Reguläre Sprachen

Hans U. Simon (RUB)

mit Modifikationen von

Maike Buchin (RUB)

Lehrstuhl Mathematik und Informatik

Homepage: http://www.ruhr-uni-bochum.de/lmi

Reguläre Sprachen

Zur Erinnerung: Reguläre Sprachen werden von regulären Grammatiken erzeugt mit Regeln der Form

$$X \to aY|a \text{ mit } X, Y \in V, a \in \Sigma$$

Diese Sprachen werden wir nun näher kennenlernen, und dazu zunächst ein Maschinenmodell kennenlernen, welches diese Sprachen „erkennt".

Endliche Automaten

Merkmale endlicher Automaten:

- Speicher, genannt Zustandsmenge (oder auch endliche Kontrolle), hat „konstante Größe“ (d.h., er wächst nicht mit der Länge der Eingabe).
- Eingabewort wird zeichenweise von links nach rechts abgearbeitet.
- Pro Zeichen erfolgt ein „Zustandswechsel“.
- Nach Abarbeitung wird die Eingabe akzeptiert oder verworfen.
- Menge der akzeptierten Eingabeworte bildet die Sprache des Automaten.

Bezeichnungen:

DFA	=	Deterministic Finite Automaton
	=	deterministischer endlicher Automat
NFA	=	Nondeterministic Finite Automaton
	=	nicht–deterministischer endlicher Automat

Veranschaulichung

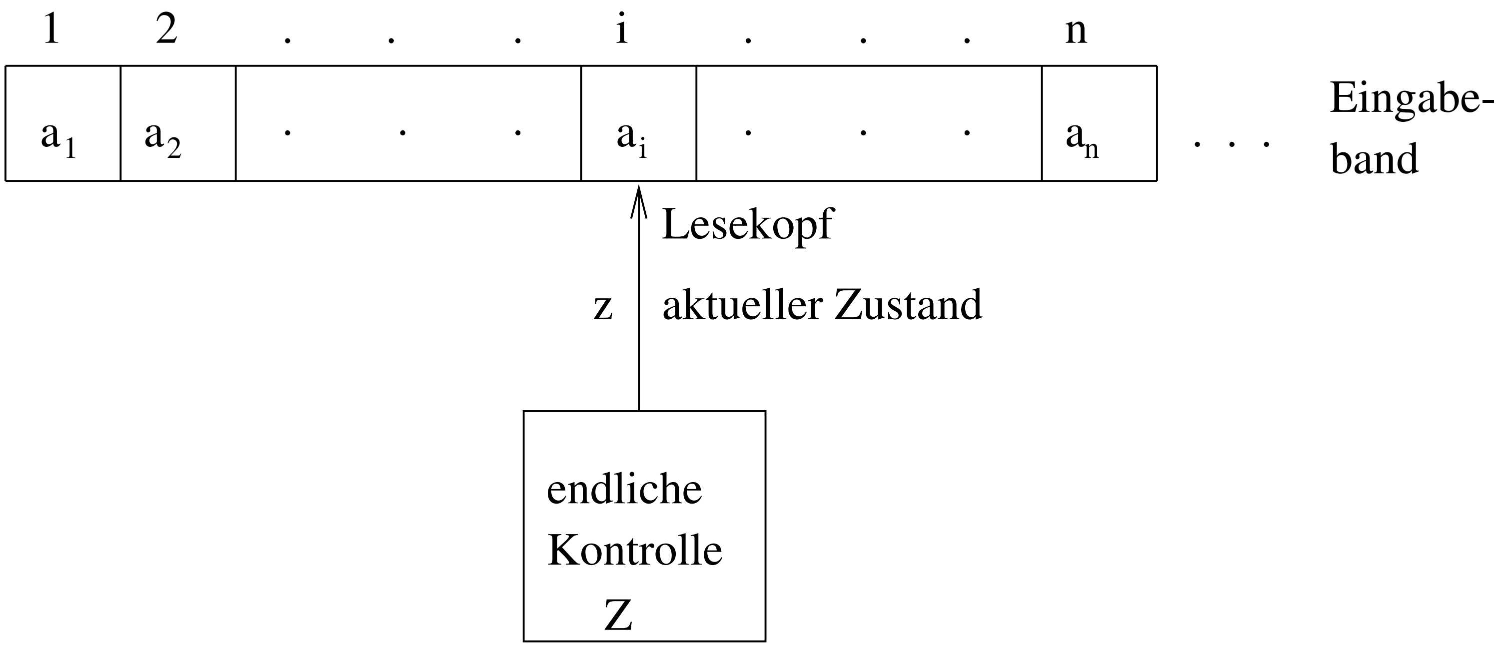


Abbildung 1: DFA mit Eingabeband (in „Zellen“ unterteilt), Lesekopf und endlicher Kontrolle.

Nach Verarbeitung von a_i erfolgt ein Zustandswechsel und der Lesekopf rückt eine Position nach rechts.

DFA (formale Definition)

Ein DFA M besteht aus den folgenden Komponenten:

- Z, die Zustandsmenge
- Σ, das Eingabealphabet
- $\delta : Z \times \Sigma \to Z$, die Überführungsfunktion
- $z_0 \in Z$, der Startzustand
- $E \subseteq Z$, die Menge der Endzustände

Arbeitsweise:

- Anfangs befindet sich M im Startzustand z_0.
- Nach Verarbeitung des Zeichens a im Zustand z geht M in den Zustand $z' = \delta(z, a)$ über.
- Nach Verarbeitung des letzten Zeichens der Eingabe wird diese genau dann akzeptiert wenn M sich in einem Endzustand befindet.

Beispiel

Betrachte den DFA M mit den folgenden Komponenten:

- $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$.
- $\Sigma = \{a, b\}$.
- Startzustand ist z_0.
- $E = \{z_3\}$.
- δ ist gegeben durch folgende Tabelle:

δ	z_0	z_1	z_2	z_3
a	z_1	z_2	z_3	z_0
b	z_3	z_0	z_1	z_2

Eingabe *aaabbaa* führt zur Zustandsfolge $z_0, z_1, z_2, z_3, z_2, z_1, z_2, z_3 \in E$. Akzeptiere!

Eingabe *bbabb* führt zur Zustandsfolge $z_0, z_3, z_2, z_3, z_2, z_1 \notin E$. Verwerfe!

Visualisierung am Zustandsgraphen

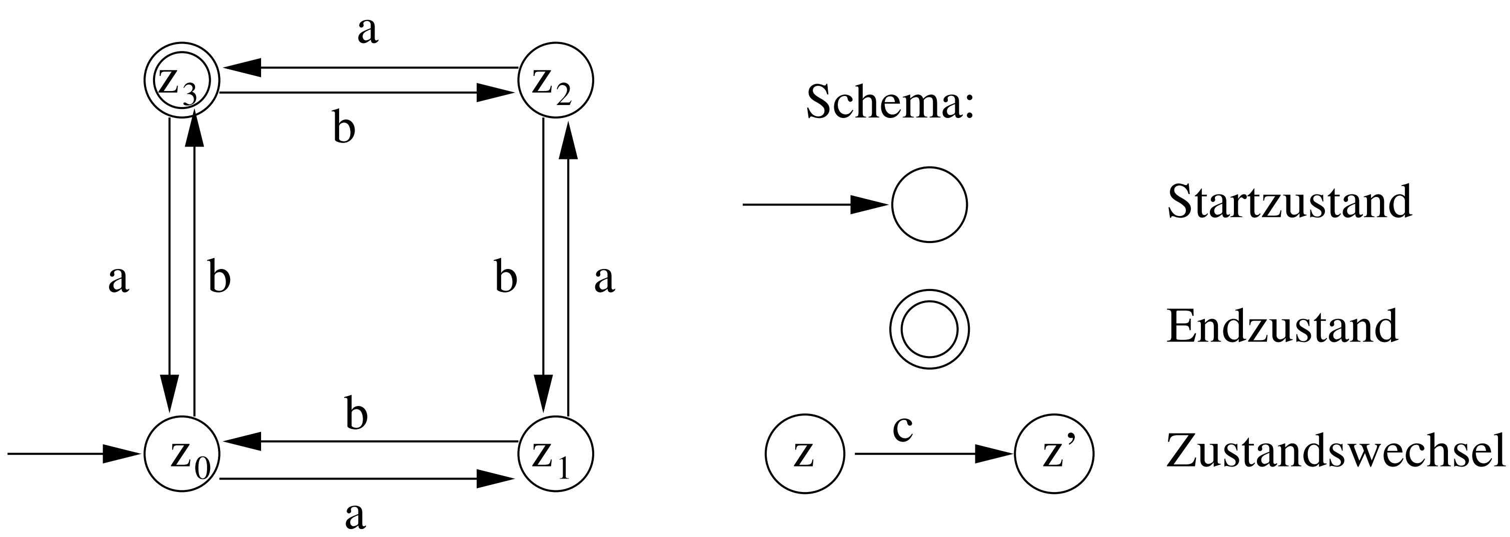


Abbildung 2: der Zustandsgraph G_M zum Beispiel–DFA M.

Rechnungen an Eingaben wie zum Beispiel $aaabbaa$ oder $bbabb$ entsprechen Pfaden im Zustandsgraphen.

Merke wohl: Da $\delta : Z \times \Sigma \to Z$ den Folgezustand eindeutig festlegt, gibt es zu jeder Eingabe w einen eindeutigen (von z_0 startenden) Pfad P_w in G_M.

