

# Kontextfreie Sprachen

**Hans U. Simon (RUB)**

mit Modifikationen von

**Maike Buchin (RUB)**

Lehrstuhl Mathematik und Informatik

Homepage: <http://www.ruhr-uni-bochum.de/lmi>

## Bekannte Beispiele

**Erinnerung:** Kontextfreie Grammatiken haben Regeln der Form

$$X \rightarrow w \text{ mit } X \in V, w \in (\Sigma \cup V)^+.$$

Die Regeln

$$E \rightarrow T \mid E + T, T \rightarrow F \mid T * F, F \rightarrow a \mid (E)$$

erzeugen die korrekt geklammerten arithmetischen Ausdrücke.

Die Regeln

$$S \rightarrow ab \mid aSb$$

erzeugen die einfache Klammersprache

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\} .$$

## Kontextfreie Regeln und Rekursion

Die **Variablen** in kontextfreien Regeln repräsentieren **rekursiv definierbare Konzepte**. Zum Beispiel:

- Lies Regel  $E \rightarrow T \mid E + T$  wie folgt: Ein **Expression** ist ein **Term** oder die **Summe** aus einem **Expression** und einem **Term**.
- Lies Regel  $S \rightarrow ab \mid aSb$  wie folgt: ein **Mitglied** der einfachen **Klammer-sprache** hat die Form  $ab$  oder ist ein von  $a$  und  $b$  eingeklammertes **Mitglied** der einfachen **Klammersprache**.

# Kontextfreie Regeln und Programmiersprachen

Programmiersprachen enthalten

- eine Vielzahl rekursiv definierbarer Konzepte
- und diverse Klammerstrukturen

Betrachte zum Beispiel folgendes Fragment einer kontextfreien Grammatik für MODULA:

$$\begin{aligned}\langle \text{Anw} \rangle &\rightarrow \langle \text{While-Anw} \rangle \mid \langle \text{If-Anw} \rangle \mid \dots \\ \langle \text{While-Anw} \rangle &\rightarrow \text{WHILE } \langle \text{Bedingung} \rangle \text{ DO } \langle \text{Anw} \rangle \text{ END} \\ \langle \text{If-Anw} \rangle &\rightarrow \text{IF } \langle \text{Bedingung} \rangle \text{ THEN } \langle \text{Anw} \rangle \text{ END} \\ \langle \text{Bedingung} \rangle &\rightarrow \dots\end{aligned}$$

## Chomsky Normalform (CNF)

**Definition:** Eine kontextfreie Grammatik ist in **Chomsky Normalform**, wenn sie nur Regeln der Form

$$A \rightarrow BC, A \rightarrow a \text{ mit } A, B, C \in V, a \in \Sigma$$

besitzt.

**Effekt:** **Binäre Syntaxbäume !**

## Transformation in Chomsky Normalform

**Satz:** Jede kontextfreie Grammatik  $G$  mit  $\varepsilon \notin L(G)$  kann in eine äquivalente kontextfreie Grammatik  $G'$  in Chomsky Normalform transformiert werden.

Der Beweis erfolgt in 4 Phasen, die folgendes erreichen:

1. Nur Regeln der Form  $A \rightarrow a$  dürfen überhaupt auf der rechten Seite ein Zeichen aus  $\Sigma$  verwenden. Die Grammatik heißt dann **separiert**.
2. Die rechte Seite einer Regel hat maximal die Länge 2.
3. Es gibt keine  $\varepsilon$ -Regeln mehr.
4. Es gibt keine „Kettenregeln“ (der Form  $A \rightarrow B$ ) mehr.

Danach ist die Grammatik in **Chomsky Normalform**.

## Ziel 1: Separierte Grammatik

- Führe für jedes Terminalzeichen  $a$  eine neue Variable  $X_a$  ein sowie die neuen Regeln  $X_a \rightarrow a$ .  
(Jedes Terminalzeichen bekommt eine „große Schwester“ in  $V$ .)
- Bei einer Regel, deren rechte Seite nicht nur aus einem Terminalzeichen bzw. einem String über  $V$  besteht, wird jedes Terminalzeichen  $a$  durch seine „große Schwester“  $X_a \in V$  ersetzt.

Danach ist die **Grammatik separiert** (ohne dass die Sprache abgeändert wurde).

