Diplomarbeit

Komplexitätstheoretische und algorithmische Untersuchung des Meisterschaftsproblems

Niels Schmitt

Diplomarbeit
am Fachbereich Informatik
der Universität Dortmund

3. August 2000

Gutachter:

Prof. Dr. Ingo Wegener
PD Dr. Hanno Lefmann

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Einführung

Die Mannschaften einer Sport-Liga ermitteln unter sich den Meister einer Saison, indem sie nach einem gewissen Spielplan paarweise gegeneinander antreten. Dabei werden ihnen nach einer bestimmten Regel entsprechend den Spielergebnissen Punkte zugewiesen. Meister ist am Ende der Saison die Mannschaft, die am meisten Punkte besitzt. Bei Punktgleichheit wird nach bestimmten Kriterien weiter differenziert, z.B. im Fußball nach der Tordifferenz, etc.

Im amerikanischen Baseball sind keine Unentschieden möglich. Der Sieger eines Spiels erhält 1 Punkt, der Verlierer 0 Punkte. Das sogenannte *Baseball Elimination Problem* ist ein klassisches Problem der kombinatorischen Optimierung. Zu einem Zeitpunkt in der Saison hat eine Mannschaft i schon eine gewisse Anzahl w_i von Spielen gewonnen und noch g_{ij} verbleibende Spiele gegen Mannschaft j auszutragen. Für eine konkrete Mannschaft ist zu entscheiden, ob sie „theoretisch" noch Meister werden kann, d.h. ob die Ausgänge der noch ausstehenden Spiele so gewählt werden können, dass am Ende der Saison keine Mannschaft mehr Punkte besitzt als die gefragte Mannschaft.

Zur Beantwortung dieser Frage reicht es nicht aus, lediglich zu überprüfen, ob der Punkterückstand der gefragten Mannschaft i auf die führende Mannschaft j in den verbleibenden Spielen aufgeholt werden kann, d.h. zu überprüfen, ob $w_i + g_i \geq w_j$ gilt, wobei $g_i = \sum_k g_{ik}$ die Anzahl aller noch ausstehenden Spiele von Mannschaft i bezeichnet. Der Fehler bei diesem „naiven" Ansatz ist, dass hier der Spielplan für die noch ausstehenden Spiele nicht berücksichtigt wird. In der in Abbildung 1.1.1 dargestellten Situation kann nach der obigen Regel Mannschaft D noch Meister werden, denn sie kann ihre verbleibenden drei Spiele gewinnen und somit die führende Mannschaft einholen. Dieses ist jedoch nicht richtig, denn gemäß dem angegebenen Spielplan werden notwendiger Weise drei Punkte unter den ersten drei Mannschaften verteilt, d.h. mindestens eine der ersten drei Mannschaften hat am Ende der Saison mehr als 50 Punkte. Der naive Ansatz liefert also nur eine notwendige Bedingung dafür, dass eine Mannschaft noch Meister werden kann. Adler, Erara, Hochbaum und Olinich (1998) zeigen einige interessante Beispiele solcher Fehler aus der amerikanischen Presse auf.

Mannschaft	Punkte
A	50
B	49
C	49
D	47
⋮	⋮

Abbildung 1.1.1: *Die noch ausstehenden Spiele der ersten vier Mannschaften seien genau die sechs Spiele untereinander.*

Bereits Schwartz (1966) hat eine Formulierung als Netzwerk-Fluss Problem angegeben, so dass für eine gegebene Mannschaft zu einem Zeitpunkt in der Saison effizient, d.h. in polynomieller Zeit, durch die Berechnung eines maximalen Flusses bestimmt werden kann, ob diese Mannschaft theoretisch noch Meister werden kann. Hoffmann und Rivlin (1970) haben dieses Resultat auf das Problem erweitert, zu entscheiden, ob die gefragte Mannschaft am Ende der Saison einen der ersten k Tabellenplätze erreichen kann. Falls k jedoch als Parameter in der Eingabe zugelassen ist, ist dieses Problem NP-vollständig, siehe McCormick (1996). In der Literatur sind weitere Varianten untersucht worden. Von Gallo, Grigoriadis und Tarjan (1989) wurden effiziente Algorithmen zur Berechnung maximaler Flüsse für parametrisierte Fluss-Netzwerke vorgestellt, auf die Gusfield und Martel (1992) die Berechnung der sogenannten „Baseball Elimination Number“ zurückgeführt haben. Diese Zahl gibt an, wieviele der noch ausstehenden Spiele eine Mannschaft mindestens gewinnen muss, um die Saison als Meister beenden zu können. Adler et al. (1998) und Gusfield und Martel (1999) betrachten Erweiterungen des Baseball Elimination Problems um „Wildcards“, mehrere „Divisions“ mit „Playoff-Finale“ und weitere Fragestellungen.

Das Baseball Elimination Problem ist seit langem wohl bekannt. Es wird gerne verwendet, um die Anwendung von Operations Research Methoden wie Lineare Optimierung und Flussalgorithmen zu illustrieren, siehe beispielsweise Robinson (1991), Ahuja, Magnanti und Orlin (1993) und Cook, Cunningham, Pulleyblank und Schrijver (1998). Erst vor kurzer Zeit jedoch hat Wayne (1999) eine überraschende strukturelle Eigenschaft entdeckt, die zuvor in der Literatur nicht vermutet wurde. Es gibt einen Schwellwert t, so dass jede Mannschaft i genau dann noch Meister werden kann, wenn sie mindestens t Punkte erreichen kann, d.h. wenn $w_i + g_i \geq t$ gilt. Für den Beweis der Existenz eines solchen Schwellwertes argumentiert Wayne über Netzwerk-Fluss Formulierungen. Bisher musste, um zu einem Zeitpunkt in der Saison alle Mannschaften zu bestimmen, die theoretisch noch Meister werden können, für jede Mannschaft ein maximaler Fluss für das zugehörige Netzwerk berechnet bzw. ein Lineares Programm gelöst werden. Waynes Resultat hingegen induziert eine lineare Ordnung auf den Mannschaften, d.h. für je zwei Mannschaften i und j mit $w_i + g_i \leq w_j + g_j$ gilt, dass Mannschaft j noch Meister werden kann, wenn Mannschaft i es kann, und i nicht mehr Meister werden kann, wenn j es nicht mehr kann. Ein Schwellwert kann also bei n Mannschaften mit binärer Suche durch höchstens $\lceil \log n \rceil$ Berechnungen eines maximalen Flusses bestimmt werden. Wayne hat sogar die Bestimmung eines Schwellwertes auf die Berechnung nur eines maximalen Flusses für ein parametrisiertes Fluss-Netzwerk zurückgeführt. Nach Wayne kann diese Berechnung unter Verwendung der Techniken von Gallo et al. (1989) mit derselben Komplexität wie die Berechnung eines maximalen Flusses für ein Netzwerk mit n Knoten durch Preflow-Push Algorithmen durchgeführt werden. Unabhängig davon haben Adler et al. (1998) die Existenz und Berechnung eines solchen Schwellwertes durch ein Lineares Programm mit $\Theta(n^2)$ Variablen und Bedingungen gezeigt. Im Rahmen des RIOT-Projektes („Berkeley Remote Interactive Optimization Testbed“) werden im Web[1] automatisiert aktuelle Statistiken über die „Major Baseball League (MBL)“ angeboten, die auf diese Weise berechnet werden.

Die Platzierung der Mannschaften wird durch die Anzahl der Siege bestimmt, deshalb macht es keinen Unterschied, ob der Sieger eines Spiels 1 Punkt oder $s > 0$ Punkte erhält. Können Spiele auch unentschieden enden, so erhält man eine Klasse von Punkteregeln. Der Sieger eines Spiels erhält s Punkte, der Verlierer 0 Punkte und im Falle eines Unentschiedens erhalten beide Mannschaften jeweils u Punkte. Diese Punkteregeln unterscheiden sich voneinander

[1] URL: `http://riot.ieor.berkeley.edu/~baseball`

im Wesentlichen durch das Verhältnis von s zu u, denn werden zu irgendeinem Zeitpunkt die Punkte aller Mannschaften durch u dividiert, so wird dadurch die Position der Mannschaften zueinander nicht verändert. Man kann also ohne Einschränkung $u = 1$ annehmen. Für den rationalen Parameter s bezeichne die s-Punkteregel die Regel, bei der der Sieger eines Spiels s Punkte erhält, der Verlierer 0 Punkte und im Falle eines Unentschiedens beide Mannschaften 1 Punkt erhalten.

Im Fall $s = 2$ kann das Problem, zu entscheiden, ob eine Mannschaft noch Meister werden kann, auf das Baseball Elimination Problem zurückgeführt werden, indem jedes Spiel unter der 2-Punkteregel durch zwei Spiele simuliert wird. Zwei Siege gegen eine Mannschaft entsprechen dann einem Sieg nach der 2-Punkteregel und ein Sieg und eine Niederlage entsprechen einem Unentschieden nach der 2-Punkteregel. Damit übertragen sich die Ergebnisse für das Baseball Elimination Problem auf das analoge Problem unter der 2-Punkteregel.

Im Fall $s \neq 2$ besteht eine gewisse Asymmetrie zwischen einem Unentschieden und einem Spiel, das einen Sieger hat, denn im ersten Fall werden insgesamt 2 Punkte vergeben, jedoch im anderen Fall sind es $s \neq 2$ Punkte. Aus diesem Grund lassen sich die Ergebnisse für das Baseball Elimination Problem nicht direkt übertragen. Das analoge Problem unter den s-Punkteregeln sei als *Meisterschaftsproblem*, kurz MP, bezeichnet. Die Untersuchung dieses Problems ist insbesondere deshalb interessant, da man im europäischen Fußball vor einigen Jahren von der 2-Punkteregel zur 3-Punkteregel übergegangen ist.

Gusfield und Martel (1999) ist es gelungen, das Schwellwert-Resultat von Wayne (1999) auf allgemeinere Punkteregeln zu erweitern, die eine bestimmte Monotonie-Bedingung erfüllen. In diese Klasse fallen auch die s-Punkteregeln für $s \geq 1$. Der Beweis ist jedoch lediglich ein reiner Existenzbeweis und nicht an eine Methode zur Berechnung geknüpft. Es bezeichne jetzt w_i die Anzahl der Punkte, die Mannschaft i bereits erhalten hat.

Theorem 1.1.1 (Gusfield und Martell (1999)). *Es sei $s \geq 1$ und es werde unter der s-Punkteregel gespielt. Zu jeder Situation in einer Saison gibt es einen Schwellwert t, so dass jede Mannschaft i genau dann noch Meister werden kann, wenn sie mindestens t Punkte erreichen kann, d.h. wenn $w_i + g_i \cdot s \geq t$ gilt.*

Beweis. Für eine Festlegung A der Ergebnisse aller ausstehenden Spiele bezeichne w_A die Punktzahl des zugehörigen Meisters. Bezüglich aller möglichen Festlegungen A sei A^* eine Festlegung, für die w_A minimal ist, d.h. $A^* = \arg\min_A w_A$.

Ist für eine Mannschaft i nun $w_i + g_i \cdot s < w_{A^*}$, so ist nach Definition von A^* Mannschaft i für keine Festlegung der ausstehenden Spiele Meister, d.h. Mannschaft i kann nicht mehr Meister werden. Sei jetzt $w_i + g_i \cdot s \geq w_{A^*}$ angenommen. Ändert man alle verbleibenden Spiele von i in der Festlegung A^* in Siege für i, so erhält man eine Festlegung A', bezüglich der Mannschaft i jetzt nach Annahme $w_i + g_i \cdot s \geq w_{A^*}$ Punkte besitzt. Da für eine Niederlage 0 Punkte vergeben werden, hat bezüglich A' jede andere Mannschaft höchstens so viele Punkte wie bezüglich A^*, also nicht mehr als w_{A^*} Punkte. Damit ist eine Festlegung A' aller ausstehenden Spiele gefunden, für die Mannschaft i Meister ist. Mit $t = w_A^*$ folgt die Behauptung. □

Es stellt sich damit umso mehr die Frage, ob das Meisterschaftsproblem ebenso effizient wie das Baseball Elimination Problem gelöst werden kann. Die Beantwortung dieser Frage steht im Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit. Es wird sich herausstellen, dass in einem Großteil der Fälle ein wesentlicher Unterschied in der algorithmischen Komplexität beider Probleme besteht.

1.2 Überblick

In Kapitel 2 werden zunächst das Meisterschaftsproblem und praktisch relevante Spezialisierungen davon exakt definiert und es wird die Potential-Graph Darstellung einer Eingabe eingeführt. In Kapitel 3 wird das Meisterschaftsproblem unter der s-Punkteregel für unterschiedliche Werte von s komplexitätstheoretisch klassifiziert. Für $s > 1$ und $s \neq 2$ wird gezeigt, dass das Problem selbst vor dem drittletzten Spieltag einer Saison NP-vollständig ist. Im Fall $s \leq 1$ kann das Problem auf das Baseball Elimination Problem zurückgeführt werden. Ausgehend von den NP-Vollständigkeitsresultaten aus Kapitel 3 wird in Kapitel 4 untersucht für welche Werte von $k \geq 3$ das Meisterschaftsproblem NP-Vollständig ist, wenn noch genau die letzten k Spieltage einer Saison ausstehen. Zudem wird in diesem Kapitel untersucht bis zu welchem Spieltag einer Saison, unabhängig von den Ergebnissen der bereits ausgetragenen Spiele, noch jede Mannschaft die Möglichkeit hat Meister zu werden. In Kapitel 5 wird sich der Fall, in dem jede Mannschaft nur noch höchstens zwei ausstehende Spiele besitzt, als effizient lösbar herausstellen. Dieses folgt aus einem allgemeineren Resultat, das einen Algorithmus für den Fall liefert, dass der den ausstehenden Spielen in der Eingabe entsprechende Multigraph eine geeignete Lokalitätseigenschaft erfüllt. Insbesondere lässt sich dieses Resultat auf den Fall anwenden, dass die Spiele gemäß dem verallgemeinerten Spielplan der Fußball-Bundesliga ausgetragen werden. Das Meisterschaftsproblem wird sich dann in einem Großteil der Fälle als effizient lösbar erweisen.

Kapitel 2

Das Meisterschaftsproblem

2.1 Das Problem und seine Varianten

In diesem Abschnitt werden das Meisterschaftsproblem und praktisch relevante Spezialisierungen davon vorgestellt.

Definition 2.1.1. MP (*Meisterschaftsproblem*)
Eine Saison besteht aus r Runden, in denen jeweils alle n Mannschaften genau einmal gegeneinander spielen. Eine Eingabe enthält die Ergebnisse $w_{ij}^{(l)} \in \{\mathrm{S}, \mathrm{U}, \mathrm{N}, ?\}$, $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$, $l = 1, \ldots, r$, der einzelnen Spiele und einen positiven rationalen Parameter s. Die Parameter $w_{ij}^{(l)}$ geben an, ob Mannschaft i gegen Mannschaft j in Runde l gewonnen (S), unentschieden gespielt (U) oder verloren (N) hat, oder ob das Spiel noch aussteht (?). Die Punkte werden gemäß der s-Punkteregel vergeben, d.h. s Punkte für einen Sieg, 1 Punkt für ein Unentschieden und 0 Punkte für eine Niederlage. Es ist zu entscheiden, ob Mannschaft 1 noch Meister werden kann, d.h. ob die Ausgänge aller ausstehenden Spiele so gewählt werden können, dass keine Mannschaft mehr Punkte als Mannschaft 1 hat.

Man beachte, dass durch eine geeignete Permutation der Eingabe auch nach jeder anderen Mannschaft gefragt werden kann.

Für eine Mannschaft i bezeichne

$$w_i = s \cdot |\{(j,l) \mid w_{ij}^{(l)} = \mathrm{S}\}| + |\{(j,l) \mid w_{ij}^{(l)} = \mathrm{U}\}|$$

die bereits gewonnenen Punkte, $g_{ij} = |\{l \mid g_{ij}^{(l)} = ?\}|$ die Anzahl noch ausstehender Spiele gegen Mannschaft j und $g_i = \sum_j g_{ij}$ die Anzahl aller noch ausstehenden Spiele von Mannschaft i.

Definition 2.1.2. Mit s-MP sei das Teilproblem von MP bezeichnet, in dem s ein fester positiver rationaler Wert ist.

In den folgenden Kapiteln wird das Meisterschaftsproblem insbesondere auch für Situationen untersucht, in denen noch genau die letzten k Spieltage einer Saison ausstehen. Dazu werden einige Begriffe eingeführt. Die Anzahl n von Mannschaften sei im Folgenden gerade. Eine Saison besteht aus r Runden. In jeder Runde spielen alle Mannschaften gemäß einem Spielplan an $n-1$ Spieltagen genau einmal gegeneinander. Eine Saison besteht also aus $r(n-1)$ Spieltagen. Ein Spielplan beschreibt, an welchem Spieltag welche Mannschaften gegeneinander antreten. An einem Spieltag spielt jede Mannschaft in genau einem von $n/2$ Spielen. Für eine gerade Anzahl von Mannschaften existiert auf jeden Fall ein solcher Spielplan und kann in polynomieller Zeit berechnet werden, siehe dazu auch Kapitel 5.

Fasst man die n Mannschaften als Knoten $1, \ldots, n$ eines ungerichteten Graphen auf, wobei eine Kante $\{i, j\}$ für ein Spiel zwischen den Mannschaften i und j steht, dann entspricht eine Runde dem vollständigen Graphen K_n auf n Knoten, das ist der Graph, der zwischen je zwei unterschiedlichen Knoten eine Kante enthält. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt mit k Farben kantenfärbbar, wenn für ihn eine Kantenfärbung F mit k Farben existiert, d.h. eine Abbildung $F : E \to \{1, \ldots, k\}$, so dass $F(e_1) \neq F(e_2)$ für alle inzidenten Kanten $e_1 \neq e_2 \in E$ ist. Ein Spielplan ist also eine Kantenfärbung des vollständigen Graphen mit $n-1$ Farben. Am l-ten Spieltag einer Runde werden die Spiele, die den Kanten in $F^{-1}(l)$ entsprechen, ausgetragen.

Ein weiteres Teilproblem von MP für feste natürliche Zahlen k und r soll so definiert werden, dass die Eingabe die Situation in einer Saison mit r Runden vor genau den letzten k Spieltagen beschreibt. Es muss also ein Spielplan existieren, so dass die ausstehenden Spiele genau die Spiele der letzten k Spieltage der Saison sind. Für eine Eingabe muss diese Bedingung in polynomieller Zeit überprüfbar sein. Ein Graph heißt k-regulär, wenn alle Knoten v einen Knotengrad von $d(v) = k$ besitzen, d.h. jeder Knoten ist mit genau k Kanten inzident. Ist eine Eingabe für MP gegeben, in der alle Mannschaften genau k ausstehende Spiele besitzen, entspricht für $n > k$ die obige Bedingung dem Problem für einen k-regulären Graphen auf n Knoten zu überprüfen, ob dieser mit k Farben kantenfärbbar ist und ob der Komplementärgraph des Graphen mit $n-1-k$ Farben kantenfärbbar ist. Dabei hat der Komplementärgraph eines Graphen G die gleiche Knotenmenge wie G und enthält genau dann eine Kante zwischen zwei Knoten, wenn diese in G nicht adjazent sind. Für $k \geq 3$ ist nach Galil und Leven (1983) das Problem, für einen k-regulären Graphen zu entscheiden, ob er mit k Farben kantenfärbbar ist, NP-vollständig. Das lässt vermuten, dass es auch problematisch ist, die Existenz eines geeigneten Spielplans zu überprüfen. Deshalb sollte ein solcher in der Eingabe angegeben werden.

Definition 2.1.3. Mit (k, r, s)-MP sei das Teilproblem von MP bezeichnet, in dem die Parameter k und r feste natürliche Zahlen sind und s ein fester positiver rationaler Werte ist. Die Saison besteht aus genau r Runden, jede Mannschaft besitzt genau k ausstehende Spiele und die Anzahl n von Mannschaften ist gerade. Die Eingabe enthält zusätzlich einen Spielplan F, so dass die ausstehenden Spiele genau die Spiele der letzten k Spieltage der Saison sind.

In einer Eingabe für (k, r, s)-MP muss ein Spiel zwischen den Mannschaften i und j in Runde l also genau dann noch ausstehen, wenn entweder $l > r - \lfloor k/(n-1) \rfloor$ ist, oder es ist $l = r - \lfloor k/(n-1) \rfloor$ und $F(\{i, j\}) > n - 1 - (k \bmod (n-1))$. Dabei ist, wie auch vielfach im Folgenden, mit $a \bmod m$ immer die kleinste nicht negative Zahl b mit $b \equiv a \bmod m$ gemeint.