Die von einem DFA akzeptierte Sprache

Die vom DFA M akzeptierte Sprache ist gegeben durch

$$T(M) := \{w \in \Sigma^* \mid \text{Pfad } P_w \text{ durch } G_M \text{ endet in einem Endzustand}\} \ .$$

Scharfes Hinsehen beim Zustandsgraph liefert für den Beispiel–DFA:

$$T(M) := \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a - |w|_b \equiv 3 \pmod 4\} \ .$$

Die Funktion „delta–Hut“

Intuition: $\hat{\delta}(z, w)$ soll der Zustand sein, in dem der DFA sich befindet, wenn er gestartet im Zustand z das Wort w (zeichenweise) abgearbeitet hat.

Induktive Definition: Für alle $z \in Z$, $a \in \Sigma$, $x \in \Sigma^*$:

1. $\hat{\delta}(z, \varepsilon) := z.$
2. $\hat{\delta}(z, ax) := \hat{\delta}(\delta(z, a), x).$

Auf $Z \times \Sigma$ stimmt $\hat{\delta}$ mit δ überein:

$$\hat{\delta}(z, a) = \hat{\delta}(\delta(z, a), \varepsilon) = \delta(z, a)$$

Es gilt:

$$T(M) = \{w \in \Sigma^* | \; \hat{\delta}(z_0, w) \in E\}$$

Elegantere Notation

Definiere für $z \in Z$ und $w \in \Sigma^*$:

$$z \cdot w := \hat{\delta}(z, w)$$

Dann gilt eine Art „Assoziativgesetz" für alle $z \in Z, x, y \in \Sigma^*$:

$$z \cdot (x \cdot y) = (z \cdot x) \cdot y$$

- $z \cdot (x \cdot y)$ ist der Zustand, den der DFA erreicht, wenn er gestartet in z das Wort xy (Konkatenation von x und y) zeichenweise abarbeitet.
- Der Ausdruck $(z \cdot x) \cdot y$ liefert dasselbe Ergebnis, wobei $z \cdot x$ der Zwischenzustand ist, den der DFA nach Verarbeitung von x (aber noch vor der Verarbeitung von y) innehat.

Vom DFA zur regulären Grammatik

Satz: Jeder DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ lässt sich in eine reguläre Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $L(G) = T(M)$ transformieren.

Folgerung: Jede von einem DFA akzeptierte Sprache ist regulär.

Technische Vereinfachung: Wir setzen im Beweis des Satzes $z_0 \notin E$ (gleichbedeutend zu $\varepsilon \notin T(M)$) voraus.

Randnotiz: Im Falle $z_0 \in E$ müsste die im Beweis enthaltene Konstruktion von G um die Regel $z_0 \to \varepsilon$ erweitert werden.

Vom DFA zur regulären Grammatik (fortgesetzt)

Konstruktiver Beweis: Setze $V := Z$, $S := z_0$ und definiere P wie folgt.

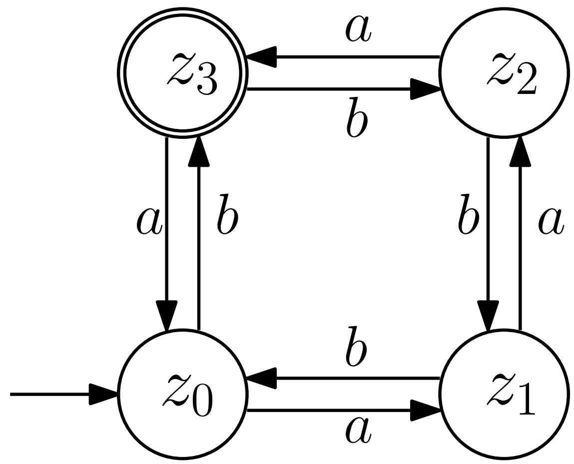
- Für jede Transition $\delta(z, a) = z'$ nimm in P die Regel $z \to az'$ auf.
- Falls dabei $z' \in E$, dann nimm zusätzlich die Regel $z \to a$ in P auf.

Für alle $w = a_1 \cdots a_n \in \Sigma^+$ (mit $a_i \in \Sigma$) sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. $w \in T(M)$.
2. Es gibt eine Folge $z_0, \ldots, z_n$ von Zuständen mit Startzustand z_0, $z_n \in E$ und $z_i = \delta(z_{i-1}, a_i)$.
3. Es gibt eine Folge $z_0, \ldots, z_{n-1}$ von Variablen mit Startvariable z_0 und
$$z_0 \Rightarrow_G a_1 z_1 \Rightarrow_G a_1 a_2 z_2 \Rightarrow_G \cdots \Rightarrow_G a_1 \cdots a_{n-1} z_{n-1} \Rightarrow_G a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n$$
4. $w \in L(G)$.

Beispiel

Zum bekannten DFA (von Folie 6)



erhalten wir die reguläre Grammatik mit den Regeln

$$
\begin{aligned}
z_0 &\to az_1 \mid bz_3 \mid b, \\
z_1 &\to az_2 \mid bz_0 \quad , \\
z_2 &\to az_3 \mid a \mid bz_1, \\
z_3 &\to az_0 \mid bz_2 \quad .
\end{aligned}
$$

Nicht-deterministische Zustandswechsel

Bei NFA's kann der Zustandsgraph folgenden Ausschnitt enthalten:

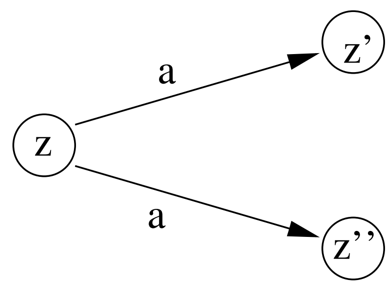


Abbildung 3: Wer die Wahl hat, hat die Qual.

- I.A. existieren mehrere mögliche Zustandswechsel pro Rechenschritt (und auch mehrere Startzustände).
- Zu einer Eingabe gibt es i.A. viele korrespondierende Pfade durch den Zustandsgraphen.
- Die Eingabe gilt als akzeptiert, wenn mindestens einer der korrespondierenden Pfad in einem Endzustand endet (in Analogie dazu, dass bei Grammatiken *eine* erfolgreiche Ableitung genügt).

NFA (formale Definition)

$\mathcal{P}(Z)$ bezeichnet die Potenzmenge von Z (Menge aller Teilmengen von Z).

Ein NFA M besteht aus den folgenden Komponenten:

- Z, die Zustandsmenge
- Σ, das Eingabealphabet
- $\delta : Z \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Z)$, die Überführungsfunktion
- $S \subseteq Z$, die Menge der Startzustände
- $E \subseteq Z$, die Menge der Endzustände

Arbeitsweise des NFA

- Anfangs befindet sich M (wahlweise) in einem der Startzustände.
- Nach Verarbeitung des Zeichens a im Zustand z kann M (wahlweise) in einen Zustand $z' \in \delta(z, a)$ übergehen.
- Die Eingabe wird akzeptiert genau dann, wenn M durch geeignete Wahl eines Startzustandes und durch geeignete Zustandswechsel nach Abarbeitung der Eingabe einen Endzustand erreichen kann.

Beachte: Falls $\delta(z, a) = \emptyset$, dann ergeben sich im Zustand z bei Verarbeitung von a keine möglichen Folgezustände.

Die von einem NFA akzeptierte Sprache

Der Zustandsgraph G_M zu einem NFA M ist völlig analog definiert wie bei DFAs.

Die vom NFA M akzeptierte Sprache besteht (per Definition) aus allen Wörtern $w \in \Sigma^*$ mit folgender Eigenschaft:
Es existiert ein von einem Startzustand ausgehender Pfad in G_M, dessen Kanten (in der korrekten Reihenfolge) mit den Buchstaben von w beschriftet sind und der in einem Endzustand endet. Also

$$T(M) := \{w \in \Sigma^* \mid \exists \text{Pfad } P_w \text{ durch } G_M\text{, der in einem Endzustand endet}\} \ .$$

Beispiel

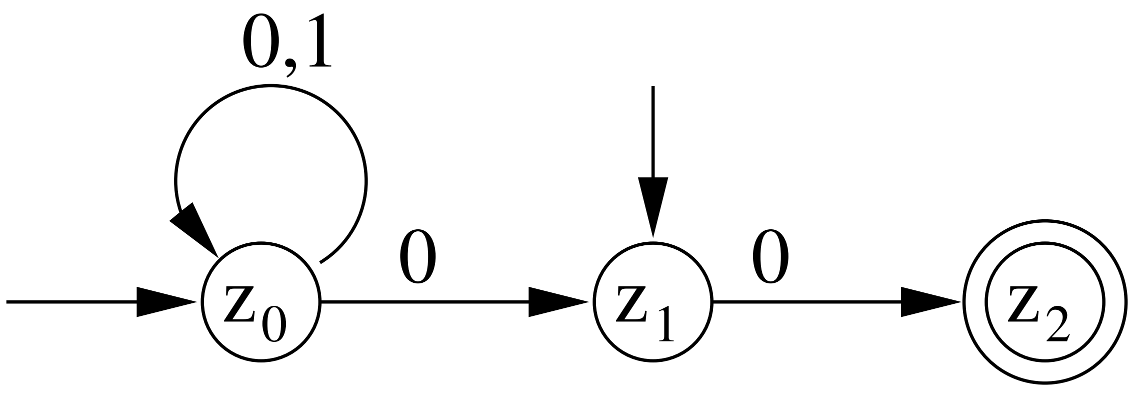


Abbildung 4: NFA M gegeben durch seinen Zustandsgraphen G_M.

Scharfes Hinsehen ergibt:

$$T(M) = \{w \in \{0,1\}^* |\ w = 0 \text{ oder } w \text{ endet mit } 00\}$$

Die Funktion „delta–Hut“

Intuition: Für eine Teilmenge $Q \subseteq Z$ der Zustände soll $\hat{\delta}(Q, w)$ die Menge der Zustände sein, welche sich ausgehend von einem der Zustände in Q erreichen lassen, wenn w zeichenweise abgearbeitet wird.

