Hans U. Simon
Christoph Ries

Bochum, den 12. Juli 2016
Abgabe bis zum 19.07.2016

Übungen zur Vorlesung

Theorie des maschinellen Lernens

Sommer 16

Übungsblatt 12

Aufgabe 12.1 (4 Punkte)
Betrachte die folgende Trainingsmenge

$$S := \{((0,3), \mathrm{rot}), ((1,5), \mathrm{rot}), ((3,1), \mathrm{grün}), ((4,4), \mathrm{blau}),\\ ((4,5), \mathrm{grün}), ((6,2), \mathrm{blau}), ((6,4), \mathrm{gelb})\},$$

sowie den Punkte $p = (3,3)$.

a) Nutze die 3-NN-Regel, um den Punkt p zu klassifizieren (einfaches Majoritätsvotum).

Eine weitere Möglichkeit besteht darin das Votum der drei Nachbarn bzgl. der Abstände zu gewichten. Sei d_n der euklidische Abstand zwischen einem der Nachbarn $n \in S$ von p und p selbst.

b) Klassifiziere p mit der 3-NN-Regel, wobei das Votum des Nachbarn $n \in S$ von p mit $w_n = 1/d_n^2$ gewichtet wird.

c) Klassifiziere p mit der 3-NN-Regel, wobei das Votum des Nachbarn $n \in S$ von p mit $w_n = e^{-kd_n^2}$ gewichtet wird. Wähle einmal $k = 0.2$ und einmal $k = 0.4$.

Aufgabe 12.2 (4 Punkte)
Sei $k \geq 3$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei (V, E) ein geschichteter Graph mit n Eingabeknoten, k Knoten in der (einzigen) inneren Schicht und einem Ausgabeknoten. Es liegt das erweiterte Modell mit Bias vor, um auf konstante Neuronen verzichten zu können.
Zeige, dass es in diesem Fall NP-schwer ist die ERM-Regel für $\mathcal{H}_{V,E,\mathrm{sign}}$ zu implementieren.

Tipp: Nutze für die Reduktion das k-Färbbarkeitsproblem.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 12.3 (4 Punkte)

Für $i = 1, 2$ sei $\mathcal{F}_i$ eine Menge von Funktionen der Form $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}_i$. Setze $\mathcal{H} := \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$, d.h. für alle $f_1 \in \mathcal{F}_1$ und $f_2 \in \mathcal{F}_2$ existiert $h \in \mathcal{H}$ mit $h(x) = (f_1(x), f_2(x))$.
Zeige, dass

$$\tau_{\mathcal{H}}(m) \leq \tau_{\mathcal{F}_1}(m)\tau_{\mathcal{F}_2}(m).$$

Aufgabe 12.4 (4 Punkte)

Sei $\mathcal{F}_1$ eine Menge von Funktionen der Form $\mathcal{X} \to \mathcal{Z}$ und sei $\mathcal{F}_2$ eine Menge von Funktionen der Form $\mathcal{Z} \to \mathcal{Y}$. Setze $\mathcal{H} := \mathcal{F}_2 \circ \mathcal{F}_1$, d.h. für alle $f_1 \in \mathcal{F}_1$ und alle $f_2 \in \mathcal{F}_2$ existiert $h \in \mathcal{H}$ mit $h(x) = f_2(f_1(x))$.
Zeige, dass

$$\tau_{\mathcal{H}}(m) \leq \tau_{\mathcal{F}_2}(m)\tau_{\mathcal{F}_1}(m).$$