Maike Buchin
Daniel Pasler
Christoph Ries

17. Dezember 2019
Abgabe bis 14.01.20 - 12:00 Uhr
Zettelkästen IA 0

Übungen zur Vorlesung

Theoretische Informatik

WS 19/20

(Weihnachts-)Blatt 10

Bemerkung:
Es dürfen nur die eingeführten Konstrukte

- $x_i := x_j + c$
- $x_i := x_j$
- $x_i := c$
- $x_i := x_j + x_k$
- $x_i := x_j * x_k$
- $x_i := x_j - c$
- IF $x = 0$ THEN A END (nur für 10.1)
- $x_i := x_j$ MOD x_k
- $x_i := x_j$ DIV x_k

zu den programmspezifischen Konstrukten (siehe Skript) verwendet werden. Weitere Konstrukte können verwendet werden, wenn sie durch bereits bekannte Konstrukte definiert werden. Statt $x_0, \ldots, x_k$ dürfen auch andere Variablennamen verwendet werden. Es muss jedoch angegeben werden, welche Variablen die Ein- und Ausgabe enthalten.

Aufgabe 10.1

In der Werkstatt des Weihnachtsmanns gibt es eine penible Qualitätssicherung. Es sollen nur Objekte ausgeliefert werden, die sich tatsächlich als Geschenk eignen. Die Brauchbarkeit wird dabei mit Hilfe der partiell definierten Funktion

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ in der Dezimalbruchentwicklung von } n^{-1} \text{ auftaucht} \\ \text{undefiniert}, & \text{sonst} \end{cases}$$

bestimmt. Jedes Objekt wurde von den Wichteln katalogisiert und eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ zugewiesen. Ist $f(n) = 1$, darf das Objekt verpackt und als Geschenk unter den Baum gebracht werden. (Hoffen wir mal, dass die Wichtel die Zahlen so zugewiesen haben, dass nur die wünschenswerten Objekte es zum Geschenk schaffen...). Hilf dem Weihnachtsmann und seinen Wichteln bei dieser Qualitätssicherung. Gib ein WHILE-Programm an, welches die obige Funktion f berechnet. Kommentiere dein Programm!

Bemerkung: Eine k-stellige natürliche Zahl x taucht in der Dezimalbruchentwicklung von x^{-1} auf, wenn es k aufeinanderfolgende Stellen in dieser Dezimalbruchentwicklung gibt, die mit den k Ziffern von x übereinstimmen, z.B. $14^{-1} = 0.07\mathbf{14}285...$ oder $618^{-1} = 0.001\mathbf{618}12....$

— Bitte wenden! —

Aufgabe 10.2
Wie jedes Jahr ist um die Weihnachtszeit viel zu tun. Die Wichtel sind mit der Qualitätssicherung der Geschenke beschäftigt. Die Aufgabe der Rentiere ist es, zusammen mit dem Weihnachtsmann diese rechtzeitig unter den Baum zu bringen. Um die fleißigen Rentiere dieses Jahr etwas zu entlasten, hat sich eine aufopfernde Schildkröte bereit erklärt zu helfen. Der Weg, den die Schildkröte dieses Weihnachten zu absolvieren hat, ist in Abbildung 1 zu sehen. Gewissenhaft besucht sie jedes Feld einmal. Da sie auf jedem Feld ein Geschenk abladen muss, braucht sie für jedes Feld einen Schritt.

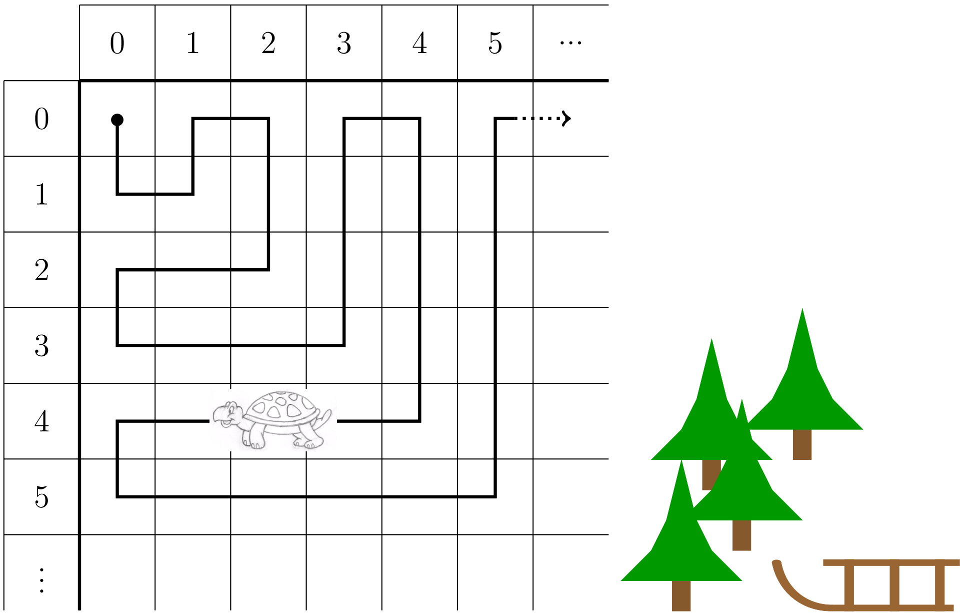


Abbildung 1: Der Weihnachtsweg der hilfsbereiten Schildkröte

Um es der Schildkröte etwas einfacher zumachen, schreibe ein GOTO-Programm, welches ihr angibt, welches Feld sie beim t-ten Schritt besuchen soll. Das Programm soll die Koordinaten x, y des entsprechenden Feldes liefern.