Induktive Definition: Für alle $Q \subseteq Z$, $a \in \Sigma$, $x \in \Sigma^*$:

1. $\hat{\delta}(Q, \varepsilon) := Q$.
2. $\hat{\delta}(Q, ax) := \hat{\delta}\left(\cup_{z \in Q} \delta(z, a), x\right)$.

Dann gilt:

$$T(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(S, w) \cap E \neq \emptyset\}$$

Nicht-Determinismus

Mögliche Interpretationen:

- NFA rät den richtigen Weg.
- NFA probiert alle Möglichkeiten.

Anmerkungen:

- NFA sind rein theoretisches Konzept.
- NFA sind häufig einfacher zu verstehen und entwerfen.

Vom NFA zum DFA

Satz: Jeder NFA $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ lässt sich in einen DFA $M' = (Z', \Sigma, \delta', z_0, E')$ mit $T(M') = T(M)$ transformieren.

Beweis (Potenzmengenkonstruktion): Wir wählen $Z' = \mathcal{P}(Z)$, d.h., jeder „Makrozustand" von M' ist eine Teilmenge der Zustände von M. M' soll M in folgendem Sinn simulieren:

$(*)$ Zu jedem Zeitpunkt der „Rechnung" soll M' in dem „Makrozustand" sein, der übereinstimmt mit der Menge der gegenwärtig von M erreichbaren Zustände.

Formal ist hierzu zu zeigen, dass $\hat{\delta}'(z_0, w) = \hat{\delta}(S, w)$ für alle $w \in \Sigma^*$.

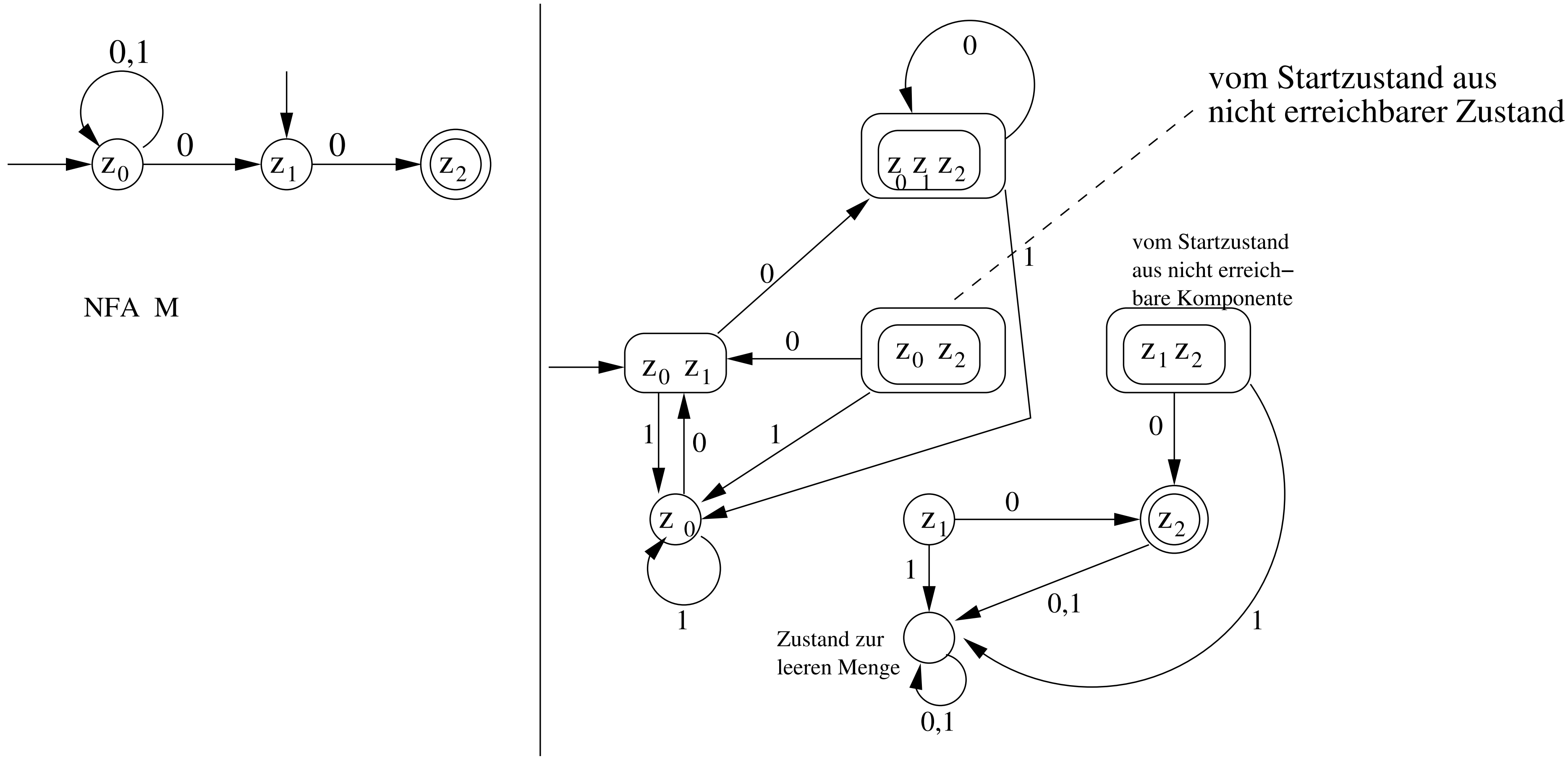
Vom NFA zum DFA (fortgesetzt)

Hierzu definieren wir die restlichen Komponenten von M' wie folgt:

1. $z_0 = S$. (Damit gilt $(*)$ zu Anfang.)
2. $\delta'(Q,a) = \bigcup_{z \in Q} \delta(z,a)$. (Damit bleibt $(*)$ während Verarbeitung des nächsten Zeichens richtig).
3. $E' = \{Q \subseteq Z |\ Q \cap E \neq \emptyset\}$.

- Die gewünschte Bedingung $(*)$ ergibt sich induktiv aus 1. und 2.
- Aus $(*)$ und 3. folgt schließlich $T(M') = T(M)$.

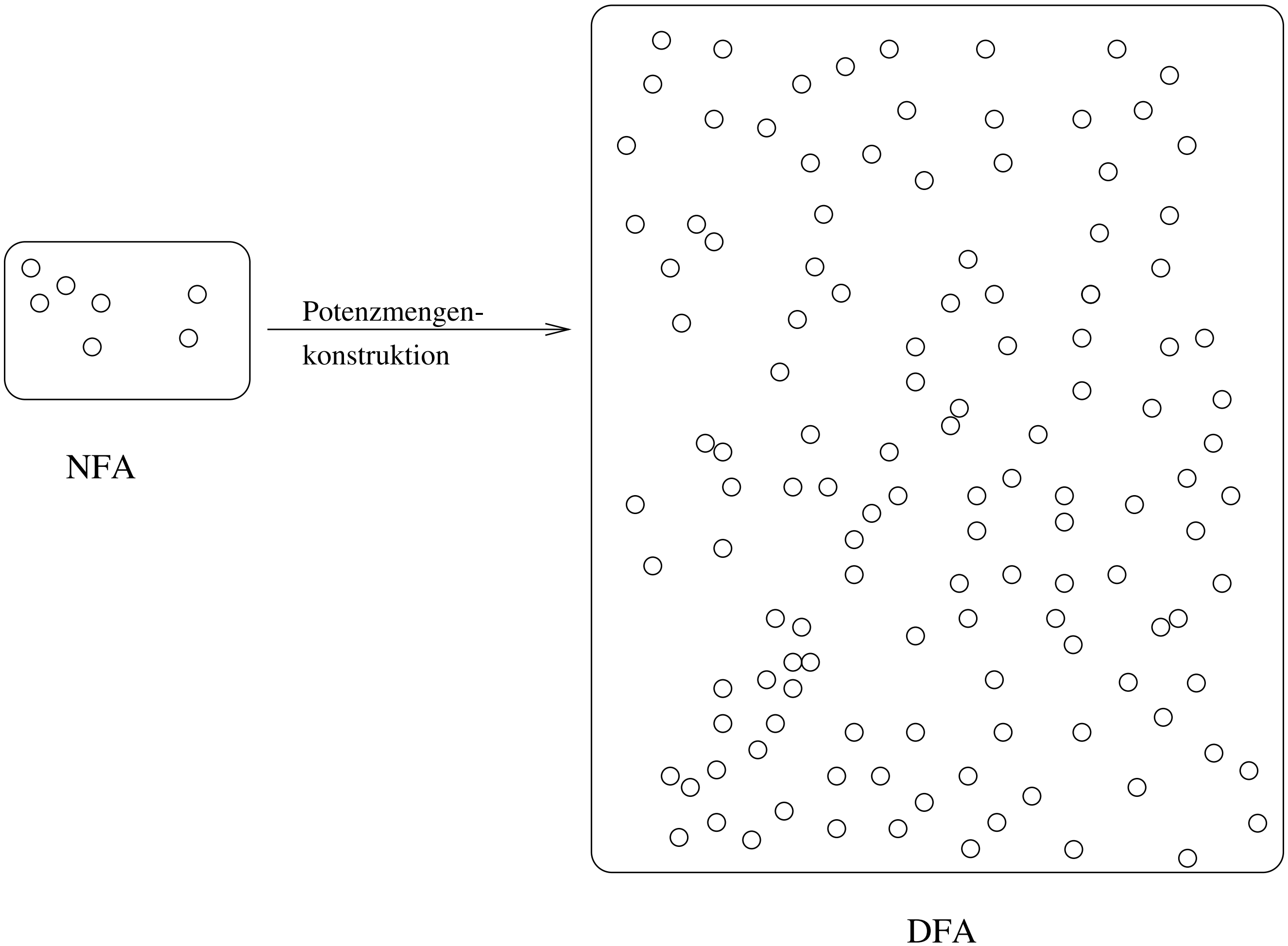
Beispiel



simulierender DFA M'

Anmerkung: Der simulierende DFA M' lässt sich hier noch vereinfachen in dem nicht erreichbare Zustände weggelassen werden.

