Hans U. Simon
Christoph Ries

Bochum, den 9. Mai 2017
Abgabe bis zum 16.05.2017

Übungen zur Vorlesung

Theorie des maschinellen Lernens

Sommer 17

Übungsblatt 03

Aufgabe 3.1 (4 Punkte)
Sei $\mathcal{H}_k$ die Klasse aller konvexen Polygonen mit bis zu k Ecken.
Zeige:

$$\mathrm{VCdim}(\mathcal{H}_k) = 2k + 1$$

Aufgabe 3.2 (4 Punkte)
Sei $X = \mathbb{R}$. Die Hypothesenklasse sei durch

$$\mathcal{H} := \{x \mapsto \lceil 0.5 \cdot \sin(\theta x) \rceil : \theta \in \mathbb{R}\}$$

gegeben. Zeige, dass $\mathrm{VCdim}(\mathcal{H}) = \infty$.

Tipp: *Eine Möglichkeit besteht darin, folgende Aussage mit Beweis zu verwenden. Sei $0.x_1x_2x_3...$ die binäre Darstellung von $x \in (0,1)$, dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$*

$$\lceil 0.5 \cdot \sin(2^m \pi x) \rceil = 1 - x_m$$

vorausgesetzt, dass ein $k \geq m$ existiert mit $x_k = 1$.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 3.3 (4 Punkte)

Im Folgenden wollen wir die Chebyshev-Ungleichung verwenden. Sie sagt aus, dass für eine Zufallsvariable X und alle $t > 0$ gilt

$$Pr[|X - \mathbb{E}(X)| \geq t] \leq \frac{Var(X)}{t^2}.$$

Das Ziel ist es nun die Ungleichung

$$Pr_{S \sim D^m}\{|L_D(h) - L_S(h)| \leq \varepsilon\} \geq \frac{1}{2}. \tag{$\star$}$$

für eine feste Hypothesen $h : \mathcal{X} \to \{0, 1\}$ mit Hilfe dieser Chebyshev-Ungleichung zu zeigen.

Gehe dazu wie folgt vor.

a) Zunächst müssen die Symbole aus der Chebyshev-Ungleichung belegt werden. Wie sieht die Zufallsvariable X aus? Was ist der Erwartungswert und die Varianz von X? Wie muss t gewählt werden?

b) Zeige, dass obige Ungleichung ($\star$) durch die Chebyshev-Ungleichung folgt, sofern $m \geq \frac{1}{2\varepsilon^2}$.

Aufgabe 3.4 (4 Punkte)

Sei $X = \mathbb{N}$ und sei $\mathcal{H}_d$ die Klasse der Teilmengen von X mit höchstens d Elementen. Sei L ein Lerner, der die zur Trainingsmenge kleinste konsistente Menge aus $\mathcal{H}_d$ ausgibt. Zeige, dass im realisierbaren Fall gilt

$$m_L(\varepsilon, \delta) = \mathcal{O}\left(\frac{d + \log(1/\delta)}{\varepsilon}\right).$$