Hans U. Simon
Malte Darnstädt

Bochum, den 14.05.2013
Abgabe bis zum 29.05.2013

Übungen zur Vorlesung
Theorie des Maschinellen Lernens
Sommer 2013

Übungsblatt 05

Für die folgenden Aufgaben gelte: F sei eine reelle Funktionenklasse über X, P eine beliebige Verteilung über $X \times \{0,1\}$ und $\epsilon, \delta, \gamma > 0$.

Aufgabe 5.1

Sei F zusätzlich *endlich*.
Gib eine Strategie für einen Lerner L und eine obere Schranke für die Stichprobengröße $m_L(\epsilon, \delta, \gamma)$ an, so dass gilt:

$$\Pr_{z \sim P^m} \left(\mathrm{er}_P^\gamma(L(\gamma, z)) < \min_{f \in F} \mathrm{er}_P^\gamma(f) + \epsilon \right) \geq 1 - \delta$$

Hinweis: Verwende in deinem Beweis keine ϵ-Cover. Statt dessen lohnt es sich, eine obere Schranke für

$$\Pr_{z \sim P^m} \left(\mathrm{er}_P^\gamma(f) - \hat{\mathrm{er}}_P^\gamma(f) \geq \epsilon \right)$$

für ein festes $f \in F$ zu finden.

Aufgabe 5.2

Sei $X = [0,1]$ und F bestehe aus den Polynomen x, x^2 und $2x - x^2$.
Bestimme $\mathcal{N}_\infty(\gamma, F, m)$ für $m \geq 1$.

Aufgabe 5.3

Sei $X = \{0, \ldots, k\}^n \subset \mathbb{R}^n$. Sei $F \subset \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ die Klasse der Polynome über X mit einem (totalem) Grad von höchstens k.
Bestimme $\mathrm{Pdim}(F)$.

Aufgabe 5.4

In der Vorlesung wurde folgende Ungleichung gezeigt:

$$\Pr_{z \sim P^m} \left(\exists f \in F : \mathrm{er}_P(f) \geq \hat{\mathrm{er}}_z^\gamma(f) + \epsilon \right) \leq 2 \cdot \mathcal{N}_\infty(\gamma/2, F, 2m) \cdot \exp\left(-\frac{\epsilon^2 m}{8} \right)$$

Sei $0 \leq \alpha < 1$. Beweise eine entsprechende Ungleichung für die Wahrscheinlichkeit

$$\Pr_{z \sim P^m} \left(\exists f \in F : \mathrm{er}_P^{\alpha \cdot \gamma}(f) \geq \hat{\mathrm{er}}_z^\gamma(f) + \epsilon \right)$$

Welche Teile des ursprünglichen Beweises müssen verändert werden? Wie ändern sich die Konstanten in der oberen Schranke?