Die „kombinatorische Explosion“ ...



Frage: Gibt es effizientere Simulationen ? **Antwort:** i.A. Nein !

Eine Sprache mit „kleinem“ NFA ...

Die Sprache

$$L_n = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w| \geq n \text{ und das } n\text{–letzte Zeichen von } w \text{ ist „0“}\}$$

kann von einem NFA mit $n+1$ Zuständen erkannt werden:

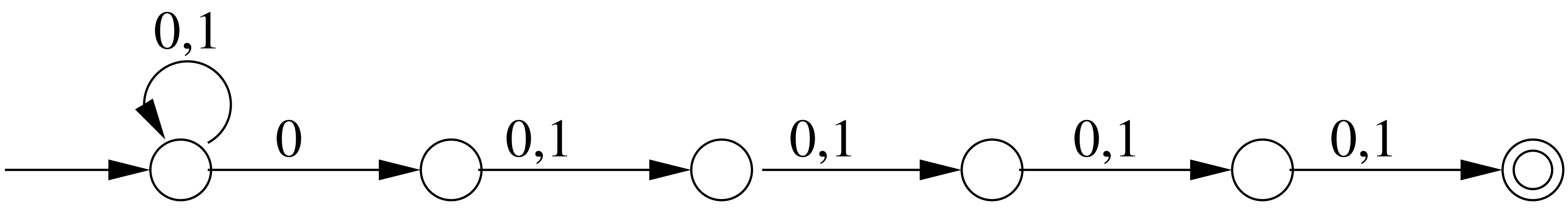


Abbildung 5: Ein NFA für L_5.

... die große DFAs benötigt

Angenommen es gäbe einen DFA M für L_n mit weniger als 2^n Zuständen?

Widerspruch (in 5 Schritten):

1. Dann gibt es 2 verschiedene Wörter $x, y \in \{0,1\}^n$ mit $z_0 \cdot x = z_0 \cdot y$ (Schubfachprinzip).
2. Betrachte eine Bit-Position i, in der x und y sich unterscheiden. Sagen wir: Bit i von x ist 0 und Bit i von y ist 1.
3. Betrachte $x' = x0^{i-1}$ und $y' = y0^{i-1}$. Bit i von x (bzw. von y) ist das n-letzte Bit von x' (bzw. von y'). Daher ist $x' \in L_n$ und $y' \notin L_n$.
4. Wegen

$$z_0 \cdot (x \cdot 0^{i-1}) = (z_0 \cdot x) \cdot 0^{i-1} = (z_0 \cdot y) \cdot 0^{i-1} = z_0 \cdot (y \cdot 0^{i-1})$$

   gelangt M bei den Eingaben x' und y' zum gleichen Zustand.
5. M macht also entweder auf Eingabe x' oder auf Eingabe y' einen Fehler.

Kleines Gedächtnis, große Fehler

Beim Widerspruchsbeweis wurde ausgenutzt:

- Wenn ein DFA zwei Eingaben x, y identifiziert (im Sinne von $z_0 \cdot x = z_0 \cdot y$), dann kann er auch Eingaben der Form xu und yu nicht auseinander halten.
- Wenn ein DFA ein zu kleines „Gedächtnis" (= Zustandsmenge) hat, dann identifiziert er evtl. Eingaben, die er besser unterscheiden können sollte.

Vom NFA zum DFA: Zusammenfassung

- Jeder NFA mit n Zuständen lässt sich in einen äquivalenten DFA mit 2^n Zuständen transformieren.
- Wir haben Sprachen L_n, $n \geq 1$, angegeben, die von einem NFA mit $n+1$ Zuständen erkannt werden können, aber nicht von einem DFA mit weniger als 2^n Zuständen.

Andererseits kann man zeigen, dass L_n von einem DFA mit 2^n Zuständen erkannt werden kann (Potenzmengenkonstruktion liefert 2^{n+1} Zustände).

Von der regulären Grammatik zum NFA

Satz: Jede reguläre Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ lässt sich in einen NFA $M = (Z, \Sigma, \delta, S', E)$ mit $T(M) = L(G)$ transformieren.

Zusammen mit den früheren Ergebnissen erhalten wir den Zirkelschluss

$$\text{DFA} \rightarrow \text{reguläre Grammatik} \rightarrow \text{NFA} \rightarrow \text{DFA} \quad .$$

Es ergibt sich die

Folgerung: Die Klasse der regulären Sprachen kann wahlweise durch DFAs, NFAs oder reguläre Grammatiken repräsentiert werden.

Im folgenden Beweis des Satzes dürfen wir voraussetzen, dass P **entweder** keine ε-Transition enthält **oder** nur die ε-Transition $S \rightarrow \varepsilon$, wobei in letzterem Falle S auf keiner rechten Seite einer Regel aus P auftritt.

Konstruktiver Beweis: Wähle die Komponenten von M wie folgt:

- $Z = V \cup \{X\}$ und $S' = \{S\}$.
- Falls $S \rightarrow \varepsilon \notin P$, dann setze $E = \{X\}$; andernfalls $E = \{S, X\}$.
- Für jede Regel der Form $A \rightarrow aB$ in P nimm B in $\delta(A, a)$ auf.
- Für jede Regel der Form $A \rightarrow a$ in P nimm X in $\delta(A, a)$ auf.

Für alle $w = a_1 \cdots a_n \in \Sigma^+$ (mit $a_i \in \Sigma$) sind die folgenden Aussagen äquivalent:

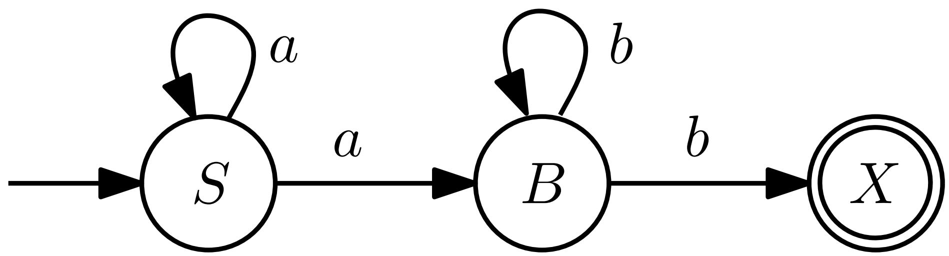
1. $w \in L(G)$.
2. Es gibt eine Folge $A_1, \ldots, A_{n-1}$ von Variablen mit
$$S \Rightarrow_G a_1 A_1 \Rightarrow_G a_1 a_2 A_2 \Rightarrow_G \cdots \Rightarrow_G a_1 a_2 \cdots a_{n-1} A_{n-1} \Rightarrow_G a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n \ .$$
3. Es gibt eine Folge von Zuständen $A_1, \ldots, A_{n-1}$ mit
$$A_1 \in \delta(S, a_1),\ A_2 \in \delta(A_1, a_2), \ldots,\ A_{n-1} \in \delta(A_{n-2}, a_{n-1}),\ X \in \delta(A_{n-1}, a_n) .$$
4. $w \in T(M)$.

Beispiel

Die reguläre Grammatik

$$S \to aS \mid aB,$$
$$B \to bB \mid b \quad ,$$

führt zum NFA M mit $Z = \{B, S, X\}$, Startzustand S, $E = \{X\}$, und Überführungsfunktion $\delta(S, a) = \{S, B\}$, $\delta(B, b) = \{B, X\}$,



welcher die Sprache $\{a^n b^m \mid n, m > 0\}$ erkennt.

Reguläre Ausdrücke

Induktive Definition der „Syntax“ regulärer Ausdrücke:

1. $\emptyset$, ε und a für jedes $a \in \Sigma$ sind reguläre Ausdrücke.
2. Wenn α und β reguläre Ausdrücke sind, dann sind auch $(\alpha \cdot \beta)$, $(\alpha|\beta)$ und (α^*) reguläre Ausdrücke.

- Die Regel “$*$ geht vor $\cdot$” und “$\cdot$ geht vor $|$” (in Analogie zu “Punktrechnung geht vor Strichrechnung”) hilft Klammern einzusparen.
- Konkatenationszeichen „$\cdot$“ darf auch weggelassen werden.
- α^+ wird verwendet als Abkürzung zu $\alpha\alpha^*$

Die von regulären Ausdrücken dargestellte Sprache

$L(\alpha)$ bezeichne die durch den regulären Ausdruck α repräsentierte Sprache im Sinne der folgenden Definition.

Induktive Definition der „Semantik“ regulärer Ausdrücke:

1. $L(\emptyset) = \emptyset$; $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$; $L(a) = \{a\}$.

2. $L(\alpha \cdot \beta) = L(\alpha) \cdot L(\beta)$; $L(\alpha|\beta) = L(\alpha) \cup L(\beta)$; $L(\alpha^*) = L(\alpha)^*$.

$\emptyset, \varepsilon, a, \cdot, *$ haben also die offensichtliche Interpretation; Zeichen „$|$“ wird als Vereinigung „$\cup$“ interpretiert.

Beispiele

Die uns schon bekannte Sprache

$$\{w \in \{0,1\}^* \mid w = 0 \text{ oder } w \text{ endet mit } 00\}$$

ist mit regulären Ausdrücken „traumhaft elegant“ beschreibbar:

$$0|(0|1)^*00\ .$$

Jede endliche Sprache ist durch einen regulären Ausdruck beschreibbar. Denn:

1. Jedes einzelne Wort ergibt sich als Konkatenation seiner (endlich vielen) Zeichen.
2. Jede endliche Sprache ist eine Vereinigung ihrer (endlich vielen) Wörter.
3. Konkatenation und Vereinigung sind Operatoren, die regulären Ausdrücken zur Verfügung stehen.