## Ziel 2: Verkürzung rechter Seiten von Regeln

Ersetze eine Regel  $R$  der Form

$$A \rightarrow B_1 B_2 \cdots B_k, \quad k \geq 3$$

unter Verwendung neuer Variablen  $R_1, \dots, R_{k-2}$  durch das Regelsystem

$$A \rightarrow B_1 R_1, \quad R_1 \rightarrow B_2 R_2, \quad \cdots, \quad R_{k-3} \rightarrow B_{k-2} R_{k-2}, \quad R_{k-2} \rightarrow B_{k-1} B_k .$$

Danach hat jede rechte Seite einer Regel maximal die Länge 2 (ohne dass die Sprache abgeändert wurde).

### Ziel 3: Elimination von $\varepsilon$ -Regeln

- Bestimme nach folgendem Schema die Menge  $V_\varepsilon$  aller Variablen, aus denen  $\varepsilon$  ableitbar ist:
  1. Nimm anfangs in  $V_\varepsilon$  alle Variablen  $A$  auf, zu denen eine Regel der Form  $A \rightarrow \varepsilon$  existiert.
  2. Solange noch Regeln der Form  $B \rightarrow CD$  mit  $C, D \in V_\varepsilon, B \notin V_\varepsilon$  bzw.  $B \rightarrow C$  mit  $C \in V_\varepsilon, B \notin V_\varepsilon$  existieren, nimm auch  $B$  in  $V_\varepsilon$  auf.
- Für jede Regel der Form  $A \rightarrow BC$  mache folgendes:
  - Falls  $B \in V_\varepsilon$ , dann kreiere die zusätzliche Regel  $A \rightarrow C$ .
  - Falls  $C \in V_\varepsilon$ , dann kreiere die zusätzliche Regel  $A \rightarrow B$ .
- **Eliminiere** alle  $\varepsilon$ -Regeln.

Danach enthält die Grammatik keine  $\varepsilon$ -Regeln mehr (ohne das die Sprache abgeändert wurde).

## Ziel 4: Elimination von Kettenregeln

- Betrachte den „Kettenregel-Graphen“  $G_K$  bestehend aus allen Variablen als Knoten und Kettenregel  $A \rightarrow B$  als Kanten
- Finde alle Zyklen  $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_k \rightarrow A_1$  in  $G_K$  und ersetze die Variablen  $A_2, \dots, A_k$  durch  $A_1$
- Nummeriere die Knoten in  $G_K$  mit  $A_1, \dots, A_r$ , so dass für  $A_i \rightarrow A_j$  gilt  $i < j$  („topologisches Sortieren“)
- Bearbeite die Knoten in umgekehrter Reihenfolge  $A_r, \dots, A_1$ .  
Ersetze  $A_i \rightarrow A_j$  durch Regeln  $A_i \rightarrow \alpha$  für jede Regel  $A_j \rightarrow \alpha$ .

Danach enthält die Grammatik keine Kettenregeln mehr. Durch den Trick mit der „Vererbung“ rechter Seiten wurden die Kettenregeln überflüssig gemacht. Die Sprache wird durch die beschriebenen Transformationsschritte nicht abgeändert.

## Beispiel

Die kontextfreie Grammatik mit den Regeln

$$S \rightarrow aOb, O \rightarrow P \mid OO \mid aOb, P \rightarrow x \mid E, E \rightarrow \varepsilon$$

wird in Chomsky Normalform gebracht wie folgt:

1. Mit Hilfe der neuen Variablen  $A, B$  (die „großen Schwestern“ von  $a, b$ ) erhalten wir die **separierte Grammatik**

$$S \rightarrow AOB, O \rightarrow P \mid OO \mid AOB, P \rightarrow x \mid E, E \rightarrow \varepsilon, A \rightarrow a, B \rightarrow b.$$

2. Mit Hilfe der neuen Variablen  $C$  vermeiden wir zu lange rechte Seiten, indem die Regeln  $S \rightarrow AOB$  bzw.  $O \rightarrow AOB$  ersetzt werden durch

$$S \rightarrow AC, C \rightarrow OB \text{ und } O \rightarrow AC.$$

## Beispiel (fortgesetzt)

Zwischenergebnis nach Phase 2:

$$S \rightarrow AC, C \rightarrow OB, O \rightarrow P \mid OO \mid AC, \\ P \rightarrow x \mid E, E \rightarrow \varepsilon, A \rightarrow a, B \rightarrow b$$

3.  $V_\varepsilon = \{E, P, O\}$ . Die Technik zur Elimination von  $\varepsilon$ -Regeln führt zu

$$S \rightarrow AC, C \rightarrow OB \mid B, O \rightarrow P \mid OO \mid AC, \\ P \rightarrow x \mid E, A \rightarrow a, B \rightarrow b.$$

Dabei wurde die überflüssige Regel  $O \rightarrow O$  weggelassen.