2.2 Die Potential-Graph Darstellung

In diesem Abschnitt wird eine alternative Darstellung von Eingaben für das Meisterschaftsproblem, in denen Mannschaft 1 keine ausstehenden Spiele besitzt, eingeführt. Es sei eine Eingabe für das Meisterschaftsproblem gegeben, in der Mannschaft 1 keine ausstehenden Spiele besitzt. Es seien $w_1, \ldots, w_n$ die bisher gewonnenen Punkte und g_{ij} für $i, j = 1, \ldots, n$ mit $i \neq j$ die Anzahlen noch ausstehender Spiele der n Mannschaften untereinander. Eine Eingabe kann durch den Multigraphen G mit Knotenmenge $V = \{1, \ldots, n\}$ repräsentiert werden, in dem je zwei unterschiedliche Knoten i und j durch g_{ij} viele Kanten verbunden sind. Jede Kante zwischen zwei Knoten i und j steht für ein noch auszutragendes Spiel zwischen den Mannschaften i und j. Gehen alle ausstehenden Spiele unentschieden aus, so seien $w'_1, \ldots, w'_n$ die Punkte der einzelnen Mannschaften am Ende der Saison für diese Festlegung. Jeder Knoten i wird jetzt mit einem Potential $\phi(i)$ bewertet, das den Punktevorsprung der zugehörigen Mannschaft i vor Mannschaft 1 angibt. Es sei $\phi(i) = w'_i - w'_1$. Knoten 1 ist also zu keinem Knoten adjazent und besitzt Potential 0. Der so erhaltene Graph heiße der zur Eingabe gehörige *Potential-Graph*.

Für eine Kante zwischen zwei Knoten i und j kann das zugehörige Unentschieden zwischen den beiden Mannschaften nachträglich in einen Sieg für beispielsweise Mannschaft j umgewandelt werden. Dabei verringert sich das Potential des Knotens i um 1, das Potential des Knotens j erhöht sich um $s-1$ und das Potential der restlichen Knoten wird nicht verändert, siehe Abbildung 2.2.1. Man beachte dabei, dass nach Voraussetzung Knoten 1 zu keinem anderen Knoten adjazent ist. Durch Anwendungen dieser „Flussregel“ erhält man neue Festlegungen der ausstehenden Spiele. Man beachte dabei, dass jede Kante nur einmal benutzt werden darf.

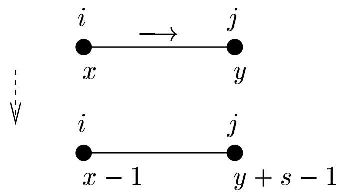

Abbildung 2.2.1: *Nachträgliche Umwandlung eines Unentschiedens zwischen den Mannschaften i und j mit Potential x bzw. y in einen Sieg für Mannschaft j.*

Ein Knoten i heiße aktiv, wenn sein Potential $\phi(i)$ größer als 0 ist, $\phi(i) > 0$, ansonsten heiße er passiv. Genau dann, wenn Mannschaft 1 Meister werden kann, existiert eine Festlegung der ausstehenden Spiele, so dass keine Mannschaft mehr Punkte als Mannschaft 1 besitzt. Für genau solche Festlegungen hat jeder Knoten ein Potential von höchstens 0. Also kann Mannschaft 1 genau dann Meister werden, wenn im zugehörigen Potential-Graphen durch Anwendung der Flussregel das Potential aller Knoten so manipuliert werden kann, dass alle Knoten passiv sind.

Kapitel 3

Klassifikation der s-Punkteregeln

In Kapitel 1 wurde festgestellt, dass für den Fall, in dem für einen Sieg doppelt so viele Punkte wie für ein Unentschieden vergeben werden, das Meisterschaftsproblem in polynomieller Zeit entschieden werden kann, d.h. 2-MP $\in$ P. In den beiden folgenden Abschnitten wird sich jedoch zeigen, dass das Meisterschaftsproblem NP-vollständig ist, falls nach der s-Punkteregel gespielt wird mit $s > 1$ und $s \neq 2$. Das gilt sogar, wenn die Eingaben so eingeschränkt werden, dass nur noch die letzten drei Spieltage einer Saison ausstehen. In Abschnitt 3.3 wird gezeigt, dass das Problem effizient gelöst werden kann, falls $s \leq 1$ ist. Es sei angemerkt, dass gerade für $s < 1$ das Schwellwert-Resultat von Gusfield und Martell (1999) nicht gilt. Dazu betrachte man beispielsweise die vier Mannschaften A, B, C und D mit den Punkten $w_A = x$, $w_B = x - 1$, $w_C = x - 1$ und $w_D = x - 2$ und den zwei ausstehenden Spielen A gegen B und C gegen D. Die Mannschaften B und C haben gleiche Punktzahl, aber nur Mannschaft C kann am Ende der Saison Mannschaft A einholen, und zwar durch ein Unentschieden zwischen Mannschaft C und D und einen Sieg von Mannschaft B gegen Mannschaft A.

Aus den NP-Vollständigkeitsresultaten folgt, dass die Berechnung eines Schwellwertes im Falle der s-Punkteregeln für $s > 1$ und $s \neq 2$ NP-hart ist.

3.1 Der Fall $s > 2$

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass das Meisterschaftsproblem unter der s-Punkteregel mit $s > 2$ für eine Saison, die aus einer Runde besteht, sogar bereits dann NP-vollständig ist, wenn nur noch die letzten drei Spieltage ausstehen. In Kapitel 4 wird dieses Resultat dann auf Eingaben mit $k \geq 3$ ausstehenden Spieltagen erweitert. Der Fall, in dem jede Mannschaft nur noch höchstens zwei ausstehende Spiele besitzt, wird sich in Kapitel 5 als Spezialfall eines allgemeineren Resultates als effizient lösbar erweisen.

Theorem 3.1.1. *Für $s \in \mathbb{Q}$ und $s > 2$ ist $(3, 1, s)$-MP NP-vollständig.*

Die NP-Vollständigkeit wird durch eine polynomielle Reduktion des Problems 4-DM (Vierdimensionales Matching) auf $(3, 1, s)$-MP gezeigt. Das Problem 4-DM lässt sich analog zum wohl bekannten NP-vollständigen Problem 3-DM (Dreidimensionales Matching) definieren. Für vier paarweise disjunkte Mengen W, X, Y und Z mit je q Elementen und einer Teilmenge $M \subseteq W \times X \times Y \times Z$ ist zu entscheiden, ob M ein vierdimensionales Matching enthält, d.h. ob es genau q 4-Tupel in M gibt, die jedes Element in W, X, Y und Z überdecken. Einen Beweis der NP-Vollständigkeit von 3-DM findet man beispielsweise in Garey und Johnson (1979).

Lemma 3.1.2. *Das Problem 4-DM ist NP-vollständig.*

Beweis. Offensichtlich ist 4-DM in NP enthalten, denn man kann q der 4-Tupel raten und verifizieren, ob diese alle Elemente überdecken. Die NP-Vollständigkeit lässt sich leicht durch eine polynomielle Reduktion des NP-vollständigen Problems 3-DM auf 4-DM zeigen.

Sei eine Eingabe für 3-DM gegeben, d.h. drei paarweise disjunkte Mengen X, Y und Z mit je q Elementen und $M \subseteq X \times Y \times Z$. Daraus wird wie folgt eine Eingabe für 4-DM konstruiert. Sei W eine zu X, Y und Z disjunkte Menge mit q Elementen. Dann sei M' definiert als $M' = W \times M = \{(w, x, y, z) \mid w \in W, (x, y, z) \in M\}$. Diese Konstruktion hat offensichtlich polynomielle Größe.

Sei zunächst angenommen, dass M ein dreidimensionales Matching $C = \{(c_{1,1}, c_{1,2}, c_{1,3}), \ldots, (c_{q1}, c_{q2}, c_{q3})\}$ enthält. Dann ist die Menge $C' = \{(w_1, c_{1,1}, c_{1,2}, c_{1,3}), \ldots, (w_q, c_{q1}, c_{q2}, c_{q3})\}$ ein vierdimensionales Matching von W, X, Y und Z und nach Konstruktion in M' enthalten.

Enthält nun andererseits M' ein vierdimensionales Matching $C' = \{(c_{1,1}, c_{1,2}, c_{1,3}, c_{1,4}), \ldots, (c_{q1}, c_{q2}, c_{q3}, c_{q4})\}$, dann ist $C = \{(c_{1,2}, c_{1,3}, c_{1,4}), \ldots, (c_{q2}, c_{q3}, c_{q4})\}$ ein dreidimensionales Matching von X, Y und Z. Aus der Konstruktion von M' folgt, dass C in M enthalten ist. □

Als Maximalgrad eines Graphen $G = (V, E)$ bezeichnet man den maximalen Grad $\Delta = \Delta(G) = \max_{v \in V} d(v)$ der Knoten in G. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt bipartit, wenn sich die Knotenmenge V in zwei disjunkte Mengen V_1 und V_2 zerlegen lässt, so dass in G nur Knoten aus V_1 mit Knoten aus V_2 adjazent sind. Man nennt dann (V_1, V_2) eine Bipartition von G. Nach einem Satz von König ist bekannt (siehe beispielsweise Volkmann (1996)), dass für jeden bipartiten Graphen G eine Kantenfärbung mit $\Delta(G)$ Farben existiert und dass eine solche in polynomieller Zeit berechnet werden kann.

Für den Beweis von Theorem 3.1.1 wird das folgende Lemma benötigt. Es sei daran erinnert, dass der Komplementärgraph eines Graphen G genau dann eine Kante zwischen zwei Knoten enthält, wenn diese in G nicht adjazent sind. Für einen bipartiten Graphen $G = (V, E)$ mit Bipartition (V_1, V_2) besteht somit die Kantenmenge des Komplementärgraphen aus allen Kanten zwischen unterschiedlichen Knoten aus V_1 bzw. V_2, und den Kanten, die Knoten aus V_1 mit Knoten aus V_2 verbinden und nicht in E enthalten sind.

Lemma 3.1.3. *Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter k-regulärer Graph mit $n = 4l$ Knoten. Dann gibt es für G eine Kantenfärbung mit k Farben und für den Komplementärgraphen von G eine Kantenfärbung mit $n - k - 1$ Farben. Solche Kantenfärbungen können in polynomieller Zeit berechnet werden.*

Beweis. Die Aussage für G folgt direkt aus dem Satz von König.

Sei (V_1, V_2) eine Bipartition von G. Jeder Knoten aus V_1 ist in G zu genau k Knoten aus V_2 adjazent und umgekehrt. Deshalb besitzen beide Knotenmengen die gleiche Mächtigkeit, d.h. $|V_1| = |V_2| = 2l$. Da G ein k-regulärer und bipartiter Graph ist, ist der Graph G' mit Knotenmenge V, der genau die Kanten enthält, die Knoten aus V_1 mit Knoten aus V_2 verbinden und nicht in E enthalten sind, ebenso bipartit und $(2l - k)$-regulär. Also kann nach dem Satz von König für G' eine Kantenfärbung mit $2l - k$ Farben in polynomieller Zeit berechnet werden. Wie bereits in Abschnitt 2.1 erwähnt, kann für vollständige Graphen mit gerader Knotenanzahl $2l$ eine Kantenfärbung mit $2l - 1$ Farben in polynomieller Zeit berechnet werden. Also kann insgesamt für den Komplementärgraphen von G eine Kantenfärbung mit $(2l - 1) + (2l - k) = n - k - 1$ Farben in polynomieller Zeit berechnet werden. □

Beweis von Theorem 3.1.1. Offensichtlich ist $(3,1,s)$-MP in NP enthalten, denn es kann eine Festlegung der noch ausstehenden Spiele geraten werden und in polynomieller Zeit überprüft werden, ob für diese Festlegung Mannschaft 1 Meister ist. Die NP-Vollständigkeit wird durch eine polynomielle Reduktion des nach Lemma 3.1.2 NP-vollständigen Problems 4-DM auf $(3,1,s)$-MP gezeigt. Zu jeder Eingabe für 4-DM, d.h. vier paarweise disjunkten Mengen W, X, Y und Z mit je q Elementen und $M \subseteq W \times X \times Y \times Z$, ist eine Eingabe für $(3,1,s)$-MP zu konstruieren, für die Mannschaft 1 genau dann Meister werden kann, wenn M ein vierdimensionales Matching enthält. O.B.d.A. wird eine Eingabe konstruiert, in der Mannschaft 1 bereits ihre Spiele an den letzten drei Spieltagen gewonnen hat.

Nach den Überlegungen aus Abschnitt 2.2 wird dazu ein Potential-Graph G konstruiert, in dem genau dann durch Anwendung der Flussregel alle Knoten deaktiviert werden können, wenn M ein vierdimensionales Matching enthält. Der zu Mannschaft 1 gehörige Knoten 1 ist in G zu keinem Knoten adjazent und G muss drei Knoten v_1, v_2 und v_3 mit Grad 2 enthalten, so dass G mit den drei Kanten $e_1 := \{1, v_1\}$, $e_2 := \{1, v_2\}$ und $e_3 := \{1, v_3\}$ zusammen 3-regulär ist. Die Kanten e_1, e_2 und e_3 entsprechen den letzten drei Spielen von Mannschaft 1 und sind nicht in G enthalten. Die Kanten von G entsprechen den ausstehenden Spielen. Die Konstruktion des Potential-Graphen wird so durchgeführt, dass er zudem zusammen mit den Kanten e_1, e_2 und e_3 bipartit ist und die Knotenanzahl ein Vielfaches von 4 ist. Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 3.1.3 erfüllt und es folgt, dass ein Spielplan existiert, so dass die ausstehenden Spiele zusammen mit den Spielen, die den Kanten e_1, e_2 und e_3 entsprechen, den letzten drei Spieltagen dieses Spielplans entsprechen und dass ein solcher Spielplan in polynomieller Zeit berechnet werden kann. Um schließlich aus dem Potential-Graphen eine Eingabe für $(3,1,s)$-MP zu erhalten, muss eine Festlegung der bereits ausgetragenen Spiele, das sind die Spiele, die den Kanten des Komplementärgraphen von G entsprechen, angegeben werden, so dass sich die Potentialwerte der einzelnen Knoten ergeben. Für eine solche Eingabe gilt dann, dass Mannschaft 1 genau dann Meister werden kann, wenn M ein vierdimensionales Matching enthält.

Indem die Mengen W, X, Y und Z um jeweils die gleiche Anzahl zusätzlicher Elemente erweitert werden, so dass sie weiterhin paarweise disjunkt sind, und zu M die gleiche Anzahl geeigneter 4-Tupel zur Überdeckung der neuen Elemente hinzugefügt wird, kann o.B.d.A. angenommen werden, dass q eine Zweierpotenz mit geradem Exponenten, d.h. eine Potenz von Vier ist. Durch

Vervielfältigung von 4-Tupeln in M kann o.B.d.A. angenommen werden, dass M aus l 4-Tupeln besteht, $M = (m_1, \ldots, m_l)$, wobei l eine Zweierpotenz und $l \geq 4q$ ist.

Im Folgenden sind alle Knoten entweder schwarz oder weiß gefärbt. Der Potential-Graph wird so konstruiert, dass keine Kante zwischen zwei weißen oder zwischen zwei schwarzen Knoten verläuft. Damit ist der Graph bipartit. Knoten mit Potential x seien im Folgenden als x-Knoten bezeichnet. Für die Konstruktion werden hauptsächlich vier unterschiedliche Knotentypen verwendet, die gewisse Eigenschaften besitzen sollen: $(2 - s)$-Knoten, $(1 - s)$-Knoten, 1-Knoten und α-Knoten mit $\alpha = 0$ für $2 < s \leq 3$ und $\alpha = 3 - s$ für $s > 3$. Diese Knoten sind mit Ausnahme der 1-Knoten passiv. Alle Knoten werden im Folgenden höchstens Grad drei haben. Nimmt ein $(2-s)$-Knoten über eine Kante Potential auf, so hat er Potential 1. Gibt er dann wieder Potential ab, hat er Potential 0, ist also wieder passiv. Nimmt der Knoten ein weiteres Mal Potential auf, ist er aktiv und kann nicht mehr deaktiviert werden, da schon alle drei Kanten benutzt worden sind. Damit besitzen $(2 - s)$-Knoten die Eigenschaft „Aktivität“ weiter zu geben. Ein α-Knoten hat je nach Wert von s nach Potentialaufnahme ein Potential von $(s - 1)$ bzw. 2. In beiden Fällen muss der Knoten über beide restlichen Kanten Potential abgeben, um passiv zu werden, da $s - 1 > 1$ ist. Dieses gelingt auch für $2 < s \leq 3$, denn dann ist $(s - 1) - 2 = s - 3 \leq 0$. Die α-Knoten dienen der Verdopplung von Aktivität. Ein $(1-s)$-Knoten kann genau einmal Potential aufnehmen, denn dann besitzt er Potential 0. Nach einer weiteren Potentialaufnahme kann der Knoten nicht mehr deaktiviert werden. Ein 1-Knoten hat nach Potentialabgabe Potential 0 und kann dann ebenso nicht mehr verwendet werden.

Der Potential-Graph enthält eine Komponente J, die aus $\log q + 1$ Ebenen besteht, siehe Abbildung 3.1.1, wobei $\log q$ der Logarithmus von q zur Basis 2 ist. Jede Ebene i, $i = 0, \ldots, \log q$, besteht aus einem Kreis von $2^{i+1} \cdot l/q$ Knoten, die abwechselnd schwarz und weiß gefärbt sind und Potential $2 - s$ besitzen, mit der Ausnahme, dass genau ein schwarzer Knoten der Ebene 0 Potential 1 hat. Dieser Knoten wird der einzige Knoten im Potential-Graphen sein, der zu Beginn aktiv ist. Die schwarzen Knoten einer Ebene mit gerader Nummer $2j$ sind jeweils mit einem weißen α-Knoten und dieser mit je zwei schwarzen Knoten der nächsten Ebene $2j + 1$ verbunden. Entsprechendes gilt für Ebenen mit ungerader Nummer bei vertauschten Farben. Offensichtlich verläuft keine Kante zwischen Knoten gleicher Farbe. Von den l Knoten der Ebene $\log q$, die so mit der nächsten Ebene verbunden wären, geht jeweils eine

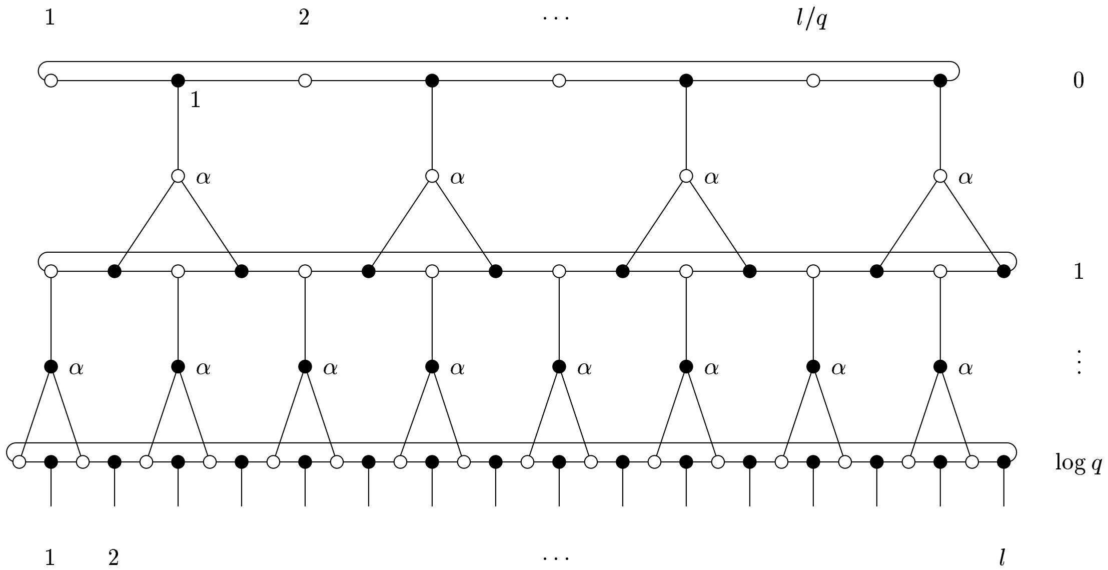

Abbildung 3.1.1: *Komponente J für $q = 4$ und $l = 16$. Alle Knoten ohne angegebene Bewertung haben Potential $2 - s$. Für $2 < s \leq 3$ ist $\alpha = 0$ und für $s > 3$ ist $\alpha = 3 - s$.*

Kante aus der Komponente hinaus. Da nach Annahme $\log q$ gerade ist, sind diese Knoten schwarz. Aus den Eigenschaften der Knotentypen folgt, dass der 1-Knoten in Ebene 0 nur dadurch deaktiviert werden kann, dass doppelt so viele Knoten der nächsten Ebene aktiviert werden. Allgemein gilt, dass sich die Anzahl aktiver Knoten bei Deaktivierung von Ebene zu Ebene verdoppelt. Da die Komponente aus $\log q + 1$ Ebenen besteht, muss über q der l Kanten, die aus der Komponente hinausgehen, Potential abgegeben werden, um alle Knoten der Komponente zu deaktivieren. Betrachtet man diesen Fluss der Aktivität nachträglich „rückwärts", von der untersten Ebene zur obersten, so sieht man leicht ein, dass dazu jede der $\binom{l}{q}$ möglichen Kombinationen von q der l Kanten gewählt werden kann. (Dieses wird der Auswahl von q 4-Tupeln aus M entsprechen.) Man beachte, dass alle Knoten dieser Komponente, bis auf die l/q weißen Knoten der Ebene 0, Grad 3 besitzen.

Für jedes 4-Tupel m_i aus M gibt es eine Komponente I_{m_i}, wie in Abbildung 3.1.2 dargestellt ist. Es verläuft keine Kante zwischen Knoten gleicher Farbe, alle Knoten haben Grad 3 und sind passiv. Aus der Eigenschaft von α-Knoten, Aktivität zu verdoppeln, folgt, dass eine I-Komponente bei Potentialaufnahme über die anderen vier Kanten, die aus der Komponente hinausführen, jeweils Potential abgeben muss, um alle Knoten der Komponente zu deaktivieren. Diese Komponente vervierfacht also Aktivität.