Ankündigung

Strukturelle Induktion kommt zum Einsatz !

Von regulären Ausdrücken zu NFAs

Satz: Jeder reguläre Ausdruck γ kann in einen NFA M mit $T(M) = L(\gamma)$ transformiert werden.

Beweis: (Induktion nach der Struktur regulärer Ausdrücke)
Zu zeigen:

1. Zu den einfachen regulären Ausdrücken $\emptyset, \varepsilon, a$ mit $a \in \Sigma$ finden wir jeweils einen passenden NFA.

2. Aus passenden NFAs M_1 und M_2 für reguläre Ausdrücke α und β können wir jeweils einen passenden NFA für $\alpha|\beta$, $\alpha \cdot \beta$ und α^* zusammenbasteln (ein „Syntheseproblem“).

Passende NFAs für einfache reguläre Ausdrücke

Endlich mal eine babyleichte Aufgabe:

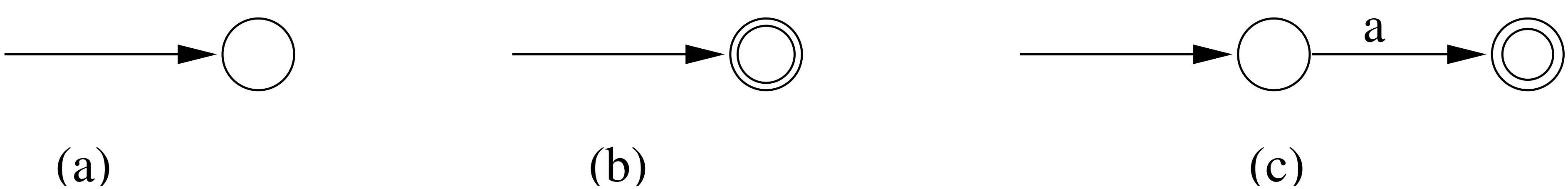


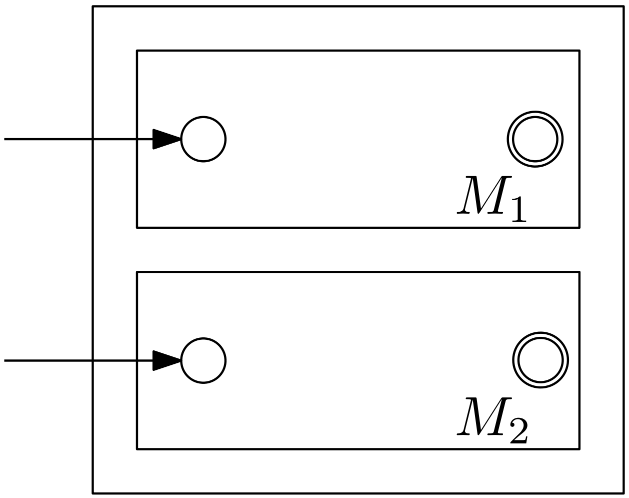
Abbildung 6: (a) ein NFA für $\emptyset$ (b) ein NFA für $\{\varepsilon\}$ (c) ein NFA für $\{a\}$

Lösung des Syntheseproblems für „Vereinigung“

Voraussetzung: $T(M_1) = L(\alpha)$, $T(M_2) = L(\beta)$; $M_i = (Z_i, \Sigma, \delta_i, S_i, E_i)$.

Synthese eines Automaten M für $L(\alpha) \cup L(\beta)$:

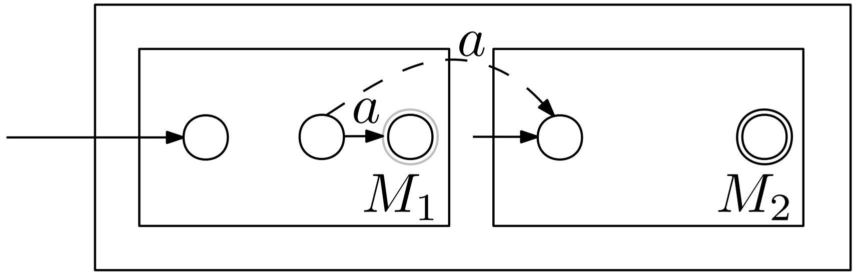
$$
\begin{aligned}
M &:= (Z_1 \cup Z_2, \Sigma, \delta, S_1 \cup S_2, E_1 \cup E_2) \\
\delta(z, x) &:= \begin{cases} \delta_1(z, x) & \text{falls } z \in Z_1 \\ \delta_2(z, x) & \text{falls } z \in Z_2 \end{cases}
\end{aligned}
$$



Lösung des Syntheseproblems für „Konkatenation“

Synthese eines Automaten M für $L(\alpha) \cdot L(\beta)$:

$$\begin{aligned}
M &:= (Z_1 \cup Z_2, \Sigma, \delta, S, E_2) \\
S &:= S_1 \text{ falls } \varepsilon \notin T(M_1), \text{ sonst } S := S_1 \cup S_2 \\
\delta(z,x) &:= \begin{cases} \delta_1(z,x) & \text{falls } z \in Z_1 \text{ und } \delta_1(z,x) \cap E_1 = \emptyset \\ \delta_1(z,x) \cup S_2 & \text{falls } z \in Z_1 \text{ und } \delta_1(z,x) \cap E_1 \neq \emptyset \\ \delta_2(z,x) & \text{falls } z \in Z_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

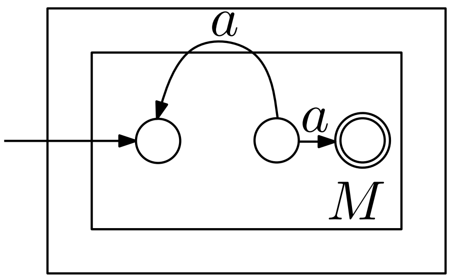


Lösung des Syntheseproblems für Operation $*$

Voraussetzung: $T(M) = L(\alpha)$; $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$.

Synthese eines Automaten M' für $L(\alpha)^*$ für den Fall $\varepsilon \in T(M)$:

$$\begin{aligned} M' &:= (Z, \Sigma, \delta', S, E) \\ \delta'(z,x) &:= \begin{cases} \delta(z,x) & \text{falls } \delta(z,x) \cap E = \emptyset \\ \delta(z,x) \cup S & \text{falls } \delta(z,x) \cap E \neq \emptyset \end{cases} \end{aligned}$$



Falls $\varepsilon \notin T(M)$, dann wird darüberhinaus ein neuer Zustand z_0 in die Start- und Endzustände von M' aufgenommen.

Von DFAs zu regulären Ausdrücken

Satz: Jeder DFA $M = \{\{z_1, \ldots, z_n\}, \Sigma, \delta, z_1, E)$ kann in einen regulären Ausdruck γ mit $L(\gamma) = T(M)$ transformiert werden.

Beweisidee: Verwende „Hilfssprachen", die sich

- mit Hilfe der Operationen $\cup, \cdot, *$ aus einzelnen Zeichen zusammenbasteln lassen,
- so dass $T(M)$ sich als Vereinigung (geeignet ausgewählter) Hilfssprachen darstellen lässt.

Umsetzung der Beweisidee

die Hilfssprachen

$R^k_{i,j}$ sei die Menge aller Wörter $x \in \Sigma^*$ mit:

1. M gestartet in z_i ist nach Abarbeitung von x im Zustand z_j.
2. Dabei werden nur Zwischenzustände aus $\{z_1, \ldots, z_k\}$ angenommen.

Beachte: Im Falle $k = 0$ sind keine Zwischenzustände erlaubt (Übergang von z_i nach z_j durch maximal einen Zustandswechsel).

Umsetzung der Beweisidee (fortgesetzt)

Die Hilfssprachen haben die gewünschten Eigenschaften:

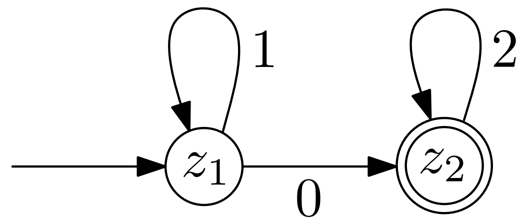
$$
\begin{aligned}
T(M) &= \bigcup_{j: z_j \in E} R_{1,j}^n \\
R_{i,j}^0 &= \{a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\} \mid \hat{\delta}(z_i, a) = z_j\} \\
R_{i,j}^k &= R_{i,j}^{k-1} \cup R_{i,k}^{k-1} \cdot (R_{k,k}^{k-1})^* \cdot R_{k,j}^{k-1}
\end{aligned}
$$

Die letzte Gleichung gilt, da die Wörter aus $R_{i,j}^k$ in zwei Klassen zerfallen:

- Wörter, deren Berechnungspfad von z_i nach z_j nur die Zwischenknoten aus $\{z_1, \ldots, z_{k-1}\}$ verwendet (also Wörter aus $R_{i,j}^{k-1}$)
- Wörter der Form $x = uvw$, wobei u einen Berechnungspfad von z_i nach z_k mit Zwischenknoten aus $\{z_1, \ldots, z_{k-1}\}$ besitzt (also $u \in R_{i,k}^{k-1}$), v einen Berechnungspfad, der iteriert von z_k nach z_k führt (also $v \in (R_{k,k}^{k-1})^*$), und w einen Berechnungspfad von z_k nach z_j mit Zwischenknoten aus $\{z_1, \ldots, z_{k-1}\}$ (also $w \in R_{k,j}^{k-1}$).

