Stef Sijben — Bochum, den 5. Februar 2014

Präsenzaufgaben zur Vorlesung

Theoretische Informatik

WS 13/14

Wiederholungsblatt

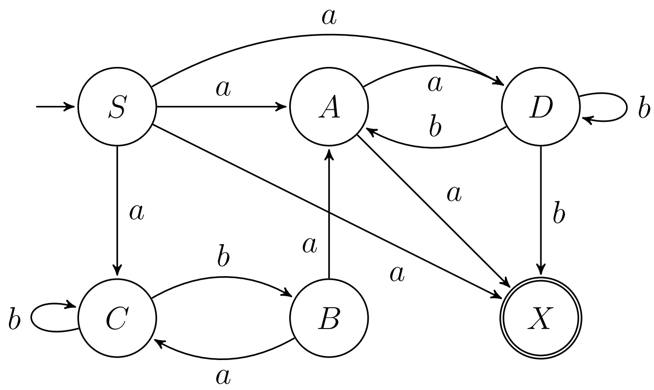
Präsenzaufgabe 14.1

Gegeben sei folgende reguläre Grammatik $G = (V, \Sigma, S, P)$.
$V = \{S, A, B, C, D\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $S =$ Startvariable.

$$S \to aD|aA|aC|a \qquad A \to aD|a$$
$$B \to aA|aC \qquad C \to bC|bB$$
$$D \to bD|bA|b$$

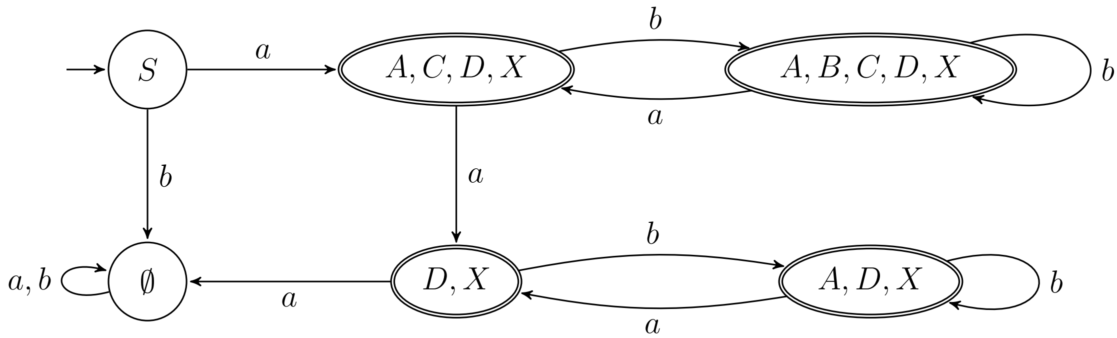
a) Gib einen NFA an, der dieselbe Sprache akzeptiert.

Lösung:



b) Bestimme einen minimalen DFA, der dieselbe Sprache akzeptiert.

Lösung:



Dieser DFA erhält man durch Benutzen der Potenzmengenkonstruktion beim NFA aus Aufgabe a). Man kann verifizieren, dass es keine Paare von equivalenten Zuständen gibt, also dieser DFA ist minimal.

Präsenzaufgabe 14.2
Weise nach, dass folgende Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1, \#\}$ nicht kontextfrei ist.

$$L = \{t\#s | t, s \in \{0,1\}^* \text{ und } t \text{ ist Teilwort von } s\}$$

Lösung:
Sei $n \geq 1$ beliebig.

Wähle $z = 0^n 1^n \# 0^n 1^n \in L$ mit $|z| = 4n + 1 \geq n$.

Sei $z = uvwxy$ eine beliebige Zerlegung von z mit $1 \leq |vx| \leq |vwx| \leq n$.

Dann gibt es folgende Fälle zu unterscheiden:

Fall 1 vx enthält das Trennzeichen # oder vx enthält nur Buchstaben aus dem Wortteil hinter dem Trennzeichen. D.h. vwx ist Substring von s. Dann wähle $i = 0$. Damit fällt das Wort aus der Sprache, da nun entweder das Trennzeichen aus dem Wort fällt oder $|s| < |t|$ und s damit t nicht mehr als Substring enthalten kann.

