Theoretische Informatik

WS 2004/2005
Musterlösungen zur Klausur
Christian Brandl

Lösung zu Aufgabe 1

a)

$$M = \big(Z, \Sigma, \delta, z_0, E\big)$$

mit

$$Z = \{q_1, q_2, q_3, q_4\},$$

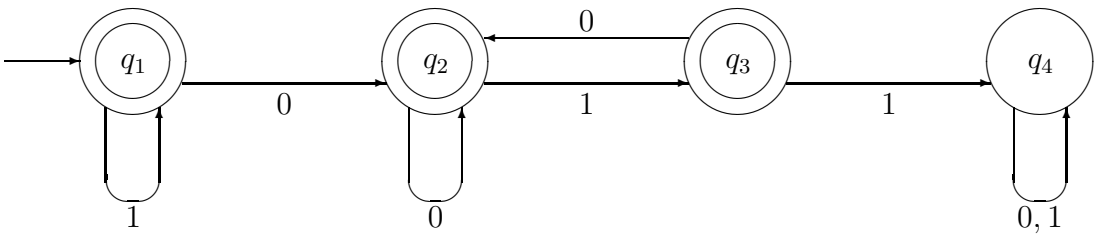
$$\Sigma = \{0, 1\},$$

$$z_0 = q_1,$$

$$E = \{q_1, q_2, q_3\},$$

δ	q_1	q_2	q_3	q_4
0	q_2	q_2	q_2	q_4
1	q_1	q_3	q_4	q_4

b)



c) Von jedem Zustand aus hat die Verarbeitung von 011 einen Übergang nach Zustand q_4 zur Folge. Da des weiteren keine Kante aus dem Zustand q_4 herausführt, ergibt sich $\overline{L} \subseteq \overline{L(M)}$.
Ein erstmaliger Übergang nach Zustand q_4 ist nur von Zustand q_3 mittels einer 1er-Kante möglich. Ein Übergang nach Zustand q_3 ist nur von Zustand q_2 mittels einer 1er-Kante möglich, wobei nur 0er-Kanten zum Zustand q_2 führen. Folglich ist ein erstmaliger Übergang nach Zustand q_4 nur durch Verarbeitung des Blocks 011 möglich, was $\overline{L(M)} \subseteq \overline{L}$ impliziert.
Insgesamt erhalten wir also $\overline{L} = \overline{L(M)}$ bzw. $L = L(M)$.

Lösung zu Aufgabe 2

Annahme: L ist kontextfrei.

Nach Pumping-Lemma gibt es also eine Zahl n, so dass sich $a^n b^n c^n$ schreiben lässt als $uvwxy$ mit $1 \leq |vx| \leq |vwx| \leq n$, wobei $uv^i wx^i y$ für beliebiges i in L enthalten ist.

Fallunterscheidung

Fall 1: vwx ist Teilwort von $a^n b^n$
Folglich enthält das Wort uv^2wx^2y mehr a's oder b's als c's und ist demnach nicht in L enthalten. Widerspruch!

Fall 2: vwx ist Teilwort von $b^n c^n$
Folglich enthält das Wort uwy weniger b's oder c's als a's und ist demnach nicht in L enthalten. Widerspruch!

Wegen $|vwx| \leq n$ decken beide Fälle alle Möglichkeiten ab.

Die Annahme führt also zu einem Widerspruch, was beweist, dass L nicht kontextfrei ist.

Lösung zu Aufgabe 3

$j \downarrow$ / $i \rightarrow$	a	b	a	c	b	a
	S	B	S	B	B	S
	$\emptyset$	A, B	$\emptyset$	B	A, B	
	S	B	$\emptyset$	A, B		
	$\emptyset$	B	S			
	$\emptyset$	A, B				
	S					

Da die Startvariable S im untersten Kästchen vorkommt, liegt $x = abacba$ in $L(G)$.