Beispiel

Für den Automaten



erhalten wir die Hilfsprachen

$$R^0_{11} = \{1, \varepsilon\} \qquad R^1_{11} = \{1^i \mid i \geq 0\}$$

$$R^0_{12} = \{0\} \qquad R^1_{12} = \{1^i0 \mid i \geq 0\}$$

$$R^0_{21} = \emptyset \qquad R^1_{21} = \emptyset$$

$$R^0_{22} = \{2, \varepsilon\} \qquad R^1_{22} = \{2, \varepsilon\}$$

$$R^2_{12} = \{1^i02^j \mid i, j \geq 0\} = T(M)$$

Das Pumping–Lemma (uvw–Theorem)

Satz: Für jede reguläre Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ gilt:

$$\exists n \geq 1,$$

$$\forall x \in L \text{ mit } |x| \geq n,$$

$$\exists u, v, w \in \Sigma^* \text{ mit } x = uvw, 1 \leq |v| \leq |uv| \leq n, \quad .$$

$$\forall i \geq 0 \; :$$

$$uv^i w \in L$$

Beweis

Benutze einen DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$, der L erkennt, und wähle $n := |Z|$.

Zu einem Wort $x = a_1 \cdots a_s \in L$ mit $a_i \in \Sigma$ und $s \geq n$ betrachte den resultierenden „Berechnungspfad“ P im Zustandsgraphen G_M:

$$z'_0 \xrightarrow{a_1} z'_1 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_{s-1}} z'_{s-1} \xrightarrow{a_s} z'_s \text{ wobei } z'_0 = z_0 \text{ und } z'_s \in E \ .$$

Es muss zwei Indizes $0 \leq j < k \leq n$ mit $z'_j = z'_k$ geben (Schubfachprinzip).

Berechnugspfad P enthält daher den Zyklus

$$z'_j \xrightarrow{a_{j+1}} z'_{j+1} \xrightarrow{a_{j+2}} \cdots \xrightarrow{a_{k-1}} z'_{k-1} \xrightarrow{a_k} z'_k \ .$$

Da der Zyklus im Berechnungspfad P iteriert durchlaufen (oder auch weggelassen) werden kann, hat die Zerlegung $x = uvw$ mit

$$u = a_1 \cdots a_j \ , \ v = a_{j+1} \cdots a_k \ , \ w = a_{k+1} \cdots a_s$$

die gewünschten Eigenschaften $1 \leq |v| \leq |uv| \leq n$ und

$$\forall i \geq 0 : uv^i w \in L \ .$$

Anwendung: Nachweis der Nichtregularität

Folgerung: Falls für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ die Bedingung

$$\forall n \geq 1,$$

$$\exists x \in L \text{ mit } |x| \geq n,$$

$$\forall u, v, w \in \Sigma^* \text{ mit } x = uvw, 1 \leq |v| \leq |uv| \leq n,$$

$$\exists i \geq 0 \ :$$

$$uv^i w \notin L$$

erfüllt ist, dann ist L nicht regulär.

Beispiele für nicht–reguläre Sprachen

Die folgende Sprache $L \subseteq \{a, b\}^*$ ist nicht regulär:

$$L = \{a^m b^m | \ m \geq 1\}$$

Begründung:

1. Zu beliebig vorgegebenem $n \geq 1$ wähle $x = a^n b^n$.
   Offensichtlich gilt $x \in L$ und $|x| \geq n$.

2. Zu beliebig vorgegebener Zerlegung $x = uvw$ mit $1 \leq |v| \leq |uv| \leq n$ wähle $i = 0$. Beachte, dass uv das Zeichen b nicht enthält (wegen $|uv| \leq n$).

Nun gilt

$$uv^0 w = uw = a^{n-|v|} b^n \notin L \ \ ,$$

da $|uw|_a < |uw|_b$.

Beispiele für nicht–reguläre Sprachen (fortgesetzt)

Die folgende Sprache $L \subseteq \{0\}^*$ ist nicht regulär:

$$L = \{0^m \mid m \text{ ist eine Quadratzahl}\}$$

Begründung:

1. Zu beliebig vorgegebenem $n \geq 1$ wähle $x = 0^{n^2}$.
   Offensichtlich gilt $x \in L$ und $|x| \geq n$.

2. Zu beliebig vorgegebener Zerlegung $x = uvw$ mit $1 \leq |v| \leq |uv| \leq n$ wähle $i = 2$.

Nun gilt

$$uv^2w = 0^{n^2+|v|} \notin L \ ,$$

da $n^2 + |v|$ wegen

$$n^2 < n^2 + |v| \leq n^2 + n < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

keine Quadratzahl ist.

Beispiele für nicht–reguläre Sprachen (fortgesetzt)

Die folgende Sprache $L \subseteq \{0\}^*$ ist nicht regulär:

$$L = \{0^p \mid p \text{ ist eine Primzahl}\}$$

Begründung:

1. Zu beliebig vorgegebenem $n \geq 1$ wähle $x = 0^p$ für eine Primzahl $p \geq n + 2$. Offensichtlich gilt $x \in L$ und $|x| \geq n$.
2. Zu beliebig vorgegebener Zerlegung $x = uvw$ mit $1 \leq |v| \leq |uv| \leq n$ wähle $i = |uw|$. Beachte, dass $|uw| = p - |v| \geq (n + 2) - n = 2$.

Nun gilt

$$uv^{|uw|}w = 0^{|uw|(|v|+1)} \notin L \ ,$$

da $|uw|(|v| + 1)$ offensichtlich keine Primzahl ist.

Eine aufpumpbare, aber nicht reguläre Sprache

Anmerkung: Das Pumping Lemma gibt keine eindeutige Charakterisierung regulärer Sprachen.

Beispiel: Die Sprache $L = \{c^m a^n b^n | m, n \geq 0\} \cup \{a^m b^n | m, n \geq 0\}$ lässt sich aufpumpen, ist aber nicht reguär.

Wörter aus L lassen sich aufpumpen, indem z.B. ihr erster Buchstabe c oder a aufgepumpt wird. Das resultierende Wort ist weiterhin in L. Beachte, dass Wörter $a^n b^n$ in beiden Teilsprachen liegen, aber nach Aufpumpen des a's nur noch in der zweiten.

Dass L nicht regulär ist, werden wir noch sehen.

Zwei Relationen auf Wörtern

Definition: M sei ein DFA mit Startzustand z_0.

$$xR_My \textbf{ gdw } z_0 \cdot x = z_0 \cdot y \quad .$$

intuitiv: M „identifiziert“ die Wörter x und y: nach Verarbeitung von x erreicht er denselben Zustand wie nach Verarbeitung von y.

Definition (Nerode–Relation) $L \subseteq \Sigma^*$ sei eine formale Sprache.

$$\mathrm{Suff}_L(x) := \{w \in \Sigma^* : \ xw \in L\}$$

sei die Menge der Suffixe, die $x \in \Sigma^*$ zu einem Wort aus L fortsetzen.
Wir definieren:

$$xR_Ly \textbf{ gdw } \mathrm{Suff}_L(x) = \mathrm{Suff}_L(y) \quad .$$

Wir sagen Suffix w unterscheidet zwischen x und y, wenn entweder $xw \in L$ und $yw \notin L$ oder $xw \notin L$ und yw in L.
Beobachtung:
xR_Ly **gdw** Es gibt keinen Suffix, der zwischen x und y unterscheidet.

Eigenschaften dieser Relationen

Bemerkungen

1. Beide Relationen sind Äquivalenzrelationen,
   d.h., sie sind reflexiv, symmetrisch und transitiv.
   Σ^* zerfällt also in Äquivalenzklassen von R_L (bzw. von R_M).
   Wir notieren die Äquivalenzklasse von x mit $[x]_R = \{y \mid yRx\}$.

2. Darüberhinaus gilt für $x, y, v \in \Sigma^*$:

$$xR_My \implies xvR_Myv$$

$$xR_Ly \implies xvR_Lyv$$

Exkurs: Index, Verfeinerung, Vergröberung

R, R_1, R_2 seien Äquivalenzrelationen.

- Index von R = Anzahl der Äquivalenzklassen von R (evtl. ∞).
- R_1 heißt Verfeinerung von R_2 (und R_2 Vergröberung von R_1) **gdw** $aR_1b \Rightarrow aR_2b$.
  In diesem Fall zerfällt jede Äquivalenzklasse von R_2 in Äquivalenzklassen von R_1 und somit gilt:

$$\text{Index von } R_2 \leq \text{ Index von } R_1 \ .$$

Der Satz von Myhill und Nerode

Satz: L ist regulär **gdw** R_L hat einen endlichen Index.

Der Beweis zerfällt in zwei Teile.

1. Beweisrichtung

Lemma: Wenn L regulär ist, dann hat R_L einen endlichen Index.

Beweis in 5 Teilschritten:

- Wähle einen DFA M, der L erkennt (und nur Zustände besitzt, die vom Startzustand z_0 aus erreichbar sind).
- Index von $R_M = |Z|$, da jeder Zustand $z \in Z$ genau eine Äquivalenzklasse, nämlich $\{x|\ z_0 \cdot x = z\}$, induziert.
- $z_0 \cdot x = z_0 \cdot y \implies \mathrm{Suff}_L(x) = \mathrm{Suff}_L(y)$.
  Ansonsten gäbe es einen Suffix w, der zwischen x und y unterscheidet, und M würde auf einer der Eingaben xw und yw einen Fehler machen.
- R_L ist Vergröberung von R_M:
  $$xR_My \implies z_0 \cdot x = z_0 \cdot y \implies \mathrm{Suff}_L(x) = \mathrm{Suff}_L(y) \implies xR_Ly$$
- Index von $R_L \leq$ Index von $R_M = |Z| < \infty$.

2. Beweisrichtung

Lemma: Wenn R_L einen endlichen Index hat, dann ist L regulär.

