

Übungen zur Vorlesung  
**Theorie des maschinellen Lernens**  
Sommer 17  
Übungsblatt 03

**Aufgabe 3.1** (4 Punkte)

Sei  $X = \mathbb{N}$  und sei  $\mathcal{H}_d$  die Klasse der Teilmengen von  $X$  mit höchstens  $d$  Elementen. Sei  $L$  ein Lerner, der die zur Trainingsmenge kleinste konsistente Menge aus  $\mathcal{H}_d$  ausgibt. Zeige, dass im realisierbaren Fall gilt

$$m_L(\varepsilon, \delta) = \mathcal{O}\left(\frac{d + \log(1/\delta)}{\varepsilon}\right).$$

**Aufgabe 3.2** (4 Punkte)

Sei  $\mathcal{H}$  eine endliche Hypothesenklasse. Sei  $d : \mathcal{H} \rightarrow \{0, 1\}^*$  eine Codierung der Hypothesen. Zeige, dass die VC-Dimension von  $\mathcal{H}$  durch die größte Beschreibungslänge einer Hypothese in  $\mathcal{H}$  begrenzt wird, genauer dass gilt

$$\text{VCdim}(\mathcal{H}) \leq 2 \sup\{|d(h)| : h \in \mathcal{H}\}.$$

Zeige weiter, dass

$$\text{VCdim}(\mathcal{H}) \leq \sup\{|d(h)| : h \in \mathcal{H}\},$$

falls  $d$  präfixfrei ist.

**Aufgabe 3.3** (4 Punkte)

a) Sei  $\mathcal{H} = \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$  eine Hypothesenklasse, wobei  $\mathcal{H}_n$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  endlich ist. Finde eine Gewichtsfunktion  $w : \mathcal{H} \rightarrow [0, 1]$  für die folgendes gilt:

- $\sum_{h \in \mathcal{H}} w(h) \leq 1$
- $\forall h \in \mathcal{H}$ :  $w(h)$  hängt von  $n(h) = \min\{n \mid h \in \mathcal{H}_n\}$  und  $|\mathcal{H}_n|$  ab.

b) Gib nun eine Gewichtsfunktion für den Fall an, dass  $\mathcal{H}_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  abzählbar ist.

**Aufgabe 3.4** (4 Punkte)

Sei  $\mathcal{H} \subset \{0, 1\}^{\mathbb{R}} := \{f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}\}$  die Hypothesenklasse bestehend aus den Vereinigungen von endlich vielen Intervallen. Zeige, dass  $\mathcal{H}$  nichtuniform lernbar ist (ohne Effizienzbetrachtung) und bestimme die von SRM verwendete Kostenfunktion.