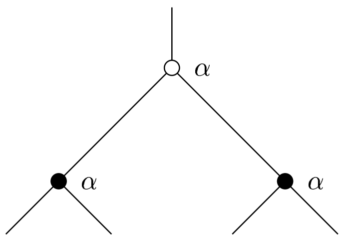

Abbildung 3.1.2: *Eine I-Komponente. Für $2 < s \leq 3$ ist $\alpha = 0$ und für $s > 3$ ist $\alpha = 3 - s$.*

Für jedes Element v aus $W \cup X \cup Y \cup Z$ gibt es eine Komponente H_v wie in Abbildung 3.1.3 dargestellt ist. Diese Komponente besteht aus einem Kreis von $2d(v)$ abwechselnd schwarzen und weißen Knoten. Dabei ist $d(v)$ die Anzahl der 4-Tupel in M, die v überdecken. Genau ein weißer Knoten hat Potential $1 - s$, alle anderen Knoten besitzen Potential $2 - s$. Offensichtlich verläuft keine Kante zwischen Knoten gleicher Farbe und alle Knoten sind passiv. Die $d(v)$ schwarzen Knoten haben Grad 2 und alle $d(v)$ weißen Knoten besitzen Grad 3, von ihnen führt jeweils eine Kante aus der Komponente hinaus. Aus den Eigenschaften der Knotentypen folgt, dass diese Komponente genau einmal über eine der hinausführenden Kanten Potential aufnehmen kann, ohne wieder über eine solche Kante Potential abgeben zu müssen, um alle Knoten zu deaktivieren.

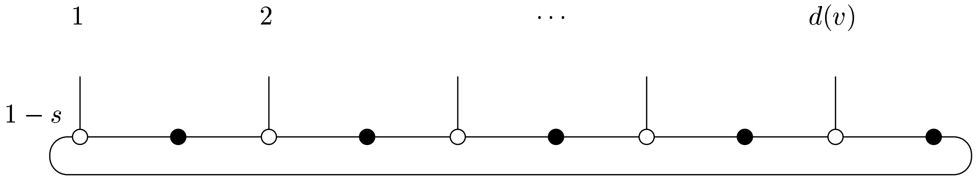

Abbildung 3.1.3: *Eine Komponente H_v mit $d(v) = 5$. Alle Knoten ohne angegebene Bewertung haben Potential $2 - s$.*

Die Komponenten werden wie folgt durch Kanten miteinander verbunden, siehe Abbildung 3.1.4. Die Wurzel jeder I-Komponente wird mit einer der l ausgehenden Kanten von Komponente J verbunden. Jede Komponente I_{m_i}, mit $m_i = (w, x, y, z) \in M$, wird durch die vier ausgehenden Kanten ihrer Blätter mit den Komponenten H_w, H_x, H_y und H_z verbunden. Damit sind jetzt alle Kanten, die aus einer Komponente hinausgehen mit einer anderen Komponente verbunden, denn jede Komponente H_v hat genau so viele ausgehende Kanten, wie es 4-Tupel in M gibt, die das zugehörige Element v überdecken.

Man beachte, dass nach Konstruktion nur verschiedenfarbige Knoten miteinander verbunden werden.

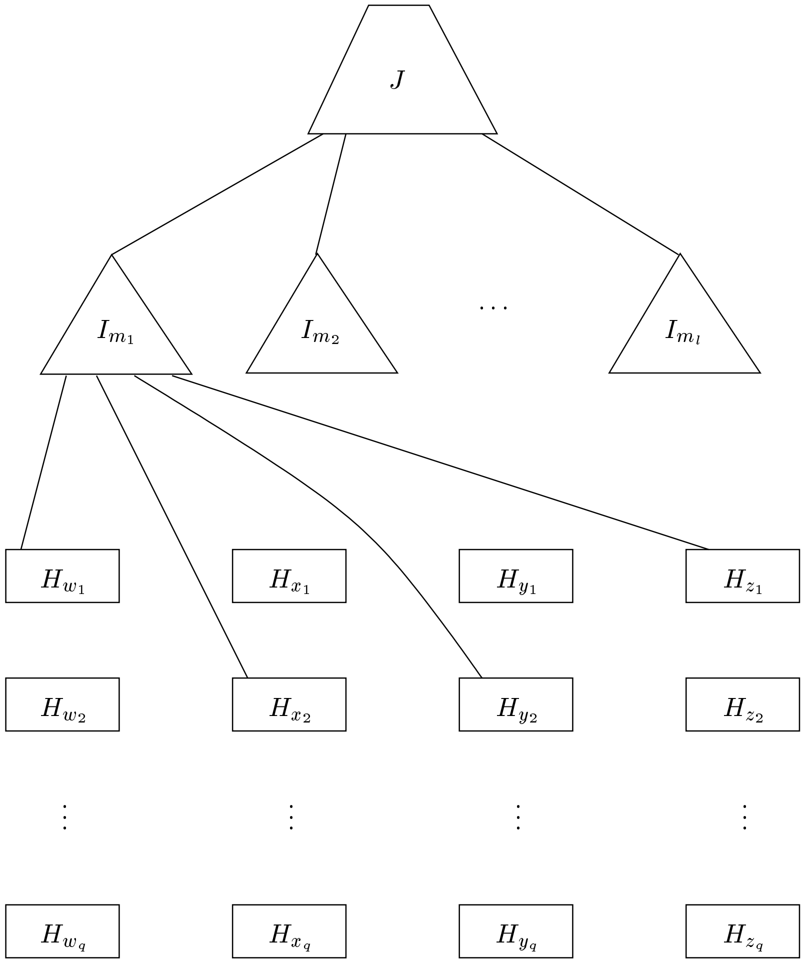

Abbildung 3.1.4: *Verknüpfung der einzelnen Komponenten. Als Beispiel mit* $m_1 = (w_1, x_2, y_2, z_1)$.

Für Mannschaft 1 wird ein schwarzer Knoten 1 mit Potential 0 eingefügt, der keine ausgehenden Kanten besitzt. Die dazu gehörigen drei Knoten v_1, v_2 und v_3 mit Grad 2 seien drei weiße Knoten der Ebene 0 von Komponente J. (Man beachte, nach Annahme ist $l/q \geq 4$.)

Die Konstruktion des Potential-Graphen ist noch nicht abgeschlossen, denn der bisher konstruierte Potential-Graph ist zusammen mit den Kanten e_1, e_2 und e_3 noch nicht 3-regulär, einige Knoten haben nur Grad 2, und es ist nicht sichergestellt, dass die Knotenanzahl ein Vielfaches von Vier ist, was eine notwendige

Voraussetzung für die Anwendung von Lemma 3.1.3 ist. Trotzdem wird jetzt zunächst gezeigt, dass in dem bisher konstruierten Potential-Graphen genau dann jeder Knoten deaktiviert werden kann, wenn M ein vierdimensionales Matching enthält. Weitere Knoten und Kanten werden dann später so in den Graphen eingefügt, dass diese Äquivalenz gültig bleibt.

Angenommen es gibt ein vierdimensionales Matching $C = \{c_1, \ldots, c_q\}$ in M. Dann lässt sich das Potential aller Knoten wie folgt durch Anwendungen der Flussregel auf 0 oder weniger senken. Zu Beginn befindet sich der einzige aktive Knoten in Komponente J. In dieser Komponente kann jeder Knoten deaktiviert werden, indem an q der I-Komponenten Potential abgegeben wird. Dabei werden die Komponenten $I_{c_1}, \ldots, I_{c_q}$ gewählt, die dem Matching C entsprechen. Jede I-Komponente kann deaktiviert werden, indem an die vier zugehörigen H-Komponenten Potential abgegeben wird. Da C ein vierdimensionales Matching in M ist, nimmt jede H-Komponente nur einmal Potential auf. Damit sind alle Knoten passiv.

Sei jetzt andererseits angenommen, dass es eine Festlegung aller ausstehenden Spiele gibt, für die Mannschaft 1 Meister ist, d.h. alle Knoten können durch Anwendungen der Flussregel deaktiviert werden. Dieses kann nur dadurch geschehen, dass q der I-Komponenten ausgewählt werden, die jeweils Potential von Komponente J aufnehmen. Jede I-Komponente muss notwendiger Weise an die vier zugehörigen H-Komponenten Potential abgeben. Nimmt jede H-Komponente nur einmal Potential auf, so entsprechen die gewählten I-Komponenten nach Konstruktion einem vierdimensionalen Matching in M. Falls eine H-Komponente zweimal Potential aufnimmt, so muss sie notwendiger Weise wieder an eine I-Komponente Potential abgeben. Diese muss dann an drei weitere H-Komponenten Potential abgeben. Damit hat sich die Situation ergeben, dass insgesamt $(4q+2)$-mal Potential an H-Komponenten abgegeben wird. Es gibt aber nur $4q$ H-Komponenten und jede H-Komponente kann nur über genau eine Kante Potential aufnehmen, ohne wieder Potential abgeben zu müssen. Das ist ein Widerspruch zur Annahme.

Als nächstes werden zusätzliche Knoten und Kanten in den Potential-Graphen eingefügt, so dass alle Knoten bis auf die Knoten 1, v_1, v_2 und v_3 Grad 3 besitzen. Noch $l/q - 3$ weiße Knoten der Ebene 0 von Komponente J und die insgesamt $4q$ schwarzen Knoten der H-Komponenten haben Grad 2 und müssen somit eine zusätzliche Kante erhalten. Für je drei weiße bzw. schwarze Knoten wird ein schwarzer bzw. weißer Knoten mit Potential 3 eingefügt, mit dem diese jeweils durch eine Kante verbunden werden. Ein 3-Knoten muss jeweils über alle drei Kanten Potential abgeben, deshalb wird nachträglich das Potential der drei zu ihm adjazenten Knoten neu definiert, auf den alten Wert $2-s$ plus $1-s$, also auf $3-2s$. Nach der Potentialaufnahme haben diese Knoten damit wieder ihren alten Wert und die oben gezeigte Äquivalenz bleibt gültig. Jetzt gibt es noch l/q mod 3 weiße und $4l$ mod 3 schwarze Knoten mit Grad 2. Nach Annahme ist q eine Potenz von Vier und, da $4 \equiv 1$ mod 3 ist, folgt $4l \equiv l/q$ mod 3. Es sind also gleich viele schwarze und weiße Knoten mit Grad 2 übrig. Je zwei verschieden farbige Knoten davon werden durch eine Komponente, wie in Abbildung 3.1.5 dargestellt ist, verknüpft. Ein weißer

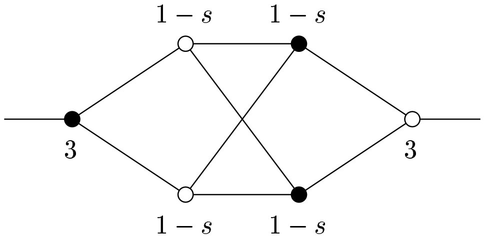

Abbildung 3.1.5: *Komponente zur Erhöhung des Knotengrades zweier verschieden farbiger Knoten.*

Knoten wird mit dem schwarzen 3-Knoten der Komponente und ein schwarzer entsprechend mit dem weißen 3-Knoten verbunden. Offensichtlich verläuft keine Kante zwischen Knoten gleicher Farbe und alle Knoten besitzen Grad 3. Wie oben wird nachträglich das Potential der durch die Komponente verbundenen Knoten neu definiert zu $3-2s$. Geben die beiden 3-Knoten das Potential ab, haben alle Knoten in der Komponente Potential 0. Über die Komponente kann kein Potential fließen, somit bleibt die oben gezeigte Äquivalenz weiterhin gültig.

Der bisher konstruierte Potential-Graph sei $G_1 = (V_1, E_1)$. Der Graph G_1 ist zusammen mit den Kanten e_1, e_2 und e_3 jetzt 3-regulär und bipartit und es kann in G_1 genau dann jeder Knoten deaktiviert werden, wenn M ein vierdimensionales Matching enthält. D.h. in einer Eingabe für $(3, 1, s)$-MP, deren zugehöriger Potential-Graph gleich dem Potential-Graphen G_1 ist, kann Mannschaft 1 genau dann Meister werden, wenn M ein vierdimensionales Matching enthält. Um eine solche Eingabe für $(3, 1, s)$-MP zu erhalten, ist eine Festlegung der ausgetragenen Spiele anzugeben, für die sich die Potentialwerte der einzelnen Knoten ergeben. Dazu werden zunächst weitere Knoten und Kanten in den Potential-Graphen eingefügt: Der endgültige Potential-Graph G bestehe aus G_1 und einer knotendisjunkten Kopie $G_2 = (V_2, E_2)$ von G_1, die zudem die

Kopien der Kanten e_1, e_2 und e_3 enthält. Zwischen dem Original G_1 und der Kopie G_2 verläuft keine Kante. Die Potentialwerte der Knoten in V_2 werden im Weiteren näher bestimmt. Die Potentialwerte dieser Knoten werden nicht größer als 0 sein, und da keine Kante zwischen diesen Knoten und den Knoten in V_1 verläuft, bleib die Äquivalenz weiterhin gültig, dass genau dann jeder Knoten deaktiviert werden, wenn M ein vierdimensionales Matching enthält.

Da G_1 mit den Kanten e_1, e_2 und e_3 bipartit und 3-regulär ist, gilt dieses auch für G und es folgt folgt wie im Beweis von Lemma 3.1.3, dass $n := |V_1|$ gerade ist und somit die Knotenanzahl von G ein Vielfaches von 4 ist. Damit sind jetzt auch alle Voraussetzungen von Lemma 3.1.3 erfüllt, d.h. es kann in polynomieller Zeit ein Spielplan berechnet werden, so dass die ausstehenden Spiele zusammen mit den Spielen, die den Kanten e_1, e_2 und e_3 entsprechen, den letzten drei Spieltagen dieses Spielplans entsprechen.

Es wird jetzt eine Festlegung der ausgetragenen Spiele angegeben, für die sich die Potentialwerte der einzelnen Knoten ergeben. In V_2 sei eine Menge U von 6 Knoten ausgezeichnet. Die ausgetragenen Spiele von Mannschaften in V_1 gegen Mannschaften in $V_2 \backslash U$ werden als Siege für die Mannschaften in V_1 festgelegt und die ausgetragenen Spiele gegen Mannschaften in U werden abhängig vom Knotentyp, wie in Tabelle 3.1.1 angegeben, festgelegt, siehe unten. Die drei Spiele von Mannschaft 1 gegen die Mannschaften v_1, v_2 und v_3 werden wie vereinbart als Siege für Mannschaft 1 festgelegt. Die ausgetragenen Spiele von Mannschaften in $V_2 \backslash U$ gegen Mannschaften in U werden als Siege für die Mannschaften in $V_2 \backslash U$ festgelegt. Alle weiteren ausgetragenen Spiele werden als Unentschieden festgelegt. Die noch ausstehenden Spiele sind gemäß Potential-Graph Darstellung als Unentschieden festgelegt. Es folgt die Berechnung der einzelnen Potentialwerte:

Mannschaften in $V_1 \backslash \{1, v_1, v_2, v_3\}$ erhalten für die jeweils $n - 4$ ausgetragenen Spiele gegen Mannschaften in V_1 und für die $n - 6$ Siege gegen Mannschaften in $V_2 \backslash U$ jeweils $p := n - 4 + (n - 6)s$ Punkte und für die jeweils drei ausstehenden Spiele 3 Punkte, insgesamt in den Spielen gegen Mannschaften in $V_1 \cup V_2 \backslash U$ also $p + 3$ Punkte. Mannschaft 1 besitzt keine ausstehenden Spiele, sie gewinnt die drei Spiele gegen die Mannschaften v_1, v_2 und v_3 und erhält in den Spielen gegen Mannschaften in $V_1 \cup V_2 \backslash U$ also $p + 3s$ Punkte. Die Mannschaften v_1, v_2 und v_3 erhalten in den Spielen gegen Mannschaften in $V_1 \cup V_2 \backslash U$ dementsprechend $p + 2$ Punkte. Die gewünschten Potentialwerte ergeben sich durch die geeignete Festlegung der Spiele gegen die Mannschaften in U, siehe Tabelle 3.1.1.

Knotentyp	Punkte gegen Mannschaften in $V_1 \cup V_2 \backslash U$	Punkte gegen Mannschaften in U	Punkte insgesamt	Potential
Mannschaft 1	$p + 3s$	$0 \cdot s + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 0$	$p + 3 + 3s$	0
0-Knoten	$p + 3$	$3 \cdot s + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0$	$p + 3 + 3s$	0
1-Knoten	$p + 3$	$3 \cdot s + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0$	$p + 4 + 3s$	1
3-Knoten	$p + 3$	$3 \cdot s + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0$	$p + 6 + 3s$	3
$(1 - s)$-Knoten	$p + 3$	$2 \cdot s + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0$	$p + 4 + 2s$	$1 - s$
$(2 - s)$-Knoten	$p + 3$	$2 \cdot s + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0$	$p + 5 + 2s$	$2 - s$
Knoten v_1, v_2, v_3	$p + 2$	$2 \cdot s + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0$	$p + 5 + 2s$	$2 - s$
$(3 - s)$-Knoten	$p + 3$	$2 \cdot s + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0$	$p + 6 + 2s$	$3 - s$
$(3 - 2s)$-Knoten	$p + 3$	$1 \cdot s + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0$	$p + 6 + s$	$3 - 2s$

Tabelle 3.1.1: *Die Einstellung der Potentialwerte der Mannschaften in V_1.*

Mannschaften in $V_2 \backslash U$ erhalten nur Punkte durch die Spiele gegen Mannschaften in V_2. Das sind nach Festlegung also höchstens $n - 1 + 6s$ Punkte.

Mannschaften in U erhalten für Unentschieden untereinander und in ausstehenden Spielen gegen Mannschaften in $V_2 \backslash U$ höchstens 8 Punkte. Wie aus Tabelle 3.1.1 ersichtlich, erhalten die Mannschaften in U zusammen pro Mannschaft in V_1 höchstens 3 Siege und 3 Unentschieden. Werden diese insgesamt gleichmäßig auf die 6 Mannschaften in U verteilt, so erhält jede Mannschaft in U dadurch höchstens $n/2$ Siege und $n/2$ Unentschieden in den jeweils n Spielen gegen Mannschaften in V_1. Damit besitzen alle Mannschaften in U maximal $n/2 \cdot s + n/2 + 8$ Punkte.

Mannschaft 1 besitzt mit obiger Festlegung insgesamt $p+3+3s = n-1+(n-3)s$ Punkte, siehe Tabelle 3.1.1. Wie man leicht verifiziert hat für $n \geq 12$ keine Mannschaft in V_2 mehr Punkte als Mannschaft 1, d.h. keine Mannschaft in V_2 hat ein Potential größer als 0. Mannschaften in V_2 haben somit für die Beantwortung der Frage, ob Mannschaft 1 Meister werden kann, keine Bedeutung.

Mit dieser Festlegung der ausgetragenen Spiele besitzen die Mannschaften in V_1 im zugehörigen Potential-Graphen das gewünschte Potential. Die Reduktion ist offensichtlich polynomiell. □

Man beachte, dass der im Beweis von Theorem 3.1.1 konstruierte Graph lineare Größe besitzt, d.h. aus $O(l)$ Knoten und Kanten besteht, wobei l die Anzahl 4-Tupel in der Eingabe für 4-DM bezeichnet. Damit besitzt die konstruierte

Eingabe für $(3, 1, s)$-MP natürlich quadratische Größe. Nach Schrijver (1998) kann für bipartite Graphen $G = (V, E)$ eine Kantenfärbung mit $\Delta(G)$ Farben sogar in Zeit $O(\Delta(G) \cdot |E|)$ berechnet werden. Damit kann für die ausstehenden Spieltage ein Spielplan in linearer Zeit berechnet werden. Cole und Hopcroft (1982) haben einen Algorithmus zur Kantenfärbung von bipartiten Graphen in Zeit $O(|E| \log |E|)$ angegeben. Damit kann für die bereits ausgetragenen Spieltage ein Spielplan in Zeit $O(l^2 \log l)$ berechnet werden. Die Reduktion kann insgesamt also in Zeit $O(l^2 \log l)$ durchgeführt werden.

Da $(3, 1, s)$-MP ein Spezialfall von s-MP und dieses ein Spezialfall von MP ist, ergeben sich aus Theorem 3.1.1 unmittelbar die beiden folgenden Korollare.

Korollar 3.1.4. *Für $s \in \mathbb{Q}$ und $s > 2$ ist s-MP NP-vollständig.*

Korollar 3.1.5. *MP ist NP-vollständig.*

Die NP-Vollständigkeit von 3-MP wird auch in Bernholdt, T., Gülich, A., Hofmeister, T. und Schmitt, N. (1999) gezeigt. Dabei dient das Problem 3-SAT als Ausgangsproblem für den Reduktionsbeweis.

