Hans U. Simon
Malte Darnstädt

Bochum, den 28.05.2013
Abgabe bis zum 05.06.2013

Übungen zur Vorlesung

Theorie des Maschinellen Lernens

Sommer 2013

Übungsblatt 06

Aufgabe 6.1

Bestimme eine möglichst kleine obere Schranke für die totale Variation V von folgenden Funktionenklassen:

a) Die Klasse der monotonen Funktionen von $[0,1]$ nach $[0,1]$

b) Die Klasse der Funktionen von $[0,1]$ nach $[0,1]$, die aus k monotonen Stücken zusammengesetzt sind

Aufgabe 6.2

Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ eine stetige und stückweise stetig-differenzierbare Funktion. Zeige, dass die totale Variation V von f durch

$$\int_0^1 |f'(x)| dx$$

beschränkt ist.

Aufgabe 6.3

Sei $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ eine linksstetige monoton fallende Funktion.
Beschreibe wie man eine Funktionenklasse F mit $\mathrm{fat}_F(\gamma) = f(\gamma)$ konstruieren kann.

+2 Bonuspunkte falls auf die Linksstetigkeit verzichtet werden kann

Aufgabe 6.4

Sei F eine reelle Funktionenklasse über der Menge X und sei S eine endliche Teilmenge von X. Wir sagen, dass S von F *Graph-zerschmettert* wird, genau dann wenn eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ existiert, so dass für jede Teilmenge $T \subseteq S$ eine Funktion aus F existiert, die genau auf T mit f übereinstimmt.
Die *Graph-Dimension von F* ist die Kardinalität der größten Menge S, die von F Graph-zerschmettert wird (oder unendlich wenn kein größtes S existiert).

a) Zeige, dass man die Graph-Dimension als Spezialfall der Φ-Dimension erhält und dass dann $\mathbb{R}^W$ von $\Phi_{|W}$ aufgespannt wird.

b) Zeige, dass die Pseudo-Dimension und die Graph-Dimension unvergleichbar sind; das heißt, gib zwei Klassen F_1, F_2 an, so dass $\mathrm{Pdim}(F_1) > \mathrm{Gdim}(F_1)$ aber $\mathrm{Pdim}(F_2) < \mathrm{Gdim}(F_2)$.

Hinweis: Bei b) reichen sehr kleine Klassen mit nur jeweils vier Funktionen, die von $\{0,1\}$ auf $\{0,1,2,3\}$ abbilden.