Für ein Wort x bezeichne $[x]$ die zugehörige Äquivalenzklasse bez. R_L.
Bei endlichem Index von R_L, sagen wir Index k, gibt es k Äquivalenzklassen, sagen wir $[x_1], \ldots, [x_k]$.

Beweis erfolgt durch Angabe eines DFA (Nerode–Automat) $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$:

1. $Z = \{[x_1], \ldots, [x_k]\}$.
2. $z_0 = [\varepsilon]$.
3. $E = \{[x] | \ x \in L\}$.
4. $\delta([x], a) = [xa]$.

Die Wohldefiniertheit von δ folgt aus $xR_Ly \implies xaR_Lya$.

- M gestartet in Zustand $[\varepsilon]$ ist nach Verarbeitung eines Wortes x (gemäß der Definition von δ) im Zustand $[x]$.
- Aus der Definition von E folgt nun $T(M) = L$.

Beispiel

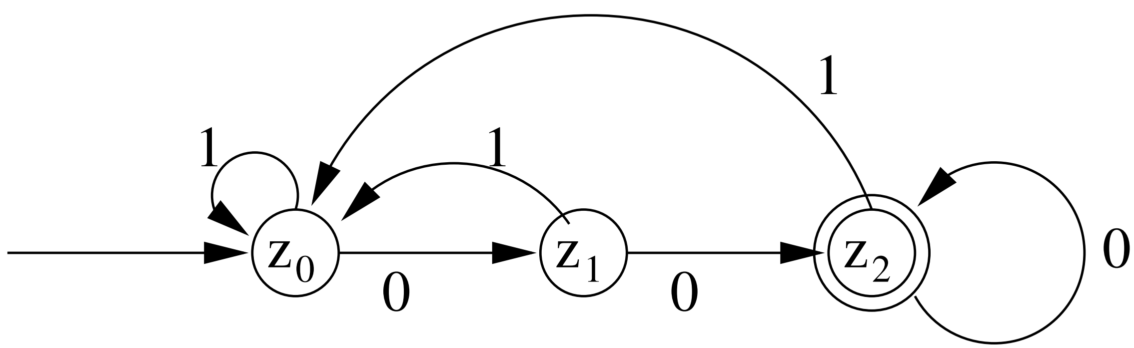
Betrachte die Sprache

$$L = \{x \in \{0,1\}^* |\ x \text{ endet mit } 00\} \ .$$

R_L hat drei Äquivalenzklassen:

$$\begin{array}{rcl} [\varepsilon] & = & \{x|\ x \text{ endet nicht mit } 0\} \\ [0] & = & \{x|\ x \text{ endet mit } 0 \text{ aber nicht mit } 00\} \\ [00] & = & \{x|\ x \text{ endet mit } 00\} \end{array}$$

Der Nerode–Automat mit Zuständen $z_0 = [\varepsilon], z_1 = [0], z_2 = [00]$ ist dann durch folgenden Zustandsgraphen gegeben:



Eine Sprache mit unendlichem Index

Die uns bereits bekannte nicht reguläre Sprache

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

hat unendlichen Index, denn R_L induziert die disjunkten Äquivalenzklassen:

$$\begin{array}{rcl}
[\varepsilon] & = & \{\varepsilon\} \\
[ab] & = & L \\
[a^2b] & = & \{a^2b, a^3b^2, \ldots\} \\
[a^3b] & = & \{a^3b, a^4b^2, \ldots\} \\
 & \vdots & \\
[a^kb] & = & \{a^{k+i-1}b^i | i \geq 1\} \\
 & \vdots &
\end{array}$$

Minimalität des Nerode Automat

Anmerkung: Der Nerode Automat zu einer Sprache L ist minimal für L. Denn für einen DFA M mit $T(M) = L$ ist R_M eine Verfeinerung von R_L.

Ausserdem gibt es keine strukturell unterschiedlichen DFA's mit minimaler Zustandszahl. Denn wenn der DFA M für L minimal ist, dann sind R_M und R_L identisch. Also sind die Automaten bis auf Umbennung der Zustände gleich. Beachte: dies gilt nicht für NFA's.

Frage: Wie kann man einen gegeben DFA minimieren?

Ein DFA M ist nicht minimal, wenn es Zustände z, z' gibt, mit

$$\forall x \in \Sigma^* : \hat{\delta}(z, x) \in E \leftrightarrow \hat{\delta}(z', x) \in E$$

Idee: finde und verschmelze solche Zustände.

Minimierung eines gegebenen DFA

Eingabe: DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$, bei dem jeder Zustand vom Startzustand aus erreichbar ist

Ausgabe: Minimalautomat M_0 zu M:
der DFA mit möglichst wenigen Zuständen, der dieselbe Sprache wie M erkennt

Methode: Verschmelzung äquivalenter Zustände (Details folgen)

Äquivalente und inäquivalente Zustände

$$T_M(z) := \{w \in \Sigma^* : \; z \cdot w \in E\}$$

sei die Menge aller Wörter, die z in einen Endzustand überführen. Zwei Zustände $z_1, z_2 \in Z$ heißen äquivalent, notiert als $z_1 \sim z_2$, **gdw** $T_M(z_1) = T_M(z_2)$. $[z]$ bezeichnet im Folgenden die Äquivalenzklasse zum Zustand z.

Wir sagen w unterscheidet zwischen z_1 und z_2 **gdw** entweder $z_1 \cdot w \in E$ und $z_2 \cdot w \notin E$ oder $z_1 \cdot w \notin E$ und $z_2 \cdot w \in E$.

Somit gilt $z_1 \sim z_2$ **gdw** es kein Wort gibt, das zwischen z_1 und z_2 unterscheidet.

Beobachtung

Genau dann, wenn $z_1 \sim z_2$, können z_1 und z_2 zu **einem** Zustand „verschmolzen“ werden, ohne die Sprache $T(M)$ abzuändern.

Auffinden von inäquivalenten Zustandspaaren

- Falls $z_1 \in E$ und $z_2 \notin E$ (oder umgekehrt), dann sind z_1, z_2 inäquivalent.
  Begründung: Das leere Wort ε unterscheidet zwischen z_1 und z_2.

- Falls z_1', z_2' inäquivalent sind, und $z_1' = z_1 \cdot a, z_2' = z_2 \cdot a$ für ein $a \in \Sigma$, dann sind auch z_1, z_2 inäquivalent.
  Begründung: Wenn w zwischen z_1' und z_2' unterscheidet, dann unterscheidet aw zwischen z_1 und z_2.

- Zum Auffinden aller inäquivalenten Zustände genügt es, diese Prozedur zu iterieren, bis keine neuen inäquivalenten Paare mehr gefunden werden.
  Begründung: Kürzeste Zeugen für inäquivalente Paare sind präfix-abgeschlossen. Also, ist aw kürzester Zeuge für die Inäquivalenz von z_1, z_2, so ist w kürzester Zeuge für die Inäquivalenz von $z_1' = z_1 \cdot a, z_2' = z_2 \cdot a$.

Resultierende Minimierungsprozedur

Markierung aller Paare inäquivalenter Zustände kann wie folgt geschehen:

Initialisierung: Markiere alle Paare (z_1, z_2) mit $z_1 \in E$ und $z_2 \notin E$ sowie alle Paare mit $z_1 \notin E$ und $z_2 \in E$.

Iteration: Solange ein unmarkiertes Paar (z_1, z_2), ein $a \in \Sigma$ und ein markiertes Paar (z_1', z_2') mit $z_1' = z_1 \cdot a, z_2' = z_2 \cdot a$ existieren, markiere (z_1, z_2) ebenfalls.

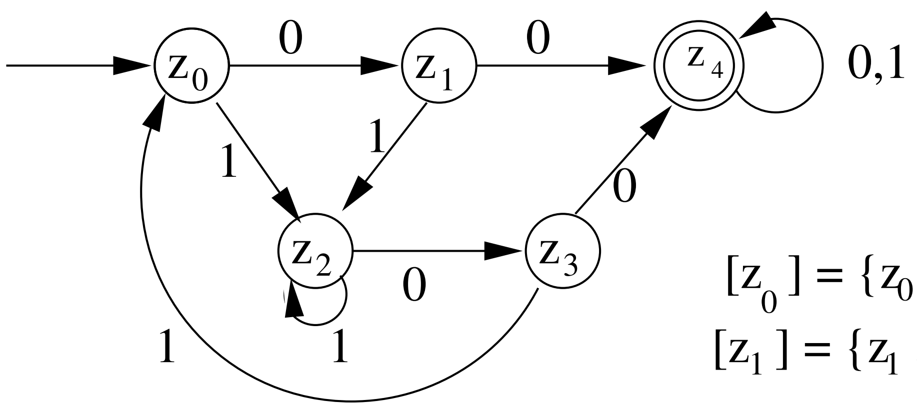
Äquivalente Zustandspaare sind gerade die unmarkierten Paare.

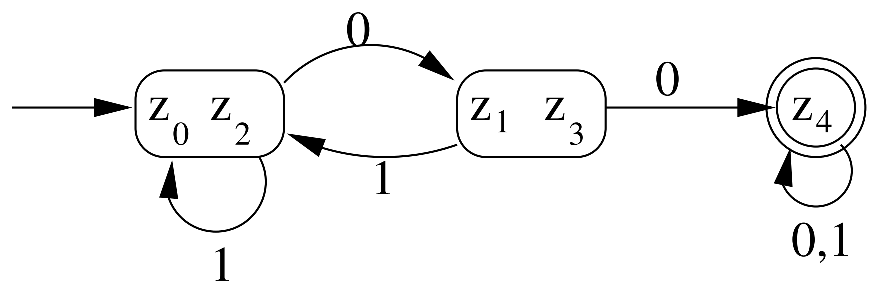
Berechnung des Minimalautomaten:

- Transformiere G_M zu einem „gröberen“ Zustandsgraphen, bei welchem jede Äquivalenzklasse von Knoten durch einen einzigen „Superknoten“ repräsentiert ist.
- Eine mit a markierte Kante von z nach z' wird dann zu einer mit a markierten Kante von $[z]$ nach $[z']$.
- Startknoten ist nun $[z_0]$, Endknoten sind die Superknoten $[z]$ mit $z \in E$.

