Hans U. Simon
Christian Brandl

Bochum, den 07.01.2008

Übungen zur Vorlesung

Theoretische Informatik

WS 07/08

Blatt 10

Aufgabe 10.1

Zeige direkt (also ohne einen äquivalenten Berechenbarkeitsbegriff zu verwenden) die primitive Rekursivität von

$$f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, f(m,n) = \begin{cases} 0 & \text{falls m DIV } 2^n \text{ ungerade} \\ \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei darf die primitive Rekursivität von MOD, DIV und der modifizierten Subtraktion vorausgesetzt werden.

Aufgabe 10.2

Weise direkt (also ohne einen äquivalenten Berechenbarkeitsbegriff zu verwenden) nach, dass $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$g(n) = \begin{cases} log_2(n) & n \text{ Zweierpotenz} \\ \text{nicht definiert} & \text{sonst} \end{cases}$$

μ-rekursiv ist.

Aufgabe 10.3

Für $k \geq 0$ sei die Funktion $A_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$A_k(y) \;\;=\;\; a(k,y),$$

wobei $a(k,y)$ die Ackermann-Funktion repräsentiert. Zeige, dass die Funktionen A_k primitiv rekursiv sind.

*__Aufgabe 10.4__

Zeige, dass für beliebige $c_1, c_2 \in \mathbb{N}$ ein $c \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $x \in \mathbb{N}$ folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$a(c_1,x) + a(c_2,x) < a(c,x)$$

Dabei dürfen nachstehende Eigenschaften der Ackermannfunktion verwendet werden:

1. $a(x, y) < a(x + 1, y)$
2. $a(2, y) = 2y + 3$
3. $a(x, y + 1) \leq a(x + 1, y)$