3.2 Der Fall $1 < s < 2$

Die Resultate aus Abschnitt 3.1 gelten auch für den Fall $1 < s < 2$:

Theorem 3.2.1. *Für $s \in \mathbb{Q}$ und $1 < s < 2$ ist $(3, 1, s)$-MP NP-vollständig.*

Der Beweis von Theorem 3.1.1 kann auf diesen Fall übertragen werden. Der wesentliche Unterschied zum Fall mit $s > 2$ besteht darin, dass bei Anwendung der Flussregel sich das Potential der Mannschaft, die das Spiel gewinnt, jetzt nur um weniger als 1 Punkt erhöht. Es wird gezeigt, dass auch im Fall $1 < s < 2$ alle Knotentypen, die für den Beweis von Theorem 3.1.1 benötigt werden, konstruiert werden können. Im obigen Beweis werden beispielsweise Knoten benötigt, die die Eigenschaft besitzen, Aktivität zu verdoppeln, d.h. bei Potentialaufnahme, über die beiden anderen Kanten wieder Potential abgeben zu müssen, um passiv zu sein. Ein 0-Knoten ist ein passiver Knoten mit maximalem Potential. Aber im Fall $1 < s < 2$ besitzt dieser nach einer Potentialaufnahme und anschließender Abgabe ein Potential von weniger als 0, da $0 + (s - 1) - 1 < 0$ ist. Für $1 < s < 2$ kann also kein Knoten ohne weiteres die Aufgabe eines Knotens zur Verdopplung von Aktivität im obigen

Beweis übernehmen. Ähnliches gilt im Fall $1 < s \leq 3/2$ für Knoten, die im obigen Beweis der Weitergabe von Aktivität dienen. Selbst ein 0-Knoten ist hier nach Potentialabgabe und zweimaliger Potentialaufnahme wieder passiv: $0-1+2(s-1) = 2s-3 \leq 0$. Ein Ausweg besteht darin, bestimmte Knotentypen durch geeignete Konstruktionen aus mehr als einem Knoten zu ersetzen.

Beweis von Theorem 3.2.1. Es wird gezeigt, dass für den Fall $1 < s < 2$ alle Knotentypen, die im Beweis von Theorem 3.1.1 verwendet werden, durch geeignete Konstruktionen ersetzt werden können. Damit überträgt sich der Beweis automatisch auf diesen Fall.

Keine Probleme bereiten 1-, 3- und $(1-s)$-Knoten, diese können unverändert in der Konstruktion belassen werden. Ein 1-Knoten muss einmal Potential abgeben, um passiv zu werden, und hat dann mit Potential 0 die Eigenschaft Aktivität weiterzugeben. Man beachte dabei, dass Kanten nur einmal verwendet werden dürfen. Auch ein $(1-s)$-Knoten hat nach Potentialaufnahme Potential 0 und muss nach einer weiteren Potentialaufnahme wieder Potential abgeben, um passiv zu sein.

Knoten mit der Eigenschaft Aktivität zu verdoppeln und Knoten mit der Eigenschaft Aktivität weiterzugeben werden im Beweis von Theorem 3.1.1 jeweils durch eine geeignete Komponente aus mehr als einem Knoten ersetzt. Damit die Bipartität und 3-Regularität des Graphen erhalten bleibt, besitzen alle Knoten einer Komponente Grad 3 und es verbindet keine Kante zwei Knoten gleicher Farbe. Eine Komponente besitzt genau 3 Kanten nach außen, die von Knoten derselben Farbe ausgehen. Mit diesen Kanten wird eine Komponente mit den Knoten verbunden, zu denen der zu ersetzende Knoten adjazent ist. Abhängig von der Farbe des zu ersetzenden Knotens werden die Farben der Knoten einer Komponente vertauscht. Die unten angegebenen Komponenten erfüllen offensichtlich diese Eigenschaften.

Für $1 < s \leq 3/2$ sei $\beta = 0$ und für $3/2 < s < 2$ sei $\beta = 3-2s$. Ein β-Knoten ist passiv und nach Potentialaufnahme aktiv, da $(3-2s)+(s-1) > 0$ ist. Nach zweimaliger Potentialaufnahme kann dieser durch nur eine Potentialabgabe deaktiviert werden, denn es ist $(3-2s)+2(s-1)-1 = 0$ und im Fall $1 < s \leq 3/2$ gilt $0+2(s-1)-1 = 2s-3 \leq 0$. Ein solcher Knoten besitzt also die Eigenschaft Aktivität zu „halbieren“. Dieser Knotentyp wird für die folgende Konstruktion benötigt.

Ein Knoten mit der Eigenschaft Aktivität zu verdoppeln, kann durch eine Komponente, wie in Abbildung 3.2.1 dargestellt ist, simuliert werden. Gibt

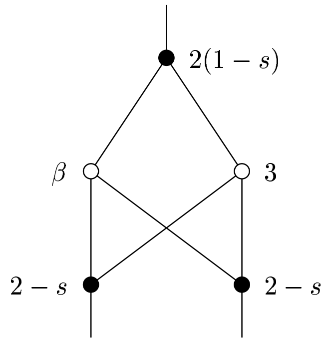

Abbildung 3.2.1: *Komponente zur Simulation von Knoten, die Aktivität verdoppeln. Für* $1 < s \leq 3/2$ *ist* $\beta = 0$ *und für* $3/2 < s < 2$ *ist* $\beta = 3 - 2s$.

der 3-Knoten sein Potential ab, hat der obere schwarze Knoten Potential $1-s$ und die unteren beiden besitzen Potential 1. Falls nun der schwarze Knoten mit Potential $1-s$ von außen Potential aufnimmt, besitzt er Potential 0 und kann kein weiteres Mal Potential aufnehmen. Die beiden unteren Knoten mit Potential 1 müssen in diesem Fall jeweils Potential nach außen abgeben, damit alle Knoten der Komponente passiv sind. Dieses entspricht der „Verdopplungs-Eigenschaft“. Falls andererseits der schwarze Knoten mit Potential $1-s$ kein Potential von außen aufnimmt, kann dieser vom β-Knoten Potential aufnehmen. Aus der Eigenschaft des β-Knotens folgt, dass dieser dann das Potential beider 1-Knoten aufnehmen kann. Damit sind alle Knoten passiv. Dieses entspricht der Eigenschaft eines α-Knotens im Beweis von Theorem 3.1.1, passiv zu sein. Durch die angegebene Komponente können also die α-Knoten im Beweis von Theorem 3.1.1 ersetzt werden. Man beachte, dass keiner der unteren beiden Knoten, nach einer Potentialaufnahme von außen, deaktiviert werden kann.

Ein Knoten mit der Eigenschaft Aktivität weiterzugeben, kann durch eine Komponente, wie in Abbildung 3.2.2 dargestellt ist, simuliert werden. Gibt der 3-Knoten sein Potential ab, besitzen die weißen Knoten Potential $1-s$, diese können dann genau einmal Potential aufnehmen. Nimmt einer der schwarzen Knoten von außen Potential auf, so muss dieser an beide adjazenten Knoten Potential abgeben, um passiv zu sein. Notwendiger Weise muss in diesem Fall einer der beiden anderen 1-Knoten Potential nach außen abgeben, um alle Knoten der Komponente zu deaktivieren. Dieses entspricht der Eigenschaft Aktivität weiterzugeben. Nimmt keiner der schwarzen Knoten von außen Potential auf, so können offensichtlich alle Knoten der Komponente deaktiviert werden, ohne dass Potential nach außen abgegeben wird. Dieses entspricht der

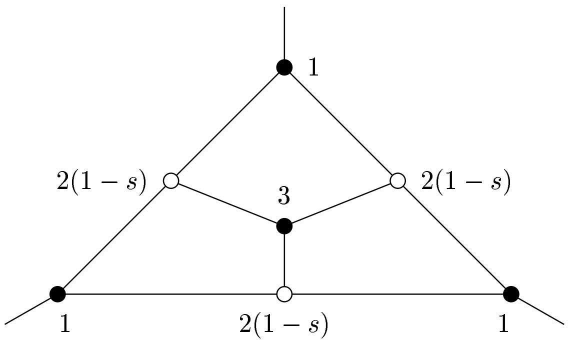

Abbildung 3.2.2: *Komponente zur Simulation von Knoten, die Aktivität weitergeben.*

Eigenschaft eines $(2-s)$-Knotens im Beweis von Theorem 3.1.1 passiv zu sein. Durch die beschriebene Komponente können also die $(2-s)$-Knoten im Beweis von Theorem 3.1.1 ersetzt werden.

Die Knoten v_1, v_2 und v_3 aus dem Beweis von Theorem 3.1.1 sollen Aktivität weiterleiten können. Da diese nur Grad 2 besitzen, können sie im Fall $1 < s < 2$ jeweils durch einen Knoten mit Potential 0 ersetzt werden.

Die weißen Knoten der Ebene 0 der J-Komponente und die schwarzen Knoten der H-Komponenten, deren Potential nachträglich auf $3-2s$ definiert wurde, können durch $(1-s)$-Knoten ersetzt werden. Sie müssen notwendiger Weise einmal Potential eines 3-Knotens aufnehmen. Sie haben dann Potential 0 und damit die Eigenschaft Aktivität weiterzugeben.

Abschließend muss für den einzigen neuen Knotentyp mit Potential $2(1-s)$ und die Knoten v_1, v_2 und v_3 angegeben werden, wie deren Potential durch die Festlegung der ausgetragenen Spiele eingestellt werden kann. Dazu reicht es in Tabelle 3.1.1 eine Zeile zu ändern und eine neue einzufügen:

Knotentyp	Punkte gegen Mannschaften in $V_1 \cup V_2 \backslash U$	Punkte gegen Mannschaften in U	Punkte insgesamt	Potential
Knoten v_1, v_2, v_3	$p+2$	$3 \cdot s + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0$	$p+3+3s$	0
$(2-2s)$-Knoten	$p+3$	$1 \cdot s + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0$	$p+5+s$	$2-2s$

□

Es folgt unmittelbar

Korollar 3.2.2. *Für $s \in \mathbb{Q}$ und $1 < s < 2$ ist s-MP NP-vollständig.*

3.3 Der Fall $s \leq 1$

Der Fall $s = 1$ lässt sich auf das Baseball Elimination Problem zurückführen. Da bei einem Unentschieden beide beteiligten Mannschaften 1 Punkt erhalten, bei einem Sieg jedoch nur eine Mannschaft 1 Punkt, kann o.B.d.A. angenommen werden, dass Mannschaft 1 alle ausstehenden Spiele gewinnt und alle restlichen ausstehenden Spiele ohne Beteiligung von Mannschaft 1 einen Sieger haben. Das entspricht genau der Situation beim Baseball Elimination Problem. Nach den Bemerkungen in Kapitel 1 kann das Problem für $s = 1$ also in polynomieller Zeit gelöst werden.

Es wird nun der Fall $s < 1$ betrachtet. Es sei eine Eingabe für s-MP gegeben, in der Mannschaft 1 keine ausstehenden Spiele besitzt und es seien $w_1, \ldots, w_n$ die Punkte der einzelnen Mannschaften. Da bei einem Unentschieden beide beteiligten Mannschaften einen Punkt erhalten, bei einem Sieg jedoch nur eine Mannschaft $s < 1$ Punkte erhält, kann o.B.d.A. angenommen werden, dass alle ausstehenden Spiele einen Sieger haben. Damit Mannschaft 1 Meister ist, darf jede Mannschaft j höchstens $\lfloor (w_1 - w_j)/s \rfloor$-mal gewinnen. Ist einer dieser Werte negativ, kann Mannschaft 1 offensichtlich nicht mehr Meister werden, denn sie hat kein ausstehendes Spiel. Die Situation entspricht jetzt wieder dem Baseball Elimination Problem. Eine entsprechende Eingabe für das Baseball Elimination Problem erhält man, indem die Punkte der einzelnen Mannschaften wie folgt definiert werden:

$$\begin{aligned} p_1 :=& \lceil w_1 \rceil, \\ p_j :=& p_1 - \lfloor (w_1 - w_j)/s \rfloor, \quad j = 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Das folgende Theorem zeigt, dass das Problem auch im allgemeinen Fall, in dem die gefragte Mannschaft noch ausstehende Spiele besitzt, effizient gelöst werden kann.

Theorem 3.3.1. *Für $s \in \mathbb{Q}$ und $s \leq 1$ ist s-MP in polynomieller Zeit entscheidbar.*

Daraus ergibt sich als Spezialfall

Korollar 3.3.2. *Für $s \in \mathbb{Q}$, $s \leq 1$ und $k, r \in \mathbb{N}$ ist (k, r, s)-MP in polynomieller Zeit entscheidbar.*

Beweis von Theorem 3.3.1. Nach der Bemerkung zu Beginn dieses Abschnitts ist nur der Fall $s < 1$ zu betrachten. Es sei eine Eingabe für s-MP gegeben, d.h. die Ergebnisse $w_{ij}^{(l)}$, $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$, $l = 1, \ldots, r$, der einzelnen Spiele für r Runden und n Mannschaften. Wie oben kann o.B.d.A. angenommen werden, dass alle Spiele, an denen Mannschaft 1 nicht beteiligt ist, einen Sieger haben. Es kann jedoch nicht angenommen werden, dass Mannschaft 1 alle ausstehenden Spiele gewinnt, sondern nur, dass o.B.d.A. Mannschaft 1 kein ausstehendes Spiel verliert.

Seien g_{1j} die Anzahlen der ausstehenden Spiele von Mannschaft 1 gegen Mannschaft j, $j = 2, \ldots, n$. Angenommen, Mannschaft 1 kann Meister werden, dann sei A eine entsprechende Festlegung der ausstehenden Spiele. Es wird gezeigt, dass dann eine Festlegung der ausstehenden Spiele existiert, für die Mannschaft 1 nicht gegen „zu viele“ Mannschaften mindestens einmal gewinnt.

Angenommen, Mannschaft 1 gewinnt in A gegen mindestens $\mu = \lceil 1/(1-s) \rceil$ viele Mannschaften jeweils mindestens einmal. Seien σ_{1j} die Anzahlen gewonnener Spiele von Mannschaft 1 gegen Mannschaft j in A, $j = 2, \ldots, n$. Es sei nun $M \subseteq \{2, \ldots, n\}$ eine Menge von μ Mannschaften mit maximalen σ-Werten, d.h. für $\sigma := \min_{j \in M} \sigma_{1j}$ gilt

$$\forall j \notin M : \ \sigma_{1j} \leq \sigma.$$

Seien $w_1(A), \ldots, w_n(A)$ die Punkte der einzelnen Mannschaften bzgl. der Festlegung A. Da Mannschaft 1 Meister ist, gilt $w_1(A) \geq w_j(A)$ für $j = 2, \ldots, n$. Ändert man jeweils $\min(\sigma, \sigma_{1j})$ viele Siege von Mannschaft 1 gegen Mannschaft j in Unentschieden, so erhält man eine neue Festlegung A'. Dabei werden insgesamt mindestens $\mu \cdot \sigma$ viele Siege umgewandelt. Es folgt, dass Mannschaft 1 auch bzgl. A' Meister ist, denn es gilt

$$\begin{aligned} w_1(A') &\geq w_1(A) + (1-s) \cdot \mu \cdot \sigma \\ &\geq w_1(A) + \sigma \\ &\geq w_j(A) + \sigma \\ &\geq w_j(A) + \min(\sigma, \sigma_{1j}) \\ &= w_j(A'). \end{aligned}$$

Aus der Wahl von M folgt, dass jede Mannschaft $j \notin M$ und mindestens eine Mannschaft aus M in der Festlegung A' gegen Mannschaft 1 nur unentschieden spielen. Falls Mannschaft 1 Meister werden kann, gibt es also eine Festlegung der ausstehenden Spiele, für die Mannschaft 1 Meister ist und nur gegen höchstens $\mu - 1$ viele Mannschaften mindestens einmal gewinnt.

Als nächstes wird die Anzahl solcher Festlegungen abgeschätzt. Für die Wahl von $\mu - 1$ aus $n - 1$ Mannschaften gibt es

$$\binom{n-1}{\mu-1} = O\big(n^{\mu-1}\big)$$

viele Möglichkeiten. Da Mannschaft 1 höchstens r ausstehende Spiele gegen eine Mannschaft j besitzt, ergeben sich für eine solche Auswahl von $\mu - 1$ Mannschaften damit jeweils höchstens

$$(r+1)^{\mu-1} = O(r^{\mu-1})$$

unterschiedliche Festlegungen der ausstehenden Spiele von Mannschaft 1. Es sind also insgesamt höchstens

$$O\big((nr)^{\mu-1}\big) = O\big((nr)^{\lceil 1/(1-s)\rceil - 1}\big)$$

unterschiedliche Festlegungen der ausstehenden Spiele von Mannschaft 1 zu betrachten. Da s eine Konstante ist, ist diese Anzahl polynomiell.

Ist eine Festlegung aller ausstehenden Spiele von Mannschaft 1 gegeben, erhält man wie in der Bemerkung vor dem Beweis dieses Theorems eine Eingabe für das Baseball Elimination Problem, in der Mannschaft 1 genau dann Meister werden kann, wenn dieses bzgl. der Eingabe für s-MP mit der gewählten Festlegung der ausstehenden Spiele von Mannschaft 1 möglich ist. Da wie eben gezeigt nur polynomiell viele Festlegungen der ausstehenden Spiele von Mannschaft 1 zu betrachten sind und das Baseball Elimination Problem nach den Bemerkungen in Kapitel 1 in polynomieller Zeit gelöst werden kann, folgt die Behauptung. $\square$

Kapitel 4

Komplexitätsbetrachtungen bei vielen ausstehenden Spielen

Im vorausgehenden Kapitel wurde gezeigt, dass das Meisterschaftsproblem für $s > 1$ und $s \neq 2$ NP-vollständig ist, sogar dann, wenn nur noch die letzten drei Spieltage einer Saison ausstehen. Wie bereits erwähnt, wird sich in Kapitel 5 zeigen, dass das Problem effizient gelöst werden kann, wenn jede Mannschaft nur noch höchstens zwei ausstehende Spiele besitzt. Außerdem hat natürlich zu Beginn einer Saison noch jede Mannschaft die Möglichkeit Meister zu werden. Es stellt sich daher die Frage für welche Werte von $k \geq 3$ das Meisterschaftsproblem NP-vollständig ist, wenn noch genau die letzten k Spieltage einer Saison ausstehen, und zum anderen nach wievielen Spieltagen einer Saison, unabhängig von den Ergebnissen der bereits ausgetragenen Spiele, noch jede Mannschaft Meister werden kann.

4.1 Wann ist noch nichts entschieden?

In diesem Abschnitt wird die Frage untersucht, nach wievielen Spieltagen einer Saison noch jede Mannschaft Meister werden kann, unabhängig davon, wie viele Punkte die einzelnen Mannschaften an den ausgetragenen Spieltagen bereits erhalten haben. Das folgende Theorem zeigt, dass, falls noch mindestens die letzten $2/3$ aller Spieltage einer Saison ausstehen, jede Mannschaft noch die Möglichkeit hat Meister zu werden, wenn nach der s-Punkteregel gespielt wird mit $0 < s < 2$.

Theorem 4.1.1. *Es sei $s \in \mathbb{Q}$, $0 < s < 2$, $k, r \in \mathbb{N}$ und eine Eingabe für (k, r, s)-MP gegeben mit $k \geq \lceil 2(n-1)r/3 \rceil$, wobei n die Anzahl der Mannschaften bezeichnet. Dann kann jede Mannschaft noch Meister werden.*

Beweis. Es ist zu zeigen, dass eine Festlegung der ausstehenden Spiele existiert, für die o.B.d.A. Mannschaft 1 Meister ist. Jede Mannschaft habe o.B.d.A. noch genau $k = \lceil 2(n-1)r/3 \rceil$ ausstehende Spiele. Jedes ausstehende Spiel von Mannschaft 1 wird als Sieg für Mannschaft 1 festgelegt. Damit besitzt Mannschaft 1 mindestens $k \cdot s$ Punkte.

Die Saison besteht insgesamt aus $(n-1)r$ Spieltagen. In den ausgetragenen Spielen hat jede Mannschaft bisher höchstens $((n-1)r - k)s$ Punkte erhalten. Da bei einem Unentschieden insgesamt 2 Punkte vergeben werden, bei einem Sieg jedoch nur $s < 2$ Punkte, wird jedes ausstehende Spiel zwischen den Mannschaften $2, \ldots, n$ als Spiel mit einem Sieger festgelegt. Dabei sollen die Siege möglichst gleichmäßig auf die Mannschaften verteilt werden. Dazu werden die ausstehenden Spieltage zu Paaren zusammengefasst. Höchstens ein Spieltag bleibt dabei übrig. Zu einem Paar von Spieltagen besteht der Multigraph auf den Knoten $2, \ldots, n$, der für jedes Spiel die zugehörige Kante enthält, aus paarweise disjunkten Kreisen und Pfaden. Die Spiele, die zu einem Kreis bzw. Pfad von Kanten gehören, können reihum so festgelegt werden, dass jede Mannschaft nur höchstens einmal gewinnt. Damit erhält jede Mannschaft an den letzten k Spieltagen nicht mehr als $\lceil k/2 \rceil s$ Punkte und besitzt am Ende der Saison insgesamt höchstens $((n-1)r - k)s + \lceil k/2 \rceil s$ viele Punkte.

Mit dieser Festlegung der ausstehenden Spiele ist Mannschaft 1 Meister, wenn folgende Ungleichung erfüllt ist

$$k \cdot s \geq ((n-1)r - k)s + \lceil k/2 \rceil s.$$

Das ist äquivalent zu

$$\lfloor 3k/2 \rfloor \geq (n-1)r$$

und offensichtlich nach Voraussetzung erfüllt. □

As nächstes wird der Fall $s \geq 2$ betrachtet. Das folgende Theorem zeigt, dass in diesem Fall jede Mannschaft noch Meister werden kann, wenn bei einer geraden Anzahl von Runden noch mindestens die letzte Saisonhälfte aussteht, oder bei einer ungeraden Anzahl von Runden noch zusätzlich mindestens eine gewisse Anzahl von Spieltagen aussteht, die nicht mehr als 1/6 einer weiteren Runde beträgt.