Lösung zu Aufgabe 4

1. Zunächst stellt M fest, ob das Eingabewort von der Form $a^+b^+c^+$ ist. Wenn dem nicht so ist, hält M an, ohne zu akzeptieren. Anderenfalls arbeitet M wie folgt. Es bezeichne x stets den nichtleeren Teil der Bandinschrift. So lange x von der Form $a^+b^+c^+$ ist, wird folgendes Programm durchgeführt:
begin
1) Ersetze erstes „ a “ in x durch „ $\square$ “
2) Ersetze erstes „ b “ durch „ $\square$ “
3) Ersetze letztes „ c “ durch „ $\square$ “
4) Wiederhole 2) und 3) so lange, bis alle „ b's “ gelöscht sind (falls dabei die „ c's “ ausgehen, hält M an, ohne zu akzeptieren)
5) Stelle alle „ b's “ wieder her (dies bereitet kein Problem, da vor Ausführung von 2) erstes und letztes „ b “ -Feld markiert werden können)
end
Sobald x nicht mehr die Form $a^+b^+c^+$ hat, prüft M, ob alle „ a 's“ und alle „ c's “ gelöscht worden sind. Falls dem so ist, akzeptiert M die Eingabe. Ansonsten wird die Eingabe verworfen.
Denn falls $k \geq lj$ hat man nach l Iterationen $x = a^{i-l}b^jc^{k-lj}$. Falls $k \geq ij$ ist, gilt demzufolge nach i Iterationen $x = b^jc^{k-ij}$. Wenn also nach i Iterationen $x = b^j$ ist, so bedeutet dies tatsächlich, dass $k = ij$ bzw. die Eingabe ein Wort aus L ist.

Lösung zu Aufgabe 5

IF $2 \leq x_1$ THEN
  $y := 2$; $l := x_1 - 2$; $x_0 := 1$;
  LOOP l DO
    $z := x_1 \; MOD \; y$;
    IF $z = 0$ THEN $x_0 := 0$ ENDIF;
    $y := y + 1$
  END
ENDIF

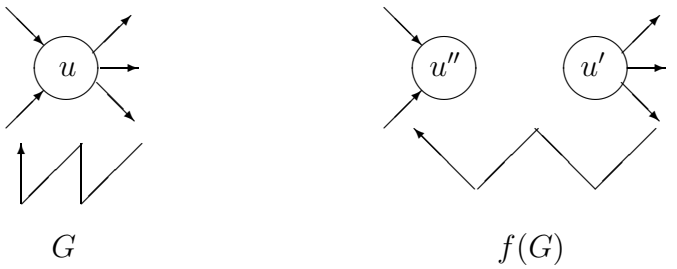
Lösung zu Aufgabe 6

Nach Vorlesung ist DHC $\mathcal{NP}$-hart. Folglich reicht es aus, eine polynomielle Reduktion von DHC auf DHP anzugeben.
Bezeichne $G = (V, E)$ einen beliebigen Digraphen und u irgendeinen festen Knoten von G. Wie folgt beschrieben ordnen wir dann G einen Digraphen $f(G)$ zu (siehe dazu auch unten stehende Illustration):

> Splitte den Knoten u in zwei Knoten u' und u'' (die anderen Knoten bleiben unverändert). Die Kanten aus E der Form (u, v) ersetze durch (u', v) und die der Form (v, u) durch (v, u''), d.h. die von u wegführenden Kanten werden u' und die zu u hinführenden Kanten werden u'' zugeordnet (die anderen Kanten bleiben unverändert).

Die totale Abbildung f ist offensichtlich in Polynomialzeit berechenbar.
Wenn G einen Hamilton-Kreis besitzt, dann besitzt $f(G)$ offensichtlich einen Hamilton-Pfad mit Anfangsknoten u' und Endknoten u''. Wenn umgekehrt $f(G)$ einen Hamilton-Pfad besitzt, so muss der Anfangsknoten dieses Pfades u' und der Endknoten u'' sein, denn nach Konstruktion führen keine Kanten zu u' hin bzw. von u'' weg. Da diese beiden Knoten in G als ein und derselbe Knoten u aufgefasst werden, besitzt demnach G einen Hamilton-Kreis. Insgesamt erhalten wir also das den Beweis vervollständigende Resultat

$$G \in DHC \iff f(G) \in DHP$$



G $\qquad\qquad$ $f(G)$