS 10/11	4.3	5.22 (2)	7.2 (3)	9.10 (2)	12.2 (4)	15.2 (2)	17.2	19.6 (7)
SS 11	4.4	≈ 5.15	7.2 (4)	9.9	11.1	17.1 (13)	18 (12)	21 (18)
WS 11/12	2.18	6.7	7.2	9.14	12.1 (8)	14.2 (8)	19.6	20.2 (4)
SS 12	2.12	≈ 5.14	7.2	9.13	11.1 (Vorkl.)	≈ 13 (15)	≈ 17.1 (14)	21 (22)
WS 12/13	2.14	≈ 5.13	7.2	9.12	12.4 (4)	17.5 (3)	20.1	21 (29)
SS 13	4.4	5.22 (3)	7.2	9.10	11.4	17.1	18	19.6
WS 13/14	2.18	6.8	7.2	9.13	12.1	13	19.4 (6)	20.1
SS 14	4.3	5.22	7.2	9.9 (2)	11.1 (Vorkl.)	14.2 (9)	≈ 17.2 (5)	≈ 21 (22)
WS 14/15	≈ 2.15 (2)	≈ 6.2	7.2	≈ 9.6	11.2 (6)	≈ 18 (14)	≈ 19.6 (7)	20.2 (3)
SS 15	2.13	≈ 5.22 (3)	7.2	9.9	11.1 (4)	18 (16)	17.1 (15)	≈ 21 (15)
WS 15/16	≈ 2.12	≈ 6.4	7.3	9.15	12.1	17.1	19.6	≈ 21 (29)
SS 16	4.4	6.9	≈ 7.3	9.16	11.1 (26)	13 (22)	≈ 18 (11)	≈ 20.1 (11)
WS 16/17	2.18	≈ 5.22 (3)	≈ 7.3	≈ 9.14	≈ 11.2 (7)	≈ 17.1 (15)	≈ 18 (15)	≈ 19.6 (7)
SS 17	≈ 4.5 (3)	≈ 6.9	≈ 7.3	9.9	11.1 (Vorkl.)	12.1	20.1 (11)	21 (25)
WS 17/18	4.3	5.22	7.2	9.12	12.4	15.2 (3)	17.1 (16)	19.6 (8)
SS 18	≈ 2.12	≈ 5.22 (3)	7.2	9.13	11.2	17.1	18	21
WS 18/19	4.4	5.22 (4)	7.2	≈ 9.16	11.1 (SS14)	14.3	18	20.1