Theorem 4.1.2. *Es sei $s \in \mathbb{Q}$, $s \geq 2$, $k, r \in \mathbb{N}$ und eine Eingabe für (k, r, s)-MP gegeben, mit $k \geq (n-1)r/2$, falls r gerade ist, und $k \geq \lceil (n-1)r/2 + (n-1)/(4s-2) \rceil$, falls r ungerade ist, wobei n die Anzahl der Mannschaften bezeichnet. Dann kann jede Mannschaft noch Meister werden.*

Beweis. Es ist zu zeigen, dass eine Festlegung der ausstehenden Spiele existiert, für die o.B.d.A. Mannschaft 1 Meister ist. Ist r gerade, so habe jede Mannschaft o.B.d.A. noch genau $k = (n-1)r/2$ ausstehende Spiele, d.h. genau die Spiele der zweiten Saisonhälfte stehen noch aus. Jedes ausstehende Spiel von Mannschaft 1 wird als Sieg für Mannschaft 1 festgelegt. Damit besitzt Mannschaft 1 mindestens $(n-1)r/2 \cdot s$ Punkte.

Die ausstehenden Spiele zwischen den Mannschaften $2, \ldots, n$ werden dual zu denen der ersten Saisonhälfte festgelegt, d.h. für einen Sieg von Mannschaft i gegen Mannschaft j in Runde l, für $l = 1, \ldots, (r-1)/2 - 1$, wird das zugehörige Spiel der zweiten Saisonhälfte, das Spiel zwischen Mannschaft i und j in Runde $(r-1)/2 - 1 + l$, als Sieg für Mannschaft j festgelegt, bzw. im Falle eines Unentschiedens wird auch das Spiel in der zweiten Saisonhälfte als Unentschieden festgelegt. Damit erhält jede Mannschaft für jedes Spiel der ersten Saisonhälfte zusammen mit dem zugehörigen Spiel der zweiten Hälfte höchstens s Punkte. Man beachte $s \geq 2$. Damit besitzt jede Mannschaft am Ende der Saison höchstens $(n-1)r/2 \cdot s$ Punkte, also nicht mehr Punkte als Mannschaft 1 mindestens erhält und die Behauptung folgt für diesen Fall.

Falls r ungerade ist, habe jede Mannschaft o.B.d.A. noch genau $k = \lceil (n-1)r/2 + (n-1)/(4s-2) \rceil$ ausstehende Spiele. Jedes ausstehende Spiele von Mannschaft 1 wird als Sieg für Mannschaft 1 festgelegt. Es ist $k = (n-1)(r-1)/2 + \lceil (n-1)s/(2s-1) \rceil$ und für $k' := \lceil (n-1)s/(2s-1) \rceil = \lceil (n-1)/(2-1/s) \rceil$ gilt $(n-1)/2 < k' \leq 2(n-1)/3$, da $s \geq 2$ ist. Es stehen also die Spiele der letzten $(r-1)/2$ Runden und die letzten k' Spieltage der Runde r' aus, mit $r' = (r-1)/2 + 1$.

Die Spiele zwischen den Mannschaften $2, \ldots, n$ der letzten $(r-1)/2$ Runden werden wie im ersten Fall dual zu den Spielen der ersten $(r-1)/2$ Runden festgelegt. Damit erhält jede Mannschaft in allen Runden, ohne Runde r', insgesamt höchstens $(n-1)(r-1)/2 \cdot s$ Punkte, also nicht mehr Punkte als Mannschaft 1 mindestens für die letzten $(r-1)/2$ Runden erhält.

Alle Spiele der letzten k' Spieltage von Runde r', außer die Spiele von Mannschaft 1, werden als Unentschieden festgelegt. Damit erhält jede Mannschaft für die Spiele in Runde r' insgesamt höchstens $(n-1-k')s+k'$ Punkte. Da Mannschaft 1 alle ausstehenden Spiele gewinnt, erhält sie für die Spiele in Runde r' mindestens $k' \cdot s$ Punkte. Die Ungleichung

$$k' \cdot s \geq (n-1-k')s+k'$$

ist äquivalent zu

$$k' \geq (n-1)s/(2s-1),$$

und nach Definition von k' erfüllt, d.h. Mannschaft 1 erhält in Runde r' mindestens so viele Punkte wie die anderen Mannschaften in dieser Runde. Insgesamt folgt die Behauptung. □

4.2 NP-Vollständigkeitsresultate

In diesem Abschnitt wird untersucht, für welche Werte von $k \geq 3$ das Meisterschaftsproblem NP-vollständig ist, wenn noch genau die letzten k Spieltage einer Saison ausstehen und nach der s-Punkteregel mit $s > 1$ und $s \neq 2$ gespielt wird. Das in Kapitel 3 für $s > 1$ und $s \neq 2$ als NP-vollständig klassifizierte Problem $(3, 1, s)$-MP dient dabei als Ausgangsproblem für die Reduktionsbeweise.

Zunächst wird die Definition von (k, r, s)-MP geeignet erweitert. Für eine polynomiell in n berechenbare Funktion $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei das Problem (k, r, s)-MP analog wie im Fall mit konstantem Wert $k \in \mathbb{N}$ definiert, dabei sollen jetzt in einer Eingabe mit n Mannschaften noch genau $k(n)$ Spieltage ausstehen. Da k polynomiell berechenbar ist, kann diese Bedingung an die Eingabe in polynomieller Zeit überprüft werden.

Lemma 4.2.1. *Sei $s \in \mathbb{Q}$, $s > 0$, $r \in \mathbb{N}$ und $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine polynomiell in n berechenbare Funktion. Dann lässt sich (k, r, s)-MP polynomiell auf $(k, r+1, s)$-MP reduzieren, d.h. (k, r, s)-MP $\leq_p$ $(k, r+1, s)$-MP.*

Beweis. Es sei eine Eingabe für (k, r, s)-MP gegeben. Wird eine weitere Runde, in der jedes Spiel als Unentschieden festgelegt ist, vorne angefügt, so erhält man eine Eingabe für $(k, r+1, s)$-MP. Dadurch werden die Potentialwerte der Mannschaften nicht verändert. Also kann jede Mannschaft bzgl. der konstruierten Eingabe für $(k, r+1, s)$-MP genau dann Meister werden, wenn dies bzgl. der Eingabe für (k, r, s)-MP möglich ist. □

Theorem 4.2.2. *Sei $s \in \mathbb{Q}$, $s > 1$ und $s \neq 2$ und für ein $\varepsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ sei $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine polynomiell in n berechenbare Funktion mit $3 \leq k(n) \leq n/2 - n^\varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Dann ist (k, r, s)-MP NP-vollständig.*

Daraus ergibt sich als Spezialfall

Korollar 4.2.3. *Für alle $s \in \mathbb{Q}$, $s > 1$, $s \neq 2$ und $k, r \in \mathbb{N}$ ist (k, r, s)-MP NP-vollständig.*

Beweis. Offensichtlich ist (k, r, s)-MP in NP enthalten, denn es kann eine Festlegung der noch ausstehenden Spiele geraten werden und in polynomieller Zeit überprüft werden, ob unter dieser Festlegung Mannschaft 1 Meister ist. Die NP-Vollständigkeit wird durch eine polynomielle Reduktion von $(3, 1, s)$-MP auf (k, r, s)-MP gezeigt, denn $(3, 1, s)$-MP ist für $s > 2$ nach Theorem 3.1.1 bzw. für $1 < s < 2$ nach Theorem 3.2.1 NP-vollständig. Nach Lemma 4.2.1 reicht es aus den Fall $r = 1$ zu betrachten.

Es sei eine Eingabe für $(3, 1, s)$-MP mit m Mannschaften gegeben, d.h. die Ergebnisse $w_{ij} \in \{\mathrm{S}, \mathrm{U}, \mathrm{N}, ?\}$, $i, j = 1, \ldots, m$, $i \neq j$ der einzelnen Spiele, sowie ein Spielplan, der beschreibt, wie diese Spiele an $m - 1$ Spieltagen ausgetragen werden, und ein Parameter s, der angibt, dass nach der s-Punkteregel gespielt wird. Für ein $a \in \mathbb{N}$ wird eine Eingabe für $(k, 1, s)$-MP mit $n := 2a \cdot m$ Mannschaften konstruiert, bzgl. der Mannschaft 1 genau dann Meister werden kann, wenn dieses in der Eingabe für $(3, 1, s)$-MP möglich ist. Dabei sei a die kleinste gerade Zahl nicht kleiner als n_0 und $m^{1/\varepsilon}$. Mit dieser Wahl von a ist $n \geq n_0$ und $n^\varepsilon \geq m$ und für $k' := (a - 1)m + 3$ gilt jetzt nach Voraussetzung

$$k' = n/2 - m + 3 \geq n/2 - n^\varepsilon \geq k(n).$$

Man beachte, dass n polynomiell in m ist, da ε ein konstanter Wert ist.

Zunächst wird eine Eingabe konstruiert, in der jede Mannschaft genau k' ausstehende Spiele besitzt. Daraus erhält man dann leicht eine Eingabe für $(k, 1, s)$-MP.

Die Spiele aller n Mannschaften sollen nach einem Spielplan mit den folgenden Eigenschaften ausgetragen werden: Die Spiele zwischen den Mannschaften $1, \ldots, m$ werden an den Spieltagen $n/2+1, \ldots, n/2+m-1$ gemäß dem Spielplan in der Eingabe für $(3, 1, s)$-MP ausgetragen und die Spiele der Mannschaften $1, \ldots, n/2$ gegen die Mannschaften $n/2+1, \ldots, n$ an den ersten $n/2$ Spieltagen.

Ein solcher Spielplan existiert und kann in polynomieller Zeit berechnet werden: Die Spiele der Mannschaften $1, \ldots, n/2$ gegen die Mannschaften $n/2+1, \ldots, n$ entsprechen den Kanten eines bipartiten $(n/2)$-regulären Graphen. Für sie kann in polynomieller Zeit eine Kantenfärbung mit $n/2$ Farben berechnet werden (siehe dazu die Bemerkung vor Lemma 3.1.3), d.h. für die ersten $n/2$ Spieltage erhält man einen Spielplan, an dem die Mannschaften $1, \ldots, n/2$ gegen die Mannschaften $n/2+1, \ldots, n$ spielen.

Es ist noch anzugeben wie die Spiele zwischen den Mannschaften $1, \ldots, n/2$ und zwischen den Mannschaften $n/2+1, \ldots, n$, an den letzten $n/2-1$ Spieltagen ausgetragen werden. Dazu seien die Mannschaften $1, \ldots, n/2$ in a Gruppen von jeweils m Mannschaften eingeteilt, d.h. Gruppe i, $i = 1, \ldots, a$, bestehe aus den Mannschaften $\{m(i-1)+1, \ldots, m \cdot i\}$. An den $m-1$ Spieltagen $n/2+1, \ldots, n/2+m-1$ werden die Spiele zwischen den Mannschaften in den einzelnen Gruppen unter sich gemäß dem Spielplan in der Eingabe für $(3, 1, s)$-MP ausgetragen, insbesondere auch die Spiele von Gruppe 1, womit nun alle geforderten Eigenschaften des Spielplans erfüllt sind. Die restlichen Spiele der Mannschaften $1, \ldots, n/2$ können an den letzten $(a-1)m$ Spieltagen ausgetragen werden, indem die Gruppen paarweise gegeneinander spielen. Diese Paarungen entsprechen den Kanten eines vollständigen Graphen auf a Knoten, und da a nach Wahl eine gerade Zahl ist, kann dafür eine Kantenfärbung mit $a-1$ Farben in polynomieller Zeit berechnet werden (siehe Abschnitt 2.1). Die Spiele zwischen jeweils zwei unterschiedlichen Gruppen entsprechen den Kanten eines bipartiten m-regulären Graphen und wie oben kann dafür eine Kantenfärbung mit m Farben in polynomieller Zeit berechnet werden. D.h. die Spiele zwischen zwei unterschiedlichen Gruppen können an m Spieltagen und somit die Spiele zwischen allen Gruppen an $(a-1)m$ Spieltagen ausgetragen werden.

Ein Spielplan für die Spiele zwischen den Mannschaften $n/2+1, \ldots, n$ an den letzten $n/2-1$ Spieltagen lässt sich ebenfalls in polynomieller Zeit berechnen. Insgesamt ergibt sich der geforderte Spielplan.

Die Spielergebnisse in der Eingabe für $(3, 1, s)$-MP seien im Folgenden durch Werte q_{il}, $i = 1, \ldots, m$, $l = 1, \ldots, m-1$, repräsentiert, wobei $q_{il} = w_{ij}$ und $q_{jl} = w_{ji}$ ist, falls Mannschaft i gegen Mannschaft j am l-ten Spieltag spielt. Die Eingabe für $(k', 1, s)$-MP wird ebenso in dieser Form konstruiert, d.h. die Werte $p_{il} \in \{\mathrm{S}, \mathrm{U}, \mathrm{N}, ?\}$, $i = 1, \ldots, n$, $l = 1, \ldots, n-1$, beschreiben wie Mannschaft i am l-ten Spieltag spielt. Es wird jetzt eine Festlegung aller Spiele an den ersten $n-k'$ Spieltagen angegeben, so dass Mannschaft 1 bzgl. dieser Festlegung genau dann Meister werden kann, wenn dieses in der Eingabe für $(3, 1, s)$-MP möglich ist. Die Spiele der letzten k' Spieltage sollen ausstehen, d.h. $p_{il} := ?$ für $i = 1, \ldots, n$, $l = n - k', \ldots, n - 1$. Es werden im Folgenden zwei Fälle unterschieden.

Fall 1: $s > 2$. Abbildung 4.2.1 veranschaulicht die folgende Festlegung der ausgetragenen Spiele. Die Mannschaften $1, \ldots, m$ verlieren an den ersten m Spieltagen und spielen an den Spieltagen $m+1, \ldots, n/2$ unentschieden, d.h. für $i \in \{1, \ldots, m\}$ wird $p_{il} :=$ N für $l = 1, \ldots, m$ und $p_{il} :=$ U für $l = m+1, \ldots, n/2$ festgelegt. Die Spiele jeder Mannschaft $i \in \{m + 1, \ldots, n/2\}$ werden an den ersten $n/2$ Spieltagen durch $p_{il} := q_{1,l}$ für $l = 1, \ldots, m - 4$, $p_{i,m-3} :=$ U und $p_{il} :=$ S für $l = m - 2, \ldots, n/2$ festgelegt. Damit sind nun auch alle Spiele der Mannschaften $n/2 + 1, \ldots, n$ an den ersten $n/2$ Spieltagen festgelegt. Für die Spieltage $n/2 + 1, \ldots, n/2 + m - 4$ werden für die Mannschaften $1, \ldots, m$ die Ergebnisse aus der Eingabe für $(3, 1, s)$-MP übernommen, d.h. $p_{i,l} := q_{i,l-n/2}$ für $i = 1, \ldots, m$ und $l = n/2 + 1, \ldots, n/2 + m - 4$. Die Spiele der restlichen Mannschaften an diesen Spieltagen werden als Unentschieden festgelegt. Damit sind alle Spiele der ersten $n/2 + m - 4 = n - 1 - k'$ Spieltage festgelegt.

Es wird jetzt gezeigt, dass für diese Festlegung die behauptete Äquivalenz gilt. Bezeichnet w_1 die Anzahl der Punkte, die Mannschaft 1 an den Spieltagen $n/2+1, \ldots, n/2+m-4$ erhält, und gewinnt Mannschaft 1 ihre k' ausstehenden Spiele, so besitzt sie am Ende der Saison

$$\begin{aligned} &(n/2 - m) + w_1 + (n/2 - m + 3)s \\ =&(a - 1)m + w_1 + ((a - 1)m + 3)s \end{aligned} \tag{4.1}$$

Punkte.

Die Mannschaften $n/2+1, \ldots, n$ haben für die Frage, ob Mannschaft 1 Meister werden kann keine Bedeutung, denn die ausstehenden Spiele dieser Mannschaften werden nur zwischen diesen Mannschaften ausgetragen und ihre Punktzahl am Ende der Saison lässt sich wie folgt abschätzen. Jede der Mannschaften $n/2 + 1, \ldots, n$ erhält in den Spielen an den ersten m Spieltagen gegen die Mannschaften $1, \ldots, n/2$ höchstens $m \cdot s$ Punkte und an den Spieltagen $m + 1, \ldots, n/2$ höchstens m Punkte. Enden alle ausstehenden Spiele dieser Mannschaften unentschieden, so haben sie am Ende der Saison nicht mehr als

$$m \cdot s + m + n/2 - 1 = m \cdot s + (a + 1)m - 1$$

Punkte und somit, da o.B.d.A. $a \geq 4$ ist, haben sie am Ende der Saison nicht mehr Punkte als Mannschaft 1, vgl. (4.1).

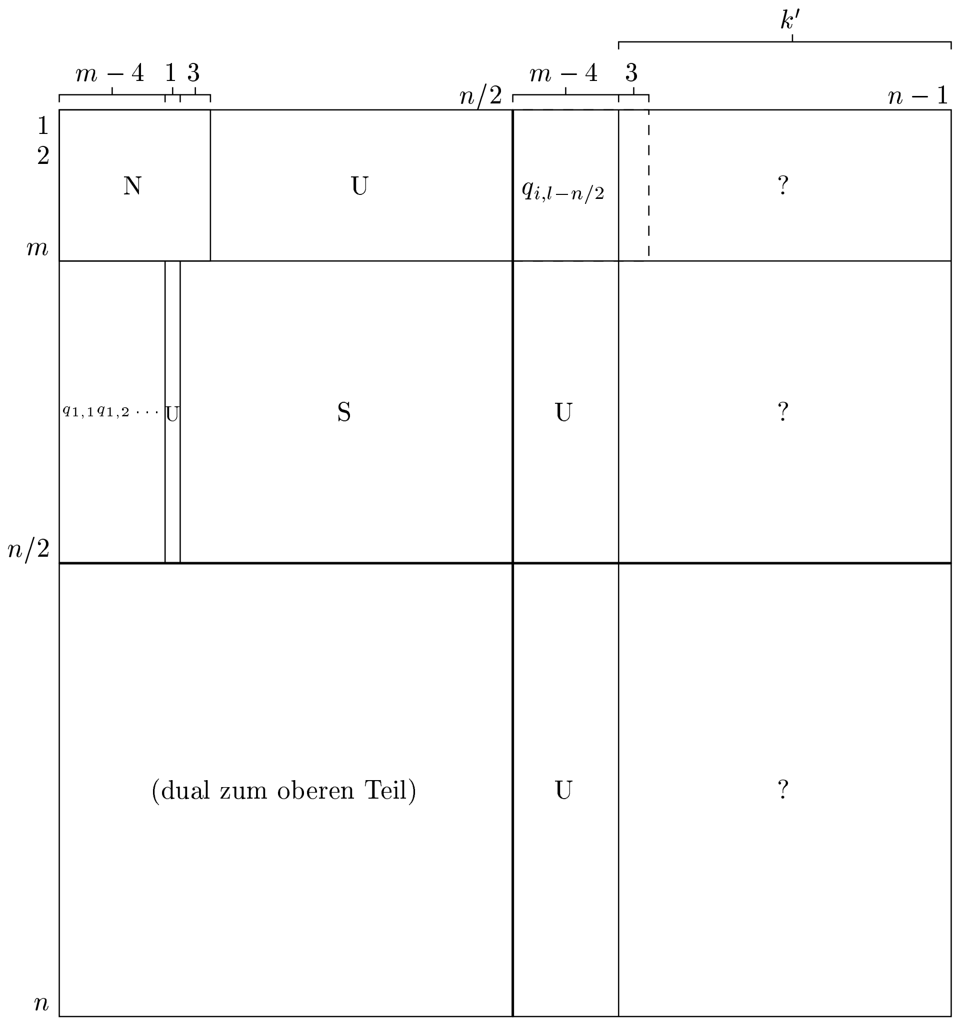

Abbildung 4.2.1: *Die Abbildung zeigt die Matrix $(p_{il})_{il}$, $i = 1, \ldots, n$, $l = 1, \ldots, n-1$, für den Fall $s > 2$. Ein Eintrag p_{il} in Zeile i und Spalte l beschreibt den Ausgang des Spiels von Mannschaft i am l-ten Spieltag aus der Sicht von Mannschaft i.*

Jede Mannschaft $i \in \{m+1, \ldots, n/2\}$ erhält an den ersten $n/2$ Spieltagen

$$w_1 + 1 + (n/2 - m + 3)s \tag{4.2}$$

Punkte. Man beachte dabei, dass die Ergebnisse der Spiele dieser Mannschaften an den Spieltagen $1, \ldots, m-4$ mit den Ergebnissen der Spiele von Mannschaft 1 an den Spieltagen $n/2+1, \ldots, n/2+m-4$ übereinstimmen.