4. Die Technik zur Elimination von Kettenregeln führt zu

$$S \rightarrow AC, C \rightarrow OB \mid b, O \rightarrow OO \mid AC \mid x, \\ P \rightarrow x, A \rightarrow a, B \rightarrow b.$$

## Das Pumping–Lemma (uvwxy–Theorem)

**Satz:** Für jede kontextfreie Sprache  $L \subseteq \Sigma^*$  gilt:

$$\exists n \geq 1,$$

$$\forall z \in L \text{ mit } |z| \geq n,$$

$$\exists u, v, w, x, y \in \Sigma^* \text{ mit } z = uvwxy, 1 \leq |vx| \leq |vwx| \leq n, \quad .$$

$$\forall i \geq 0 :$$

$$uv^iwx^iy \in L$$

Es folgt:

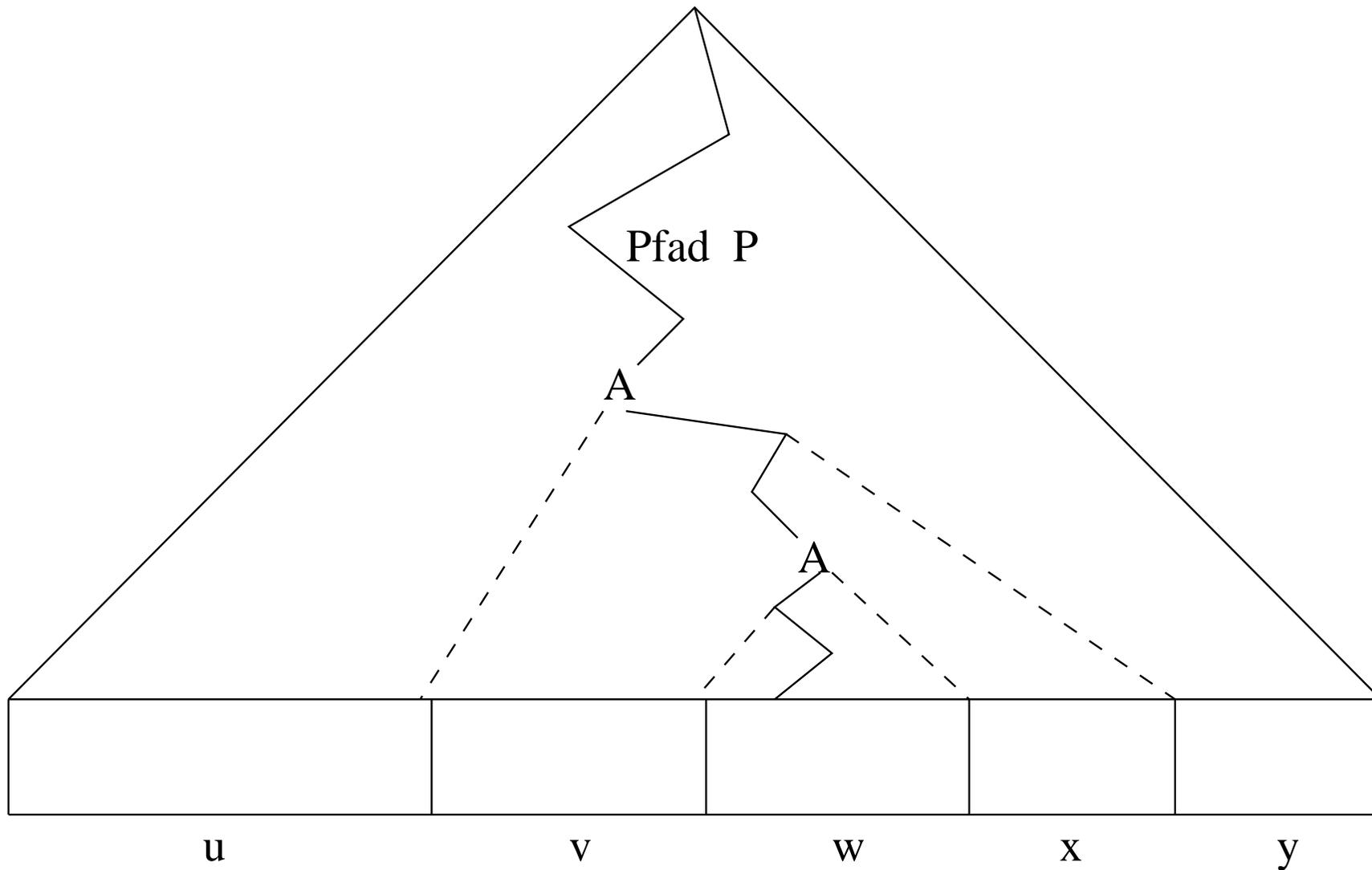
- der formale Beweis
- plus eine Veranschaulichung