Beispiel: Nach $t = 7$ (bzw. $t = 12$) Schritten befindet sich die fleißige Schildkröte an der Position $(1, 2)$ (bzw. $(3, 3)$).

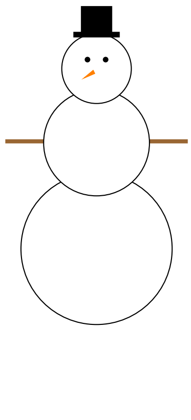
Aufgabe 10.3

a) Beim Verteilen der Geschenke wird die Schildkröte auf einmal stutzig. Ihr Blick fällt auf ein Geschenk, welches in ihrer Liste mit der Zahl 6 vermerkt ist. Die Teiler von 6 sind $1, 2, 3, 6$ und deren Summe ist $1 + 2 + 3 + 6 = 12$, das doppelte der Ursprungszahl. Aufgeregt schweift ihr Blick weiter über die Liste und bleibt beim Geschenk mit der Nummer 28 hängen. Die Summe aller Teiler von 28 ist $1+2+4+7+14+28 = 56$, wieder das Doppelte! Wie kann das sein? Ist dies Zufall oder gibt es beliebig viele Zahlen mit dieser Eigenschaft? Die Schildkröte ist entzückt von ihrer Beobachtung und grübelt über diese Fragen nach. Ein paar Geschenke und Felder später stellt sie fest, dass die Sprache

$$L = \{n \in \mathbb{N} \mid \begin{array}{l}\text{es gibt ein } m > n \text{, wobei die Summe aller Teiler} \\ \text{von } m \text{ das Doppelte von } m \text{ ergibt}\}\end{array}$$

entscheidbar ist. Mache es der Schildkröte nach. Zeige, dass L entscheidbar ist, obwohl es leider nicht bekannt ist, wieviele Zahlen es mit obiger Eigenschaft gibt.

b) Dann endlich ist es geschafft. Alle Geschenke sind verteilt. Etwas müde aber überglücklich macht sich die Schildkröte auf den Rückweg, dabei kommt ihr wieder ihre gefundene entscheidbare Sprache in den Sinn. Sie stellt sich die Frage, was passiert, wenn man zwei Sprachen kombiniert. Angenommen man hat eine Sprache L_1, die entscheidbar ist, und zusätzlich eine aufzählbare Sprache L_2. Was kann man dann über die Differenz bzw. den Schnitt der beiden Sprachen sagen? Kommst du auf das selbe Ergebnis wie die Schildkröte?
Zeige, dass sowohl $L_2 \setminus L_1$ als auch $L_1 \cap L_2$ aufzählbar sind.



Aufgabe 10.4

Dank der Wichtel, Rentiere und der Schildkröte steht der Bescherung nichts mehr im Weg. An Heiligabend findet Fridolin unter dem Baum ein tolles Geschenk. Seine erste eigene Turingmaschine. Aufgeregt vergräbt er sich gleich in der Anleitung. Die ersten Seiten beschreiben den Aufbau. Seine Maschine $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta,$ ⛄, ⛄, $E)$ ist deterministisch und zeichnet sich durch die Zustandsmenge $Z = \{$⛄, 🎄, 🎁, 🛷, 🎅$\}$, dem Eingabealphabet $\Sigma = \{$🎄, 🎁, 🛷$\}$ und dem Bandalphabet $\Gamma = \{$⛄, 🎄, 🎁, 🛷$\}$ aus. Der einzige Endzustand der Maschine ist 🎅. Auf der folgenden Seite wird ihre Funktionsweise beschrieben:

δ	⛄	🎄	🎁	🛷
⛄		(🎁, 🎄, R)	(🎄, 🎁, R)	(🎄, 🛷, L)
🎄	(⛄, 🛷, R)	(🛷, 🎄, R)	$\rightarrow$	$\leftarrow$
🎁		$\rightarrow$	(🛷, 🎁, R)	$\leftarrow$
🛷	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	(🎅, 🛷, N)

.

Fridolin will sofort loslegen. Aber Achtung: fast hätte er den Warnhinweis überlesen. Die Maschine darf auf gar keinen Fall auf einer Eingabe angesetzt werden, auf der sie nicht hält. Ansonsten erlischt die Garantie. Hilf dem Kleinen, damit er lange Spaß an seinem Geschenk hat. Begründe, warum es entscheidbar ist, ob M auf einer Eingabe $x \in \Sigma^*$ angesetzt hält.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch in das neue Jahr

2020