Die Mannschaften $m+1, \ldots, n/2$ tragen in ihren ausstehenden Spielen jeweils $n/2 - 2m + 3$ Spiele untereinander und m Spiele gegen die Mannschaften

$1, \ldots, m$ aus. Es sei B eine Festlegung der ausstehenden Spiele der Mannschaften $m+1, \ldots, n/2$, in der die ausstehenden Spiele zwischen diesen Mannschaften unentschieden ausgehen und sie ihre ausstehenden Spiele gegen die Mannschaften $1, \ldots, m$ verlieren. Bzgl. dieser Festlegung erhält jede der Mannschaften $m+1, \ldots, n/2$ an den letzten $n/2-1$ Spieltagen $n/2-1-m$ Punkte und besitzt insgesamt mit (4.2)

$$b := w_1 + (n/2 - m + 3)s + n/2 - m$$

Punkte. Da $s > 2$ ist, werden in einem Spiel insgesamt mindestens 2 Punkte vergeben. Mit einem Durchschnittsargument folgt, dass die Festlegung B in dem Sinne minimal ist, dass es keine Festlegung der ausstehenden Spiele der Mannschaften $m+1, \ldots, n/2$ gibt, in der eine dieser Mannschaften weniger als b Punkte erhält aber keine dieser Mannschaften mehr als b Punkte erhält.

Da Mannschaft 1 o.B.d.A. ihre ausstehenden Spiele gewinnt, hat sie am Ende der Saison nach (4.1) ebenfalls b Punkte und es folgt, dass für jede Festlegung, bzgl. der Mannschaft 1 Meister ist, die ausstehenden Spiele der Mannschaften $m+1, \ldots, n/2$ wie in B festgelegt sein müssen. Insbesondere müssen dazu die Mannschaften $2, \ldots, m$ ihre ausstehenden Spiele an den Spieltagen $n/2{+}m, \ldots, n{-}1$ gewinnen. Damit erhält dann jede der Mannschaften $2, \ldots, m$ an den Spieltagen $n/2 + m, \ldots, n-1$ sowie gemäß der Festlegung der ausgetragenen Spiele auch an den Spieltagen $1, \ldots, n/2$ gleich viele Punkte wie Mannschaft 1 an diesen Spieltagen. Da für die Mannschaften $1, \ldots, m$ die restlichen Spieltage $n/2+1, \ldots, n/2+m-1$ nach Konstruktion des Spielplans und nach Festlegung der ausgetragenen Spiele der Eingabe für $(3, 1, s)$-MP entsprechen, kann offensichtlich bzgl. der konstruierten Eingabe für $(k', 1, s)$-MP Mannschaft 1 genau dann Meister werden, wenn dieses bzgl. der Eingabe für $(3, 1, s)$-MP möglich ist.

Indem jetzt die Spiele der letzten $k' - k(n)$ Spieltage für die Mannschaften $1, \ldots, n/2$ wie in der Festlegung B und für die Mannschaften $n/2+1, \ldots, n$ als Unentschieden festgelegt werden und diese Spieltage schließlich im Spielplan nach vorne verschoben werden, erhält man die gewünschte Eingabe für $(k, 1, s)$-MP. Man beachte dabei, dass $k(n) \geq 3$ ist und somit keiner der Spieltage $1, \ldots n/2 + m - 1$ im Spielplan nach vorne verschoben wird.

Fall 2: $1 < s < 2$. Die Idee besteht wie im ersten Fall darin, die Mannschaften $2, \ldots, m$ zu „zwingen“, ihre Spiele an den letzten $k' - 3$ Spieltagen zu gewinnen. Im Gegensatz zum ersten Fall wird für $s < 2$ die Anzahl der Punkte, die in einem Spiel insgesamt vergeben werden, nicht durch ein Unentschieden minimiert, sondern durch ein Spiel mit einem Sieger. Um auch in diesem Fall ein Durchschnittsargument anzuwenden, wird deshalb eine andere Festlegung der ausgetragenen Spiele angegeben, siehe dazu Abbildung 4.2.2. Die Mannschaften $1, \ldots, m$ gewinnen an den ersten $\lceil (n/2-1-m)/2 \rceil$ Spieltagen und verlieren ihre Spiele an den Spieltagen $\lceil (n/2-1-m)/2 \rceil + 1, \ldots, n/2$, d.h. für $i \in \{1, \ldots, m\}$ sei $p_{il} :=$ S für $l = 1, \ldots, \lceil (n/2-1-m)/2 \rceil$ und $p_{il} :=$ N für $l = \lceil (n/2-1-m)/2 \rceil + 1, \ldots, n/2$. Wie im Fall $s > 2$ werden für die Spieltage $n/2+1, \ldots, n/2+m-4$ für die Mannschaften $1, \ldots, m$ die Ergebnisse aus der Eingabe für $(3, 1, s)$-MP übernommen, d.h. $p_{il} := q_{i,l-n/2}$ für $i = 1, \ldots, m$ und $l = n/2+1, \ldots, n/2+m-4$.

Die Spiele jeder Mannschaft $i \in \{m+1, \ldots, n/2\}$ werden an den ersten $m-4$ Spieltagen wie im Fall $s > 2$ durch $p_{il} := q_{1,l}$ für $l = 1, \ldots, m-4$ festgelegt und an den Spieltagen $m-3, \ldots, n/2-1$ als Siege für diese Mannschaften festgelegt, d.h. $p_{il} :=$ S für $l = m-3, \ldots, n/2-1$. Um anzugeben wie diese Mannschaften am Spieltag $n/2$ spielen, sei eine Festlegung C der Spiele dieser Mannschaften an den Spieltagen $n/2+1, \ldots, n-1$ betrachtet, in der sie ihre Spiele gegegen die Mannschaften $1, \ldots, m$ verlieren und jedes Spiel zwischen den Mannschaften $m+1, \ldots, n/2$ einen Sieger hat und dabei die Siege und Niederlagen möglichst gleichmäßig auf diese Mannschaften verteilt sind. Wie im Beweis von Theorem 4.1.1 folgt, dass dieses so geschehen kann, dass jede der Mannschaften $m+1, \ldots, n/2$ an diesen Spieltagen entweder $\lfloor (n/2-1-m)/2 \rfloor$ oder $\lceil (n/2-1-m)/2 \rceil$ Spiele gewinnt. Eine solche Festlegung kann leicht in polynomieller Zeit berechnet werden. Für eine Mannschaft $i \in \{m+1, \ldots, n/2\}$ sei $\gamma_i =$ S im ersten Fall und $\gamma_i =$ N im zweiten Fall. Das Spiel von Mannschaft i am Spieltag $n/2$ sei dann durch $p_{i,n/2} := \gamma_i$ festgelegt. Mit dieser Wahl von γ_i erhält jede Mannschaft $i \in \{m+1, \ldots, n/2\}$, wenn ihre Spiele an den Spieltagen $n/2+1, \ldots, n-1$ gemäß der Festlegung C und am Spieltag $n/2$ durch γ_i festgelegt sind, an diesen $n/2$ Spieltagen zusammen genau

$$\lceil (n/2-1-m)/2 \rceil \tag{4.3}$$

Punkte. Damit sind jetzt auch alle Spiele der Mannschaften $n/2+1, \ldots, n$ an den ersten $n/2$ Spieltagen festgelegt. Die Spiele der Mannschaften $m+1, \ldots, n/2$ an den Spieltagen $n/2+1, \ldots, n/2+m-4$ werden gemäß der Festlegung C festgelegt. Die Spiele der Mannschaften $n/2+1, \ldots, n$ an diesen Spieltagen werden ebenso durch eine gleichmäßige Verteilung von Siegen und Niederlagen festgelegt. Damit sind alle Spiele der ersten $n/2+m-4 = n-1-k'$ Spieltage festgelegt.

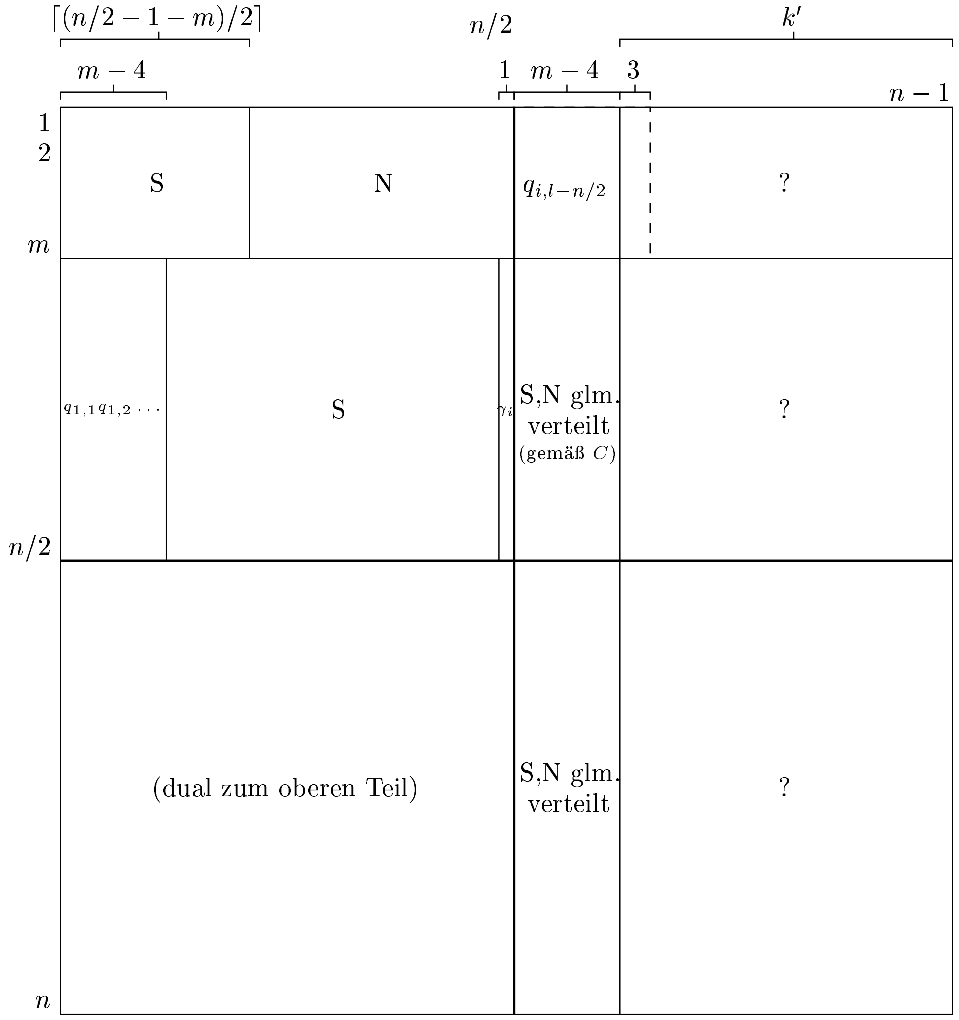

Abbildung 4.2.2: *Die Abbildung zeigt die Matrix* $(p_{il})_{il}$, $i = 1, \ldots, n$, $l = 1, \ldots, n-1$, *für den Fall* $1 < s < 2$. *Ein Eintrag* p_{il} *in Zeile* i *und Spalte* l *beschreibt den Ausgang des Spiels von Mannschaft* i *am* l*-ten Spieltag aus der Sicht von Mannschaft* i.

Es wird jetzt gezeigt, dass für diese Festlegung die behauptete Äquivalenz gilt. Bezeichnet w_1 die Anzahl der Punkte, die Mannschaft 1 an den Spieltagen $n/2+1, \ldots, n/2+m-4$ erhält, und gewinnt Mannschaft 1 ihre k' ausstehenden Spiele, so besitzt sie am Ende der Saison

$$\begin{aligned} &\lceil (n/2 - 1 - m)/2 \rceil s + w_1 + (n/2 - m + 3)s \\ &= \lceil 3n/4 - 3m/2 + 5/2 \rceil s + w_1 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Punkte und damit mindestens

$$3(a-1)m/2 \cdot s \tag{4.5}$$

Punkte.

Die Mannschaften $n/2+1,\ldots,n$ haben für die Frage, ob Mannschaft 1 Meister werden kann keine Bedeutung, denn die ausstehenden Spiele dieser Mannschaften werden nur zwischen diesen Mannschaften ausgetragen und ihre Punktzahl am Ende der Saison lässt sich wie folgt abschätzen. Jede der Mannschaften $n/2+1,\ldots,n$ erhält in den Spielen an den ersten m Spieltagen gegen die Mannschaften $1,\ldots,n/2$ höchstens $m\cdot s$ Punkte und an den Spieltagen $m+1,\ldots,n/2$ höchstens $(m+1)s$ Punkte. Haben alle ausstehenden Spiele dieser Mannschaften einen Sieger und sind dabei Siege und Niederlagen möglichst gleichmäßig auf die Mannschaften verteilt, so erhalten sie an den letzten $n/2-1$ Spieltagen nicht mehr als $(\lceil n/4\rceil+1)s$ Punkte, vgl. mit dem Beweis von Theorem 4.1.1. Man beachte dabei, dass in der oben angegebenen Festlegung der ausgetragenen Spiele auch an den Spieltagen $n/2+1,\ldots,n/2+m-4$ Siege und Niederlagen zwischen diesen Mannschaften gleichmäßig verteilt sind. Keine der Mannschaften $m+1,\ldots,n/2$ hat also am Ende der Saison mehr als

$$(\lceil n/4\rceil+1)s+(2m+1)s \leq (a/2+3)m\cdot s$$

Punkte und, da o.B.d.A. $a\geq 5$ ist, sind das höchstens so viele Punkte wie Mannschaft 1 am Ende der Saison besitzt, vgl. (4.5).

Jede Mannschaft $i\in\{m+1,\ldots,n/2\}$ erhält an den ersten $n/2-1$ Spieltagen

$$w_1+(n/2-m+3)s \tag{4.6}$$

Punkte. Man beachte dabei, dass die Ergebnisse der Spiele dieser Mannschaften an den Spieltagen $1,\ldots,m-4$ mit den Ergebnissen der Spiele von Mannschaft 1 an den Spieltagen $n/2+1,\ldots,n/2+m-4$ übereinstimmen.

Werden die ausstehenden Spiele dieser Mannschaften gemäß der Festlegung C festgelegt, so erhält jede dieser Mannschaften an den letzten $n/2$ Spieltagen $n/2-1,\ldots,n-1$ insgesamt $\lceil (n/2-1-m)/2\rceil$ Punkte, vgl. (4.3). Insgesamt besitzt jede dieser Mannschaften mit (4.6) am Ende der Saison dann

$$\begin{aligned} c :=& w_1+(n/2-m+3)s+\lceil (n/2-1-m)/2\rceil s\\ =& w_1+\lceil 3n/4-3m/2+5/2\rceil s \end{aligned}$$

Punkte. Da $s < 2$ ist, werden in jedem Spiel insgesamt mindestens s Punkte vergeben. Mit einem Durchschnittsargument folgt wie im Fall $s > 2$, dass die Festlegung C in dem Sinne minimal ist, dass es keine Festlegung der ausstehenden Spiele der Mannschaften $m+1, \ldots, n/2$ gibt, in der eine dieser Mannschaften weniger als c Punkte erhält aber keine dieser Mannschaften mehr als c Punkte erhält.

Da Mannschaft 1 o.B.d.A. ihre ausstehenden Spiele gewinnt, hat sie am Ende der Saison nach (4.4) ebenfalls c Punkte und es folgt, dass für jede Festlegung, bzgl. der Mannschaft 1 Meister ist, die ausstehenden Spiele der Mannschaften $m+1, \ldots, n/2$ wie in C festgelegt sein müssen. Insbesondere müssen dazu die Mannschaften $2, \ldots, m$ ihre ausstehenden Spiele an den Spieltagen $n/2+m, \ldots, n-1$ gewinnen. Damit erhält dann jede der Mannschaften $2, \ldots, m$ an den Spieltagen $n/2+m, \ldots, n-1$ sowie gemäß der Festlegung der ausgetragenen Spiele auch an den Spieltagen $1, \ldots, n/2$ gleich viele Punkte wie Mannschaft 1 an diesen Spieltagen. Da für die Mannschaften $1, \ldots, m$ die Spieltage $n/2+1, \ldots, n/2+m-1$ nach Konstruktion des Spielplans und nach Festlegung der ausgetragenen Spiele der Eingabe für $(3, 1, s)$-MP entsprechen, kann offensichtlich bzgl. der konstruierten Eingabe für $(k', 1, s)$-MP Mannschaft 1 genau dann Meister werden, wenn dieses bzgl. der Eingabe für $(3, 1, s)$-MP möglich ist.

Analog wie in Fall 1 erhält man jetzt die gewünschte Eingabe für $(k, 1, s)$-MP, indem die Spiele der letzten $k' - k(n)$ Spieltage für die Mannschaften $1, \ldots, n/2$ wie in der Festlegung C festgelegt werden und die Spiele der Mannschaften $n/2+1, \ldots, n$ durch eine gleichmäßige Verteilung von Siegen und Niederlagen, wie oben zur Abschätzung der Punkte dieser Mannschaften beschrieben wurde, festgelegt werden und diese Spieltage schließlich im Spielplan nach vorne verschoben werden. Man beachte dabei, dass $k(n) \geq 3$ ist und somit keiner der Spieltage $1, \ldots n/2 + m - 1$ im Spielplan nach vorne verschoben wird. □

Kapitel 5

Effiziente Algorithmen für ausgewählte Spielpläne

In diesem Kapitel werden Spezialisierungen des Meisterschaftsproblems untersucht, die man erhält, wenn an den Multigraphen, der für jedes noch ausstehende Spiel der Eingabe eine entsprechende Kante enthält, zusätzliche Bedingungen gestellt werden. In Abschnitt 5.1 werden Eingaben für MP betrachtet, für die der zugehörige Multigraph eine bestimmte Lokalitätseigenschaft besitzt. In Abschnitt 5.2 wird der Spielplan vorgestellt, nach dem in der Fußball-Bundesliga gespielt wird. Dieser lässt sich auf natürliche Weise auf Runden mit einer beliebigen geraden Anzahl von Mannschaften verallgemeinern. Daraufhin wird (k, r, s)-MP unter der Bedingung untersucht, dass der Spielplan in der Eingabe gerade dieser verallgemeinerte Spielplan der Fußball-Bundesliga ist. Es wird sich zeigen, dass dieser eine geeignete Lokalitätseigenschaft besitzt, so dass sich das in Abschnitt 5.1 erzielte algorithmische Resultat anwenden lässt und (k, r, s)-MP unter dieser Einschränkung in einem Großteil aller Fälle effizient gelöst werden kann.

5.1 Lokale Graphen

Definition 5.1.1. Ein Multigraph $G = (V, E)$ mit der Knotenmenge $V = \{1, \ldots, n\}$ heiße l-lokal, falls eine Permutation π von V existiert, so dass für alle $i = l+2, \ldots, n$ der Knoten $\pi(i)$ zu keinem der Knoten $\pi(1), \ldots, \pi(i-l-1)$ adjazent ist.

Ein Weg in einem Graphen ist eine Folge $v_0, \ldots, v_k$ von Knoten, für die der Graph die Kanten $\{v_{i-1}, v_i\}$, $i = 1, \ldots, k$, enthält. Die Relation, die für jeweils zwei Knoten angibt, ob ein Weg zwischen ihnen existiert, ist eine Äquivalenzrelation. Die zugehörigen Äquivalenzklassen sind disjunkt und eindeutig und heißen Zusammenhangskomponenten des Graphen.

Theorem 5.1.2. *Es sei eine Eingabe für MP gegeben und es sei G der zur Eingabe gehörige Multigraph, der für jedes noch ausstehende Spiel eine entsprechende Kante enthält. Ist zudem eine Permutation π der Knotenmenge von G und eine Menge H von Kanten gegeben, von denen jede Zusammenhangskomponente von G höchstens h Kanten enthält, und nach deren Entfernung der Graph l-lokal bzgl. π ist, dann existieren zwei Konstanten c_1 und c_2, so dass in Zeit*

$$c_1 \cdot n^2 + n \cdot 2^{c_2(h+l\Delta(G))} = n^2 \cdot 2^{O(h+l\Delta(G))}$$

entschieden werden kann, ob die gefragte Mannschaft Meister werden kann.

Beweis. Die den ausstehenden Spielen der gefragten Mannschaft entsprechenden Kanten werden aus G entfernt. Ist in der Eingabe $s \geq 1$, dann können o.B.d.A. alle ausstehenden Spiele der gefragten Mannschaft als Siege festgelegt werden. Die Potentialwerte der Knoten können aus der Eingabe in Zeit $c_1 \cdot n^2$ berechnet werden, wobei c_1 eine geeignete Konstante ist. Ist $s < 1$, wird zusätzlich jede Festlegung der ausstehenden Spiele der gefragten Mannschaft betrachtet. Das ergibt einen Faktor von $3^{\Delta(G)}$ für die Laufzeit, der in der Konstanten c_2 verschwindet. Die Potentialwerte der Knoten können dazu jeweils in Zeit $O(n)$ aktuallisiert werden. Die gefragte Mannschaft besitzt im Folgenden also keine ausstehenden Spiele mehr. Damit kann insbesondere auch im Fall $s < 1$ die Potential-Graph Darstellung verwendet werden.

Da zwischen unterschiedlichen Zusammenhangskomponenten von G keine Kante verläuft, kann, um zu entscheiden, ob die gefragte Mannschaft noch Meister werden kann, für jede Zusammenhangskomponente einzeln geprüft werden, ob eine Festlegung der den zugehörigen Kanten entsprechenden Spiele existiert, für die jeder Knoten ein Potential von höchstens 0 besitzt. Nach Voraussetzung ist eine Menge H von Kanten gegeben, nach deren Entfernung der Graph l-lokal ist. Damit ist dann auch jede Zusammenhangskomponente l-lokal. O.B.d.A. seien die Knoten schon geeignet nummeriert, so dass die zugehörige Permutation die Identität ist. Der folgende Algorithmus entscheidet für eine Zusammenhangskomponente, die o.B.d.A. die Knoten $1, \ldots, n'$ enthält, ob für die Kanten zwischen diesen Knoten eine Festlegung existiert, für die jeder Knoten ein Potential von höchstens 0 besitzt. Es bezeichne H' die Menge der Kanten in H, die in der Zusammenhangskomponente liegen.