Fall 2 vx enthält nur Buchstaben aus dem vorderen Wortteil also aus t. Dann wähle $i = 2$. Damit ist wieder $|t| > |s|$ und kann daher kein Substring mehr sein

Fall 3 w entält das Trennzeichen und weder v noch x sind leer. Dann kann aber wegen der Bedingung $|vwx| \leq n$ das v nur Einsen enthalten und das x nur Nullen. Wähle $i = 0$. Dann verringert sich die Anzahl der Nullen in s und somit kann t welches noch n Nullen enthält kein Teilwort mehr von s sein.

Insgesamt folgt also nach dem Pumping-Lamma, dass L nicht kontextfrei ist.

Präsenzaufgabe 14.3
Schreibe ein WHILE-Programm das einen Bruch vollständig kürzt. Eingabe seien Zähler z und Nenner n eines Bruches.
Ausgegeben werden sollen Zähler und Nenner des vollständig gekürzten Bruches.

Erläutere die Arbeitsweise des Programmes.

Lösung:
Eingabe: z, n
$t := 2;$
WHILE $n - t + 1 \neq 0$ DO
    WHILE z MOD $t + n$ MOD $t = 0$ DO
        $z := z$ DIV t;
        $n := n$ DIV t;
    END;
    t := t+1
END
Ausgabe: z, n

Das Programm teils Zähler und Nenner durch t, bis t keine gemeinsame Teiler von z und n mehr ist (also z MOD $t \neq 0$ oder n MOD $t \neq 0$). Dann wird t um 1 erhöht und wird dieses Verfahren widerholt, bis $t > n$ ist und es also keine Teiler von n mehr gibt die größer als t sind. Wenn das Program hält, sind z und n also teilerfremd und ist der Bruch gekürzt.

Präsenzaufgabe 14.4
Das Problem DOMINATING SET ist wie folgt definiert.

Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ mit $0 < k \leq |V|$.
Frage: Gibt es eine Teilmenge $D \subseteq V$ mit $|D| \leq k$, sodass für alle $u \in V \setminus D$ ein $v \in D$ existiert mit $\{u, v\} \in E$. D.h. ist jeder Knoten außerhalb von D über eine Kante mit einem Knoten innerhalb von D verbunden?

Führe eine polynomielle Reduktion von VERTEX COVER auf DOMINATING SET durch um zu zeigen, dass DOMINATING SET NP-hart ist.

Lösung:
Bilde die Eingabe von VERTEX COVER $\mathcal{I} = (G, k)$ ab auf $\mathcal{I}' = (G', k)$.

Dabei geht $G'(V', E')$ wie folgt aus $G = (V, E)$ hervor geht:

Füge für jede Kante aus $\{v_i, v_j\} \in E$ einen zusätzlichen Knoten $v_{i,j}$ ein. Verbinde diesen neuen Knoten, mit den beiden Endknoten der Kante. Lösche alle isolierten Knoten aus G

$V' = (V \setminus \{v | v \in V, v \text{ ist isolierter Knoten in } G\}) \cup \{v_{i,j} | \{v_i, v_j\} \in E, i \leq j\}$
$E' = E \cup \{\{v_{i,j}, v_i\}, \{v_{i,j}, v_j\} | v_{i,j} \in V'\}$

Diese Abbildung ist offensichtlich in polynomieller Zeit berechenbar.

Sei nun $C \subseteq V$ ein VERTEX COVER in G mit $|C| \leq k$. Dann ist C eine DOMINATING SET in G' mit $|C| \leq k$. Denn ein Knoten in G' der nicht in C liegt ist entweder ein Knoten aus V, dann ist er nicht isoliert und hat somit eine Kante. Diese muss aber durch einen Knoten aus C mit diesem verbunden sein, oder er liegt in V' V, dann ist er durch die neuen Kanten mit den Endknoten einer Kante aus G verbunden, da diese durch C überdeckt worden sein muss, muss mindestens einer dieser Knoten in C liegen.

Sei $D \subseteq V'$ eine DOMINATING SET in G' mit $|D| \leq k$. Dann ist C ein VERTEX COVER in G, wenn C aus D wie folgt hervorgeht. $C = V \cap D$ zudem füge für jeden Knoten $v_{i,j} \in V' \setminus V$ einen der Knoten v_i oder v_j in C ein.
Dann ist $|C| \leq |D| \leq k$.
Sei $\{v_i, v_j\} \in E$ eine Kante in G. Nehmen wir an v_i und v_j liegen beide nicht in C also auch nicht in D, so kann auch $v_{i,j}$ nicht in D gelegen haben. Dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass D eine DOMINATING SET ist, denn $v_{i,j}$ ist in G' nur mit v_i und mit v_j verbunden.