Beispiel

Links der DFA M, rechts der Minimalautomat M_0:





$[z_0] = \{z_0, z_2\}$

$[z_1] = \{z_1, z_3\}$

Die folgende Tabelle gibt die markierten Paare inäquivalenter Knoten an:

	z_0	z_1	z_2	z_3
z_1	*			
z_2		*		
z_3	*		*	
z_4	*	*	*	*

Abschlusseigenschaften

Satz: Die Klasse der regulären Sprachen ist abgeschlossen unter den Operationen $\cup, \cdot, *, \neg, \cap$.

Beweis:

- Abschluss unter $\cup, \cdot, *$ ist offensichtlich:
  Reguläre Sprachen sind durch reguläre Ausdrücke repräsentierbar.

- Abschluss unter $\neg$ ist einfach nachzuweisen:
  Falls $T(M) = L$ mit DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ so folgt $T(\bar{M}) = \bar{L}$ mit DFA $\bar{M} := (Z, \Sigma, \delta, z_0, Z \setminus E)$.

- Abschluss unter $\cap$ ergibt sich jetzt mit „de Morgan“:

$$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1 \cap L_2}} = \overline{\bar{L}_1 \cup \bar{L}_2}$$

Eine aufpumpbare, aber nicht reguläre Sprache (fortgesetzt)

Erinnerung: Also ist $L = \{c^m a^n b^n \mid m, n \geq 0\} \cup \{a^m b^n \mid m, n \geq 0\}$ nicht regulär, denn sonst wäre auch

$$L' = \{ca^n b^n \mid n \geq 0\} = L \cap L(ca^* b^*)$$

regulär.

Der „Produktautomat“

Produktautomat liefert einen alternativen Beweis für den Abschluss unter Vereinigung und Durchschnitt.

Zu gegeben DFAs $M_1 = (Z_1, \Sigma, \delta_1, z_{01}, E_1)$ und $M_2 = (Z_2, \Sigma, \delta_2, z_{02}, E_2)$ betrachte den DFA

$$M = (Z_1 \times Z_2, \Sigma, \delta, (z_{01}, z_{02}), E)$$

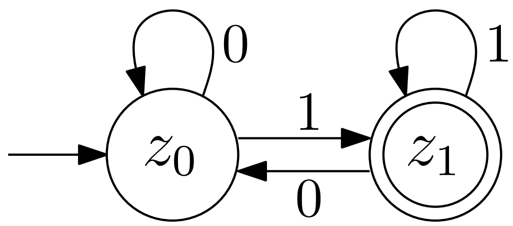
mit

$$\delta((z_1, z_2), a) = (\delta_1(z_1, a), \delta_2(z_2, a)) \ .$$

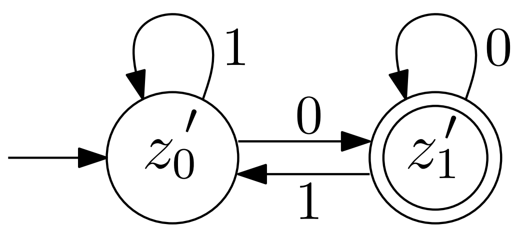
Intuition: M führt die „Rechnungen“ von M_1 und M_2 parallel aus.

- Mit $E = E_1 \times E_2$ folgt $T(M) = T(M_1) \cap T(M_2)$.
- Mit $E = (E_1 \times Z_2) \cup (Z_1 \times E_2)$ folgt $T(M) = T(M_1) \cup T(M_2)$.

Der „Produktautomat“ – ein Beispiel

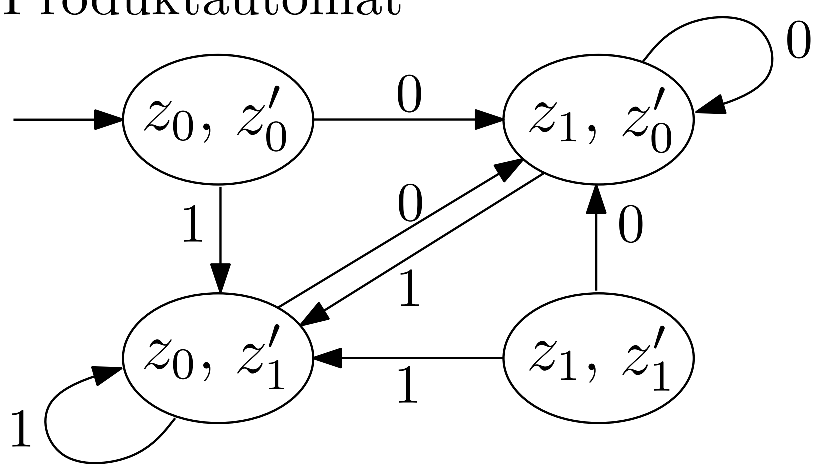


erkennt $L = L((0|1)^*1)$



erkennt $L = L((0|1)^*0)$

Produktautomat



mit

$E_\cap = \{(z_1, z_1')\}$ für $L \cap L' = \emptyset$

$E_\cup = Z \setminus \{(z_0, z_0')\}$ für $L \cup L' = \Sigma^+$

Das Wortproblem

Spezielles Wortproblem für eine reguläre Sprache $L \subseteq \Sigma^*$

Eingabe: $x \in \Sigma^*$

Frage: $x \in L$?

Komplexität: lösbar in Realzeit ($n = |x|$ Rechenschritte)

Methode: Benutze einen DFA M mit $T(M) = L$. Gestartet auf Eingabe x liefert er die Antwort in $|x|$ „Rechenschritten".

Das „Leerheitsproblem“

Eingabe: DFA M gegeben durch seinen Zustandsgraphen G_M

Frage: $T(M) = \emptyset$?

Komplexität: lösbar in Linearzeit

Methode: Verwende eine Graphexplorationstechnik (wie DFS oder BFS):

$$T(M) \neq \emptyset \Leftrightarrow \text{ von } z_0 \text{ ist ein Zustand aus } E \text{ erreichbar}$$

Bemerkung: Eine analoge Methode ist auch bei gegebenem NFA verwendbar.

Das „Endlichkeitsproblem“

Eingabe: DFA M gegeben durch seinen Zustandsgraphen G_M

Frage: $|T(M)| < \infty$?

Komplexität: lösbar in Linearzeit

Methode: Verwende eine Graphexplorationstechnik (wie DFS oder BFS):

- Markiere alle Zustände, die von z_0 aus erreichbar sind und von denen ausgehend sich ein Zustand aus E erreichen lässt. Es bezeichne G'_M von markierten Knoten induzierten Untergraphen von G_M.
- Nutze aus:

$$|T(M)| = \infty \Leftrightarrow G'_M \text{ enthält einen Zyklus}$$

Bemerkung: Eine analoge Methode ist auch bei gegebenem NFA verwendbar.

Das „Schnittproblem“

Eingabe: DFAs M_1, M_2 gegeben durch ihre Zustandsgraphen G_{M_1}, G_{M_2}

Frage: $T(M_1) \cap T(M_2) = \emptyset$?

Komplexität: lösbar mit quadratischem Zeitaufwand

Methode: Berechne den Produktautomaten M mit $T(M) = T(M_1) \cap T(M_2)$ und löse für M das Leerheitsproblem.

Bemerkung: Eine analoge Methode ist auch bei gegebenen NFAs verwendbar.

Das „Inklusionsproblem“

Eingabe: DFAs M_1, M_2 gegeben durch ihre Zustandsgraphen G_{M_1}, G_{M_2}

Frage: $T(M_1) \subseteq T(M_2)$?

Komplexität: lösbar mit quadratischem Zeitaufwand

Methode: Nutze aus, dass $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap \bar{B} = \emptyset$.

- Berechne aus M_2 den DFA $\bar{M}_2$ mit $T(\bar{M}_2) = \overline{T(M_2)}$.
- Löse für M_1 und $\bar{M}_2$ das Schnittproblem.

Das „Äquivalenzproblem“

Eingabe: DFAs M_1, M_2 gegeben durch ihre Zustandsgraphen G_{M_1}, G_{M_2}

Frage: $T(M_1) = T(M_2)$?

Komplexität: lösbar mit quadratischem Zeitaufwand

Methode: Offensichtliche Reduktion auf das Inklusionsproblem wegen

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ und } B \subseteq A)$$

Bemerkung: Bei gegebenem NFA, reguärer Grammatik oder reguärem Ausdruck lässt sich dies nicht so effizient bestimmen.

Lernziele

- Kenntnis der wesentlichen Konzepte und Resultate auf dem Level der regulären Sprachen besitzen und Zusammenhänge verstehen
- aus DFA bzw. NFA den Zustandsgraphen ablesen und umgekehrt
- zu einer regulären Sprache einen passende(n) reguläre Grammatik, DFA, NFA, bzw. regulären Ausdruck angeben können und umgekehrt
- wechselseitige Transformationen zwischen den Repräsentationsformen (reguläre Grammatik, DFA, NFA, regulärer Ausdruck) durchführen können
- Nachweis der Nicht–Regularität einer Sprache mit Hilfe des Pumping–Lemmas führen können
- Nerode–Relation zu einer Sprache bestimmen können
- den Minimalautomaten zu einem gegebenen DFA konstruieren können
- zu einem DFA die besprochenen Entscheidungsprobleme lösen können