(1) Die Kanten in H' werden aus der Zusammenhangskomponente entfernt, und für jede Festlegung dieser Kanten werden die folgenden Schritte wiederholt.

(2) Für jede Festlegung der Kanten zwischen den Knoten $1, \ldots, l$ seien $\phi_1, \ldots, \phi_l$ die Potentialwerte der Knoten $1, \ldots, l$. Es sei M die Menge aller dieser Tupel $(\phi_1, \ldots, \phi_l)$.

(3) Setze $i := l$.

(4) Solange $i < n'$ ist, werden die Schritte (5) bis (9) wiederholt.

(5) Setze $i := i + 1$, $M' := \emptyset$.

(6) Für jede Festlegung A der Kanten zwischen dem Knoten i und den Knoten $i-l, \ldots, i-1$ werden die Schritte (7) und (8) wiederholt.

(7) Es sei ϕ_i das Potential des Knotens i und es seien δ_j, $j = i - l, \ldots, i - 1$, die Potentialänderungen der Knoten $i - l, \ldots, i - 1$, die sich aus der Festlegung A ergeben.

(8) Zu M' wird für jedes Tupel $(\phi_{i-l}, \ldots, \phi_{i-1}) \in M$ das Tupel $(\phi_{i-l} + \delta_{i-l}, \ldots, \phi_{i-1} + \delta_{i-1}, \phi_i)$ der neuen Potentialwerte der Knoten $i - l, \ldots, i$ hinzugefügt.

(9) Setze $M := \{(\phi_{i-l+1}, \ldots, \phi_i) \mid (\phi_{i-l}, \ldots, \phi_i) \in M',\ \phi_{i-l} \leq 0\}$.

(10) Wenn M mindestens ein Tupel $(\phi_{n'-l+1}, \ldots, \phi_{n'})$ enthält mit $\phi_j \leq 0$ für alle $j = n' - l + 1, \ldots, n'$, können alle ausstehenden Spiele der Zusammenhangskomponente so festgelegt werden, dass jeder Knoten ein Potential von höchstens 0 besitzt. STOP.

Die Korrektheit des Algorithmus wird mittels vollständiger Induktion bewiesen. Die Induktionsbehauptung lautet wie folgt. Für jede Festlegung der Kanten in H' enthält M in Schritt (4) genau die l-Tupel $(\phi_{i-l+1}, \ldots, \phi_i)$, für die eine Festlegung aller Kanten zwischen den Knoten $1, \ldots, i$ existiert, so dass die Knoten $1, \ldots, i-l$ ein Potential von höchstens 0 und die Knoten $i-l+1, \ldots, i$ die Potentialwerte $\phi_{i-l+1}, \ldots, \phi_i$ besitzen.

Die Behauptung gilt für $i = l$, da in Schritt (2) alle Festlegungen der Kanten zwischen den Knoten $1, \ldots, l$ betrachtet werden und die Tupel $(\phi_1, \ldots, \phi_l)$ der Potentialwerte der Knoten $1, \ldots, l$ in M eingefügt werden.

Die Behauptung gelte für $i = k - 1$. Gemäß dem Algorithmus enthält M in Schritt (4) für $i = k$ genau die l-Tupel $(\phi_{k-l+1}, \ldots, \phi_k)$, für die M in Schritt (4) für $i = k - 1$ ein l-Tupel $(\psi_{k-l}, \ldots, \psi_{k-1})$ enthält, so dass Folgendes gilt. Es gibt eine Festlegung der Kanten zwischen dem Knoten k und den Knoten $k - l, \ldots, k - 1$ (Schritt (6)), für die sich aus den Potentialwerten $\psi_{k-l}, \ldots, \psi_{k-1}$ die Potentialwerte $\phi_{k-l}, \ldots, \phi_{k-1}$ der Knoten $k - l, \ldots, k - 1$ ergeben mit $\phi_{k-l} \leq 0$, und der Knoten k das Potential ϕ_k besitzt (Schritt (7) und (8)). Aus der l-Lokalität des Graphen folgt, dass der Knoten k zu keinem der Knoten $1, \ldots, k - l - 1$ adjazent ist. Deshalb reicht es aus, um alle Festlegungen der Kanten zwischen dem Knoten k und den Knoten $1, \ldots, k-1$ zu betrachten, nur die Festlegungen der Kanten zwischen dem Knoten k und den Knoten $k - l, \ldots, k - 1$ zu betrachten. Da $\phi_{k-l} \leq 0$ ist, folgt aus der Induktionsbehauptung für $i = k - 1$ die Induktionsbehauptung für $i = k$.

Die Korrektheit des Algorithmus folgt offensichtlich aus der Induktionsbehauptung für $i = n'$, denn in Schritt (10) bedeutet dann ein Tupel $(\phi_{n'-l+1}, \ldots, \phi_{n'}) \in M$ mit $\phi_j \leq 0$ für alle $j = n' - l, \ldots, n'$, dass es eine Festlegung aller Kanten der Zusammenhangskomponente gibt, für die alle Knoten der Zusammenhangskomponente ein Potential von höchstens 0 besitzen.

Die Laufzeit des Algorithmus lässt sich wie folgt abschätzen. In Schritt (1) werden höchstens 3^h verschiedene Festlegungen betrachtet, da nach Voraussetzung jede Zusammenhangskomponente höchstens h Kanten aus H enthält. Mit jedem Knoten sind höchstens $\Delta := \Delta(G)$ Kanten inzident. In Schritt (2) werden nicht mehr als $3^{l\Delta}$ verschiedene Festlegungen betrachtet. Schritt (4) wird jeweils höchstens n'-mal iteriert. In Schritt (6) werden höchstens 3^Δ verschiedene Festlegungen betrachtet. Da mit jedem Knoten höchstens Δ Kanten inzident sind, kann das Potential eines Knotens nicht mehr als 3^Δ verschiedene Werte annehmen. Also enthalten M und M' nie mehr als $(3^\Delta)^{l+1}$ viele Elemente, und Schritt (8) und (9) können in Zeit $3^{O(l\Delta)}$ durchgeführt werden. Die Laufzeit des Algorithmus beträgt damit insgesamt $n' \cdot 3^{O(h+l\Delta)}$.

Der Algorithmus wird für jede Zusammenhangskomponente ausgeführt. Die gefragte Mannschaft kann genau dann Meister werden, wenn für jede Zusammenhangskomponente eine Festlegung aller zugehörigen Kanten existiert, für die alle Knoten der Zusammenhangskomponente ein Potential von höchstens 0 besitzen. Die Größen der einzelnen Zusammenhangskomponenten summieren sich zu n und es ergibt sich zusammen eine Laufzeit von $n \cdot 2^{c_2(h+l\Delta)}$ für eine geeignete Konstante c_2. □

Ein Graph, in dem jeder Knoten höchstens Grad 2 besitzt, besteht aus disjunkten Pfaden und Kreisen. Ein Kreis ist nach Entfernung einer Kante ein Pfad, und ein Pfad ist offensichtlich 1-lokal. Die zugehörige Permutation für einen Graphen mit n Knoten kann leicht in Zeit $O(n)$ berechnet werden. Damit ergibt sich unmittelbar aus Theorem 5.1.2:

Korollar 5.1.3. *MP ist in linearer Zeit entscheidbar, wenn jede Mannschaft nur noch höchstens zwei ausstehende Spiele besitzt. Insbesondere sind $(1, r, s)$-MP und $(2, r, s)$-MP in linearer Zeit entscheidbar, für $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Q}$, $s > 0$.*

Man beachte dabei, dass eine Eingabe für MP mit n Mannschaften die Größe $\Theta(n^2)$ hat. Die Aussage dieses Korollars wird auch in Bernholdt et al. (1999) bewiesen.

5.2 Der Spielplan der Fußball-Bundesliga

Ist n gerade, so erhält man auf die folgende Weise eine Kantenfärbung F_n mit $n - 1$ Farben des vollständigen Graphen K_n auf n Knoten. Die Konstruktion entspricht der aus Volkmann (1996). Siehe dazu Abbildung 5.2.1. In der Fußball-Bundesliga spielen 18 Mannschaften gemäß dem Spielplan F_{18}. Die Knotenmenge des Graphen sei $V = \{0, \ldots, n-1\}$. Die Knoten $0, \ldots, n-2$ werden als Ecken eines ebenen regulären $(n-1)$-Ecks aufgefasst, in das alle Diagonalen eingezeichnet sind. Für ein $l \in \{1, \ldots, n-1\}$ enthalte $F_n^{-1}(l)$, das ist die Menge der Kanten die den Spielen des l-ten Spieltages entsprechen, die Seitenkante $\{l-1, l \bmod (n-1)\}$ des $(n-1)$-Ecks sowie alle dazu parallelen Diagonalen. Das sind die Kanten $\{l-1-i \bmod (n-1), l+i \bmod (n-1)\}$ mit $i = 1, \ldots, n/2-2$. Ein Knoten $v \in \{0, \ldots, n-2\}$ bleibt dabei übrig. Für diesen enthalte $F_n^{-1}(l)$ zusätzlich die Kante $\{v, n-1\}$. Offensichtlich sind alle Kanten in $F_n^{-1}(l)$ knotendisjunkt und jede Kante des vollständigen Graphen ist in genau einer Menge $F_n^{-1}(l)$ enthalten. Damit ist der folgende Satz gezeigt.

Satz 5.2.1. *Für jeden vollständigen Graphen K_{2m} existiert eine Kantenfärbung mit $2m-1$ Farben. Diese kann in linearer Zeit berechnet werden.*

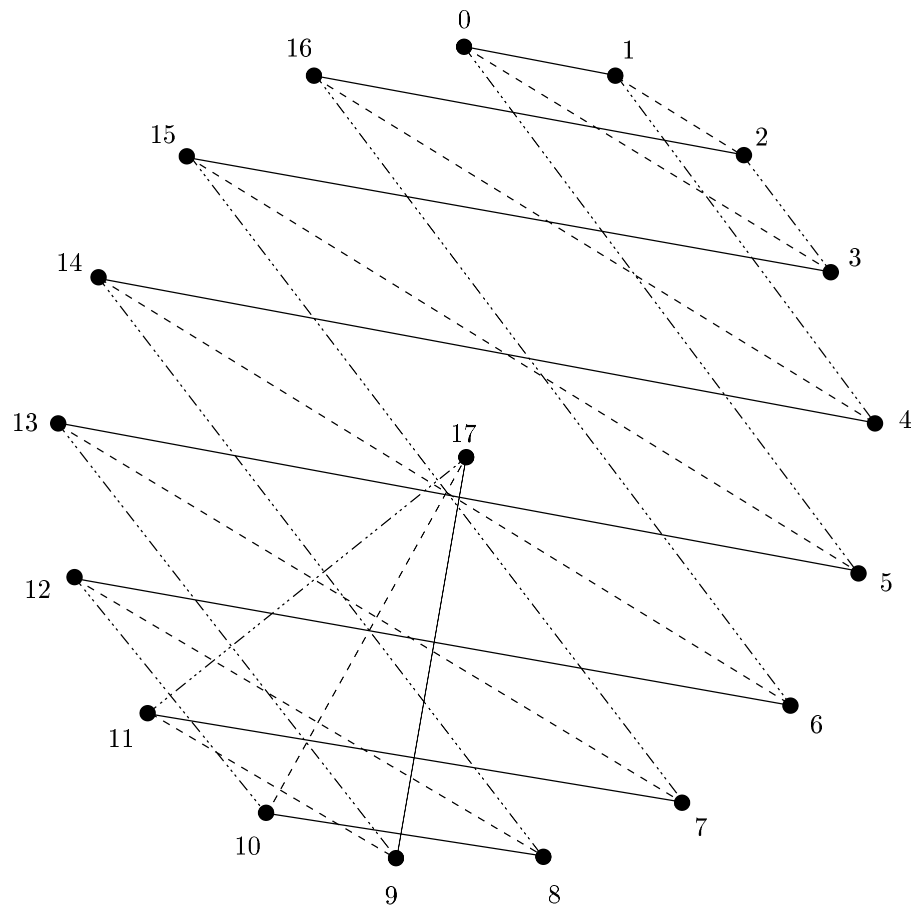

Abbildung 5.2.1: *Die ersten drei Spieltage des Spielplans F_{18} für die Fußball-Bundesliga. Die durchgezogenen Kanten entsprechen dem* 1. *Spieltag, die gestrichelten dem* 2. *und die gepunkteten dem* 3. *Spieltag.*

Sei $l \in \{1, \ldots, n-1\}$ und $i, j \in \{0, \ldots, n-2\}$. Genau dann, wenn ein $x \in \{0, \ldots, n-2\}$ existiert, so dass gilt

$$\{i, j\} = \{l - 1 - x \bmod (n-1), l + x \bmod (n-1)\}, \tag{5.1}$$

ist offensichtlich nach Konstruktion des Spielplans entweder $\{i, j\}$ eine zur Seitenkante $\{l-1, l \bmod (n-1)\}$ parallele Diagonale des $(n-1)$-Ecks und somit eine Kante in $F_n^{-1}(l)$, oder es ist $i = j$. Für jedes i existiert genau ein j, so dass Gleichung (5.1) für ein x erfüllt ist. Dieses j sei mit $v_l(i)$ bezeichnet.

Das folgende Theorem macht eine Aussage über die Lokalität des Graphen, der die Kanten enthält, die den ersten k Spieltagen des Spielplans F_n entsprechen. Zusammen mit Theorem 5.1.2 wird dieses Ergebnis zu einem effizienten

Algorithmus für (k, r, s)-MP führen, mit der zusätzlichen Bedingung, dass die Spiele gemäß dem Spielplan F_n ausgetragen werden.

Theorem 5.2.2. *Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade und G der Graph mit den Knoten $0, \ldots, n-1$, der die Kanten der ersten k Spieltage des Bundesliga-Spielplans F_n enthält. Nach Entfernung der mit Knoten $n-1$ inzidenten Kanten ist der Graph $(2k-3)$-lokal für $k \geq 2$ und 1-lokal für $k = 1$ bzgl. der Permutation π von $0, \ldots, n-1$:*

$$\pi(i) = \begin{cases} \frac{n}{2} + i + 1 \bmod (n-1) & \textit{falls } i \textit{ gerade,} \\ \frac{n}{2} - i \bmod (n-1) & \textit{falls } i \textit{ ungerade, } i \neq n-1, \\ n-1 & \textit{falls } i = n-1. \end{cases}$$

Beweis. Die mit dem Knoten $n-1$ inzidenten Kanten seien aus G entfernt und o.B.d.A. auch der dann isolierte Knoten $n-1$. Im Folgenden wird die Permutation π nur auf den Knoten $0, \ldots, n-2$ betrachtet. Es ist zu zeigen, dass der Graph bzgl. der Permutation π die behauptete Lokalitätseigenschaft besitzt. Zur Veranschaulichung siehe dazu Abbildung 5.2.2 und Abbildung 5.2.3.

Die Abbildung π ist eine Permutation von $\{0, \ldots, n-2\}$, denn für zwei verschiedene Elemente $i, j \in \{0, \ldots, n-2\}$, die entweder beide gerade oder ungerade sind, gilt nach Definition von π offensichtlich $\pi(i) \neq \pi(j)$. Angenommen es existieren i gerade, d.h. $i \in \{0, 2, \ldots, n-2\}$, und j ungerade, d.h. $j \in \{1, 3, \ldots, n-3\}$, mit $\pi(i) = \pi(j)$, dann gilt $n/2+i+1 \equiv n/2-j \bmod (n-1)$ und somit $i + j + 1 \equiv 0 \bmod (n-1)$, was einen Widerspruch darstellt, da n und i gerade sind, aber j ungerade ist.

Sei $l \in \{1, \ldots, n-1\}$ und $i, j \in \{0, \ldots, n-2\}$. Mit $v_l(i)$, siehe oben, ist auch bzgl. der Permutation π jedem i eindeutig ein j zugeordnet, so dass Gleichung (5.1) mit $\pi(i)$ und $\pi(j)$ für ein $x \in \{0, \ldots, n-2\}$ erfüllt ist, d.h.

$$\{\pi(i), \pi(j)\} = \{l - 1 - x \bmod (n-1), l + x \bmod (n-1)\}. \tag{5.2}$$

Es gilt $j = \pi^{-1}(v_l(\pi(i)))$. Dieses j sei mit $v_l^\pi(i)$ bezeichnet. Für den weiteren Beweis wird das folgende Lemma benötigt.

Lemma 5.2.3. *Für $i \in \{0, \ldots, n-2\}$ und $l \in \{2, \ldots, n-1\}$ gilt*

$$v_1^\pi(i) = \begin{cases} i+1 & \textit{falls } i \neq n-2 \textit{ gerade,} \\ n-2 & \textit{falls } i = n-2, \\ i-1 & \textit{falls } i \textit{ ungerade} \end{cases}$$

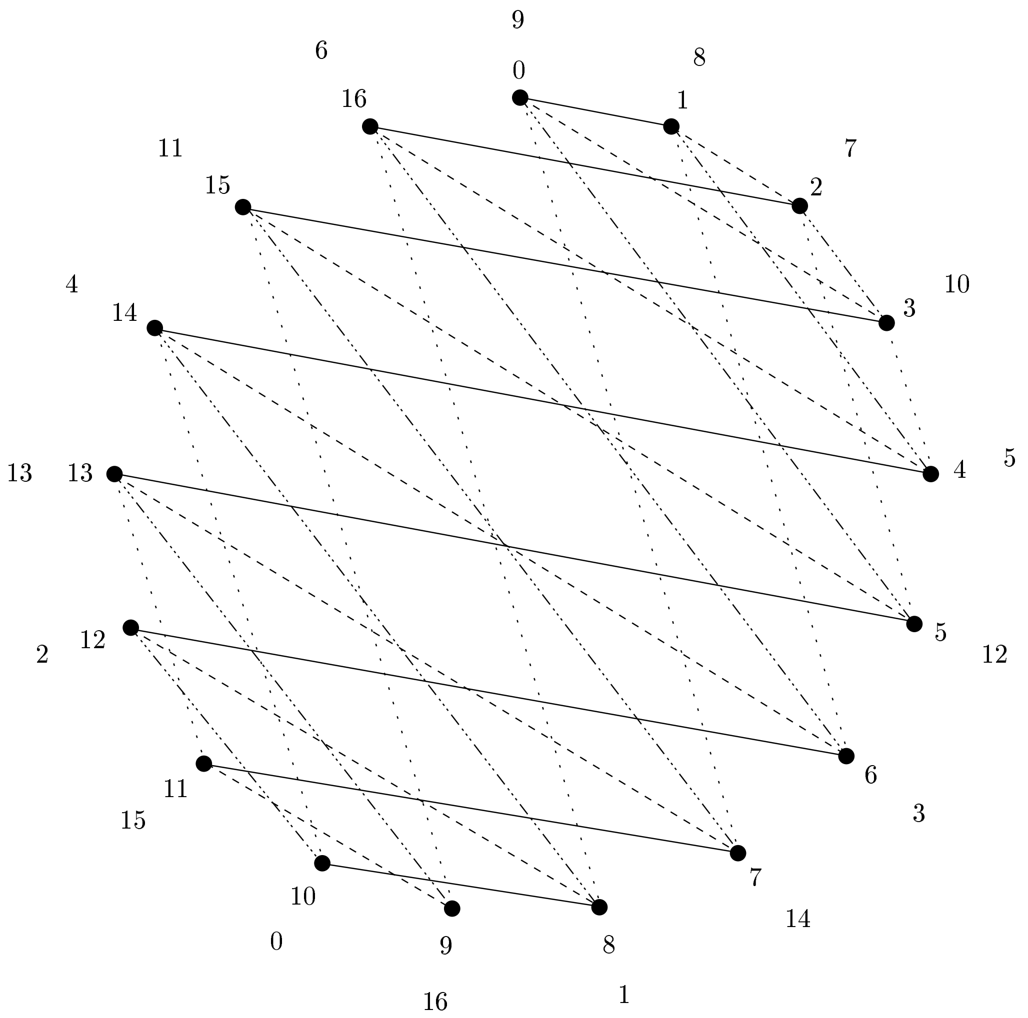

Abbildung 5.2.2: *Die ersten vier Spieltage des Spielplans F_n mit $n = 18$ ohne den Knoten $n-1$. Die inneren Zahlen sind die Knotennummern. Für die äußere Zahl j eines Knotens i gilt $\pi(j) = i$.*

und

$$v_l^\pi(i) = \begin{cases} v_{l-1}^\pi(i) + 2 & \textit{falls } v_{l-1}^\pi(i) \neq n-2 \textit{ gerade,} \\ n-3 & \textit{falls } v_{l-1}^\pi(i) = n-2, \\ v_{l-1}^\pi(i) - 2 & \textit{falls } v_{l-1}^\pi(i) \neq 1 \textit{ ungerade,} \\ 0 & \textit{falls } v_{l-1}^\pi(i) = 1. \end{cases}$$

Beweis von Lemma 5.2.3. Sei $i \in \{0, \ldots, n-2\}$. Für $j = v_1^\pi(i)$ gilt für ein

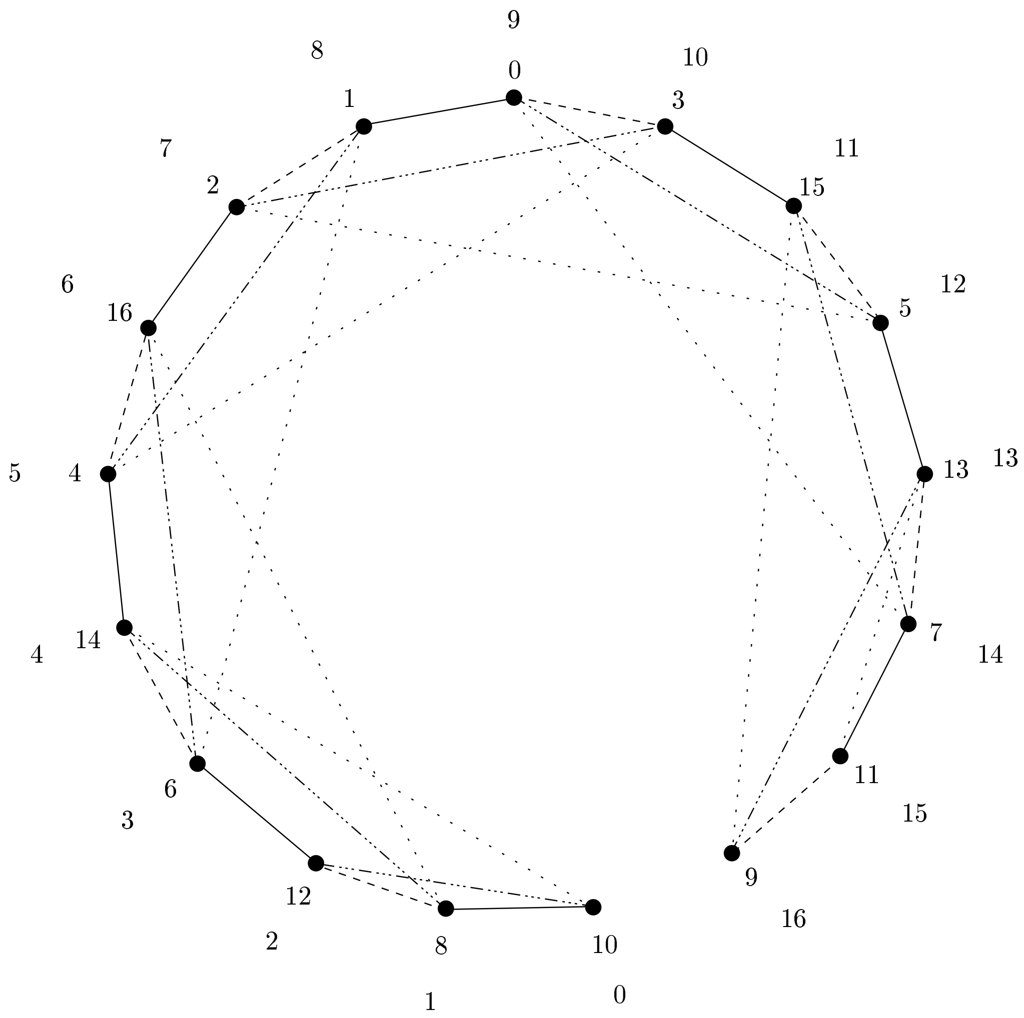

Abbildung 5.2.3: *Die ersten vier Spieltage des Spielplans F_n mit $n = 18$ ohne den Knoten $n-1$, wobei die Knoten gemäß der Permutation π angeordnet sind.*

$x \in \{0, \ldots, n-2\}$ Gleichung (5.2) mit $l = 1$ und es folgt

$$\pi(j) \equiv 1 + x \equiv 1 - (1 - 1 - x) \equiv 1 - \pi(i) \bmod (n-1). \tag{5.3}$$

Sei zunächst i gerade und $i \neq n-2$. In diesem Fall ist $i + 1 \bmod (n-1)$ ungerade und nach Definition von π und mit (5.3) gilt

$$\pi(j) \equiv 1 - (\frac{n}{2} + i + 1) \equiv \frac{n}{2} - (i+1) \equiv \pi(i+1) \bmod (n-1).$$

Damit ist $v_1^\pi(i) = \pi^{-1}(v_1(\pi(i))) = \pi^{-1}(j) = \pi^{-1}(\pi(i+1)) = i+1$. Für $i = n-2$ gilt

$$\pi(j) \equiv 1-\pi(n-2) \equiv 1-(\frac{n}{2}+n-2+1) \equiv \frac{n}{2}+n-2+1 \equiv \pi(n-2) \bmod (n-1),$$

d.h. $v_1^\pi(i) = n-2$. Sei nun i ungerade. Dann ist $i-1 \bmod (n-1)$ gerade und nach Definition von π und mit (5.3) gilt

$$\pi(j) \equiv 1 - (\frac{n}{2} - i) \equiv \frac{n}{2} + (i-1) + 1 \equiv \pi(i-1) \bmod (n-1),$$

d.h. $v_1^\pi(i) = i-1$.

Jetzt wird $v_l(i)$ für $l \in \{2,\ldots,n-2\}$ betrachtet. Für $j = v_l^\pi(i)$ und $j' = v_{l-1}^\pi(i)$ existieren $x, x' \in \{0,\ldots,n-2\}$, so dass jeweils Gleichung (5.2) erfüllt ist, d.h.

$$\{\pi(i), \pi(j)\} = \{l-1-x \bmod (n-1), l+x \bmod (n-1)\}$$

und

$$\{\pi(i), \pi(j')\} = \{l-2-x' \bmod (n-1), l-1+x' \bmod (n-1)\}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\pi(j) &\equiv l + x \equiv 2l-1-(l-1-x) \equiv 2l-1-\pi(i)\\ &\equiv 2l-1-(l-2-x') \equiv (l-1+x')+2\\ &\equiv \pi(j')+2 \bmod (n-1).\end{aligned} \tag{5.4}$$

Sei zunächst j' gerade und $j' \leq n-4$. In diesem Fall ist auch $j'+2 \bmod (n-1)$ gerade, und nach Definition von π folgt aus Gleichung (5.4)

$$\pi(j) \equiv \frac{n}{2} + j' + 3 \equiv \frac{n}{2} + (j'+2) + 1 \equiv \pi(j'+2) \bmod (n-1).$$

Damit ist $v_l^\pi(i) = \pi^{-1}(v_l(\pi(i))) = \pi^{-1}(j) = \pi^{-1}(\pi(j'+2)) = j'+2 = v_{l-1}^\pi(i)+2$. Für $j' = n-2$ gilt

$$\pi(j) \equiv \pi(n-2) + 2 \equiv \frac{n}{2} + n + 1 \equiv \frac{n}{2} - (n-3) \equiv \pi(n-3) \bmod (n-1),$$

d.h. $v_l^\pi(i) = n-3$. Sei nun j' ungerade und $j' \geq 3$. Dann ist auch $j'-2 \bmod (n-1)$ ungerade, und nach Definition von π folgt aus Gleichung (5.4)

$$\pi(j) \equiv \frac{n}{2} - j' + 2 \equiv \frac{n}{2} - (j'-2) \equiv \pi(j'-2) \bmod (n-1),$$

d.h. $v_l^\pi(i) = v_{l-1}^\pi(i) - 2$. Für $j' = 1$ gilt

$$\pi(j) \equiv \pi(1) + 2 \equiv \frac{n}{2} - 1 + 2 \equiv \frac{n}{2} + 1 \equiv \pi(0) \bmod (n-1),$$

d.h. $v_l^\pi(i) = 0$. Damit ist das Lemma bewiesen. □

Die $(2k-3)$-Lokalität des Graphen wird mittels vollständiger Induktion gezeigt. Die Induktionsbehauptung für $l \in \{2,\dots,n-1\}$ lautet wie folgt. Für alle $i \in \{0,\dots,n-2\}$ gilt

$$|i - v_l^\pi(i)| \leq 2l - 3.$$

Im Fall $v_1^\pi(i) = 1$ oder $v_1^\pi(i) = n-2$ ist nach Lemma 5.2.3 offensichtlich $|i - v_2^\pi(i)| \leq 1$. Falls $v_1^\pi(i) \in \{0,\dots,n-2\} \setminus \{1, n-2\}$ ist, folgt aus Lemma 5.2.3

$$|i - v_2^\pi(i)| = |i - (v_1^\pi(i) \pm 2)| = |i - (i \mp 1 \pm 2)| = |\pm 1 \mp 2| = 1.$$

Man beachte dabei, dass $v_1^\pi(i)$ gerade ist, falls i ungerade ist, und umgekehrt $v_1^\pi(i)$ ungerade ist, wenn i gerade ist. Damit ist die Induktionsbehauptung für $l = 2$ gezeigt.

Sei nun $l \geq 3$. Jetzt folgt mit der Dreiecksungleichung aus Lemma 5.2.3 und der Induktionsbehauptung für $l-1$

$$\begin{aligned}|i - v_l^\pi(i)| &\leq |i - v_{l-1}^\pi(i)| + |v_{l-1}^\pi(i) - v_l^\pi(i)|\\ &\leq |i - v_{l-1}^\pi(i)| + 2\\ &\leq 2(l-1) - 3 + 2\\ &= 2l - 3.\end{aligned}$$

Damit ist die Induktionsbehauptung für $l \in \{2,\dots,n-1\}$ gezeigt.

Zudem folgt aus Lemma 5.2.3 offensichtlich $|i - v_1^\pi(i)| \leq 1$.

Nun kann der Beweis des Theorems beendet werden. Jede Kante $\{\pi(i), \pi(j)\}$ des Graphen ist in einer Menge $F_n^{-1}(l)$ enthalten, mit $l = 1,\dots,k$. Aus der Induktionsbehauptung folgt für $l \geq 2$, dass $|i-j| = |i - v_l^\pi(i)| \leq 2l-3 \leq 2k-3$ ist, d.h. der Knoten $\pi(i)$ ist zu keinem der Knoten $\pi(1),\dots,\pi(i-(2k-3)-1)$ adjazent. Für $l = 1$ ist $|i-j| = |i - v_l^\pi(i)| \leq 1$. Der Graph ist also $(2k-3)$-lokal für $k \geq 2$ und 1-lokal für $k = 1$. Es folgt die Behauptung des Theorems. □

In der Fußball-Bundesliga spielen 18 Mannschaften nach der 3-Punkteregel in 2 Runden gemäß dem Spielplan F_{18}. Betrachtet man die Verallgemeinerung auf n Mannschaften, dann entspricht das Problem, zu einer bestimmten Situation genau vor den letzten k Spieltagen zu entscheiden, ob eine bestimmte Mannschaft noch Meister werden kann, dem Problem $(k, 2, 3)$-MP mit der zusätzlichen Bedingung, dass der Spielplan in der Eingabe der Spielplan F_n ist. Aus dem folgenden Korollar folgt, dass dieses Problem effizient gelöst werden kann, wenn dabei $k = O((\log n)^{1/2})$ gilt, und sogar in linearer Zeit gelöst werden kann für konstantes k. Das Korollar ergibt sich als Anwendung von Theorem 5.1.2 aus Theorem 5.2.2.

Korollar 5.2.4. *Sei $s \in \mathbb{Q}$, $s > 0$ und $k, r \in \mathbb{N}$. Wird (k, r, s)-MP auf Eingaben eingeschränkt, für die der Spielplan in der Eingabe der Spielplan F_n der Fußball-Bundesliga ist, so ist das Problem in Zeit $2^{O(k^2)} n^2$ entscheidbar. Insbesondere ist dieses polynomiell für $k = O((\log n)^{1/2})$ und sogar linear für konstantes k.*

Beweis. Aus Symmetriegründen kann o.B.d.A. angenommen werden, dass genau die ersten k Spieltage ausstehen. Werden aus dem zur Eingabe gehörigen Multigraphen die mit Knoten $n-1$ inzidenten k Kanten entfernt, so ist der Multigraph nach Theorem 5.2.2 $(2k-3)$-lokal für $k \geq 2$ und 1-lokal für $k = 1$ bzgl. der dort angegebenen Permutation π. Aus Theorem 5.2.1 folgt damit für $h = k$, $\Delta = k$ und $l = 2k-3$, dass in Zeit $n^2 \cdot 2^{O(h+l\Delta)} = n^2 \cdot 2^{O(k^2)}$ entschieden werden kann, ob die gefragte Mannschaft noch Meister werden kann.

Da die Eingabe die Größe $\Theta(n^2)$ hat, ist $n^2 \cdot 2^{O(k^2)}$ für konstantes k linear bzgl. der Eingabegröße. $\square$

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde die algorithmische Komplexität des Meisterschaftsproblems untersucht. Die wesentlichen Ergebnisse sollen hier noch einmal kurz zusammengefasst und einige interessante noch offene Fragestellungen aufgezeigt werden.

Für den Fall, dass nach der s-Punkteregel gespielt wird mit $s \leq 1$ oder $s = 2$, konnten effiziente Algorithmen für das Meisterschaftsproblem angegeben werden. Dazu wurde im Fall $s < 1$ gezeigt, dass das Problem durch polynomiell viele Anwendungen eines Algorithmus für das Baseball Elimination Problem gelöst werden kann, für das es bereits effiziente Algorithmen gibt. Im Fall $s = 1$ oder $s = 2$ kann das Problem direkt auf das Baseball Elimination Problem zurückgeführt werden.

Für den Fall $s > 1$ und $s \neq 2$ wurde die NP-Vollständigkeit des noch spezielleren Problems (k, r, s)-MP gezeigt, für alle $r \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 3$. Die NP-Vollständigkeit der allgemeineren Probleme folgt automatisch. Hier werden nach einem anzugebenden Spielplan r Runden unter der s-Punkteregel gespielt und noch genau die letzten k Spieltage der Saison stehen aus. Im Fall $s > 1$ und $s \neq 2$ ist es also insbesondere schon vor dem drittletzten Spieltag einer Saison ein NP-vollständiges Problem, zu entscheiden, ob eine bestimmte Mannschaft noch Meister werden kann. Setzt man voraus, dass die allgemein akzeptierte sogenannte NP $\neq$ P-Vermutung richtig ist, gilt der Beweis der NP-Vollständigkeit eines Problems als Beweis dafür, dass für dieses Problem keine effizienten Algorithmen existieren. Für den Beweis wurde zunächst die NP-Vollständigkeit des Problems $(3, 1, s)$-MP mittels einer polynomiellen Reduktion ausgehend von dem NP-vollständigen Problem „Vierdimensionales

Matching“ gezeigt. Das Problem $(3,1,s)$-MP diente dann als Ausgangsproblem für die weiteren Reduktionsbeweise.

Die NP-Vollständigkeit von (k,r,s)-MP wurde noch allgemeiner gezeigt, und zwar für polynomiell in der Anzahl n von Mannschaften berechenbare Funktionen $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass für ein $\varepsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt: $3 \leq k(n) \leq n/2 - n^{\varepsilon}$ für alle $n \geq n_0$. D.h. auch wenn noch „fast“ die Hälfte der letzten Runde aussteht, ist es NP-vollständig zu entscheiden, ob eine bestimmte Mannschaft Meister werden kann. Hier stellt sich die Frage, ob dieses Resultat für noch allgemeinere Funktionen k gilt, die etwa nur einer Einschränkung unterliegen wie „$3 \leq k(n) \leq nr/2 - n^{\varepsilon}$“, dabei sind $nr/2 - n^{\varepsilon}$ Spieltage „fast“ die Hälfte aller Spieltage der Saison.

Die NP-Vollständigkeitsresultate implizieren, dass die Berechnung eines Schwellwertes, dessen Existenz für die Fälle mit $s \geq 1$ garantiert ist, im jeweiligen Fall NP-hart ist.

Auf der anderen Seite kann zu Beginn einer Saison jede Mannschaft noch Meister werden. Für den Fall $s < 2$ wurde gezeigt, dass jede Mannschaft noch Meister werden kann, unabhängig von den Ergebnissen der bereits ausgetragenen Spiele, wenn noch mindestens die letzten $2/3$ aller Spieltage der Saison ausstehen. Im Fall $s \geq 2$ reicht dazu schon aus, dass bei einer geraden Anzahl von Runden noch mindestens die letzte Saisonhälfte aussteht, oder bei einer ungeraden Anzahl von Runden zusätzlich dazu noch eine gewisse Anzahl von Spieltagen aussteht, die aber nicht mehr als $1/6$ einer weiteren Runde beträgt.

Für den Fall, dass jede Mannschaft nur noch höchstens zwei ausstehende Spiele besitzt, kann das Problem in linearer Zeit gelöst werden. Dieses folgt aus einem allgemeineren Resultat, das einen effizienten Algorithmus für den Fall liefert, dass der den ausstehenden Spielen in der Eingabe entsprechende Multigraph eine gewisse Lokalitätseigenschaft erfüllt. Diese bedeutet im wesentlichen, dass sich die Knoten des Graphen, nach der Entfernung von geeigneten nicht „zu vielen“ Kanten, so in einer Folge anordnen lassen, dass sich die Nachbarn jedes Knotens nicht zu weit vor bzw. nach diesem Knoten in der Folge befinden. Insbesondere wurde dieses Resultat auf den Fall angewendet, dass die Spiele gemäß dem verallgemeinerten Spielplan F_n der Fußball-Bundesliga ausgetragen werden. Für diesen Spielplan wurde gezeigt, dass er eine geeignete Lokalitätseigenschaft besitzt, so dass man für (k,r,s)-MP unter der Einschränkung, dass gemäß dem Spielplan F_n gespielt wird und $k = O((\log n)^{1/2})$ gilt, einen effizienten Algorithmus erhält. Für konstantes k erhält man sogar einen Algorithmus, der in linearer Zeit arbeitet. Hier ist von weiterem Interesse, für welche $k = \Omega((\log n)^{1/2})$ sich das Problem effizient lösen lässt bzw. NP-vollständig ist.

In der Fußball-Bundesliga spielen 18 Mannschaften nach der 3-Punkteregel in 2 Runden gemäß dem Spielplan F_{18}. Auf n Mannschaften verallgemeinert entspricht hier das Problem, zu einer bestimmten Situation genau vor den letzten k Spieltagen zu entscheiden, ob eine bestimmte Mannschaft noch Meister werden kann, dem Problem $(k, 2, 3)$-MP mit der zusätzlichen Bedingung, dass der Spielplan in der Eingabe der Spielplan F_n ist. Das eben beschriebene Resultat impliziert für konstantes k bzw. $k = O((\log n)^{1/2})$ einen linearen bzw. polynomiellen Algorithmus.

Literaturverzeichnis

Adler, I., Erera, A., Hochbaum, D. und Olinich, E. (1998). Baseball, optimization and the world wide web. Unveröffentlichtes Manuskript.

Ahuja, R. K., Magnanti, R. L. und Orlin, J. B. (1993). *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications.* Prentice-Hall.

Bernholdt, T., Gülich, A., Hofmeister, T. und Schmitt, N. (1999). Football elimination is hard to decide under the 3-point-rule. Proceedings of the 24th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science, Lecture Notes in Computer Science 1672, 410–418. Springer Verlag.

Cole, R. und Hopcroft, J. (1982). On edge coloring bipartite graphs. SIAM Journal on Computing 11, 540–546.

Cook, W. J., Cunningham, W. H., Pulleyblank, W. R. und Schrijver, A. (1998). *Combinatorial Optimization.* John Wiley & Sons.

Cormen, T. H., Leiserson, C. E. und Rivest, R. L. (1990). *An Introduction to Algorithms.* McGraw-Hill.

Gallo, G., Grigoriadis, M. D. und Tarjan, R. E. (1989). A fast parametric maximum flow algorithm and applications. SIAM Journal on Computing 18, 30–55.

Garey, M. R. und Johnson, D. S. (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness.* W. H. Freeman and Company.

Galil, Z. und Leven, D. (1983). NP-completeness of finding the chromatic index of regular graphs. Journal of Algorithms 4, 35–44.

Gusfield, D. und Martel, C. (1992). A fast algorithm for the generalized parametric minimum cut problem and applications. Algorithmica 7, 499–519.

Gusfield, D. und Martel, C. (1999). The structure and complexity of sports elimination numbers. Technical Report CSE-99-1. CS Department, Univ. California, Davis.

Hoffman, A. und Rivlin, T. (1970). When is a team 'mathematically' eliminated? Proceedings of the Princeton Symposium on Mathematical Programming, 391–401.

McCormick, S. T. (1996). Fast algorithms for parametric scheduling come from extensions to parametric maximum flow. Proceedings of the 28th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 394–422.

Robinson, L. W. (1991). Baseball playoff elimination an application of linear programming. Operations Research Letters 10, 67–74.

Schrijver, A. (1998). Bipartite edge coloring in $O(\Delta m)$ time. SIAM Journal on Computing 28(3), 841–846.

Schwartz, B. (1966). Possible winners in partially completed tournaments. SIAM Review 8, 302–308.

Volkmann, L. (1996). *Fundamente der Graphentheorie.* Springer Verlag.

Wayne, K. D. (1999). A new property and a faster algorithm for baseball elimination. Proceedings of the 10th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, 815–819.

Wegener, I. (1999). *Theoretische Informatik: Eine algorithmische Einführung.* 2. Auflg. Teubner Verlag.