- Benutze eine kontextfreie Grammatik  $G$  für  $L \setminus \{\varepsilon\}$  in Chomsky Normalform und wähle  $k := |V|$  (Anzahl der Variablen) und  $n := 2^k$ .
- Zu einem Wort  $z = a_1 \cdots a_s \in L$  mit  $a_i \in \Sigma$  und  $s \geq n$  betrachte den Syntaxbaum  $T$  mit Beschriftung  $z$  und den binären Teilbaum  $T'$ , der von den inneren Knoten von  $T$  induziert wird.
- Da  $T'$  (wie auch  $T$ )  $s \geq 2^k$  Blätter hat, folgt  $h := (\text{Höhe von } T') \geq k$ .
- Betrachte einen Pfad  $P$  der Länge  $h \geq k$  (also mit  $h + 1 \geq k + 1$  Knoten) in  $T'$ . Gemäß Schubfachprinzip sind zwei der  $k + 1$  letzten Knoten von  $P$  mit derselben Variable, sagen wir  $A$ , markiert.
- Die Ableitung von  $z$  aus dem Startsymbol  $S$  hat demnach die folgende Form:

$$S \Rightarrow_G^* \overbrace{uAy \Rightarrow_G^* uvAxy}^{\text{zyklischer Teil}} \Rightarrow_G^* uvwxy = z$$

für geeignet gewählte Wörter  $u, v, w, x, y$  mit  $1 \leq |vx| \leq |vwx| \leq n$ .

- Durch  **$i$ -fache Iteration** (oder Weglassen) des zyklischen Ableitungsteils sehen wir, dass  $uv^iwx^iy \in L$  für alle  $i \geq 0$ .



Baum  $T$  mit Beschriftung  $z = uvwxy$

## Anwendung: Nachweis der Nichtkontextfreiheit

**Folgerung:** Falls für eine Sprache  $L \subseteq \Sigma^*$  die Bedingung

$$\forall n \geq 1,$$

$$\exists z \in L \text{ mit } |z| \geq n,$$

$$\forall u, v, w, x, y \in \Sigma^* \text{ mit } z = uvwxy, 1 \leq |vx| \leq |vwx| \leq n,$$

$$\exists i \geq 0 :$$

$$uv^iwx^iy \notin L$$

erfüllt ist, dann ist  $L$  nicht kontextfrei.

## Beispiel für eine nicht-kontextfreie Sprache

Die folgende Sprache  $L \subseteq \{a, b\}^*$  ist nicht kontextfrei:

$$L = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 1\}$$

### Begründung:

1. Zu beliebig vorgegebenem  $n \geq 1$  wähle  $z = a^n b^n c^n$ .  
Offensichtlich gilt  $z \in L$  und  $|z| \geq n$ .
2. Zu beliebig vorgegebener Zerlegung  $z = uvwxy$  mit  $1 \leq |vx| \leq |vwx| \leq n$   
wähle  $i = 0$ . Beachte, dass  $vx$  wegen  $|vwx| \leq n$  das Zeichen  $a$  oder das  
Zeichen  $c$  nicht enthält.

Nun gilt

$$z' = uv^0wx^0y = uwy \notin L ,$$

da die notwendige Bedingung

$$|z'|_a = |z'|_b = |z'|_c$$

nicht erfüllt sein kann.

## Der Fall unärer Sprachen

**Vereinfachte Form des Pumping Lemmas:** Für jede kontextfreie Sprache  $L \subseteq \{0\}^*$  gilt:

$$\exists n \geq 1,$$

$$\forall m \geq n \text{ mit } 0^m \in L$$

$$\exists 1 \leq l \leq n$$

.

$$\forall i \geq 0 :$$

$$0^{m-l}0^{il} \in L$$

**denn:** Für die Zerlegung  $0^m = uvwxy$  aus dem Pumping Lemma wähle  $l := |vx|$  so dass  $vx = 0^l$ .

## Der Fall unärer Sprachen (fortgesetzt)

**Satz:** Jede kontextfreie Sprache über einem einelementigen Alphabet ist sogar regulär.

**Folgerung:** Die folgenden Sprachen sind nicht kontextfrei:

$$L = \{0^p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$$

$$L = \{0^m \mid m \text{ ist Quadratzahl}\}$$

## Beweis des Satzes

- Sei  $L$  kf Sprache. Wähle  $n$  als die **Konstante aus dem Pumping Lemma**.
- Wähle  $q = n!$ . Dann gilt für alle  $m \geq n$  und alle  $i \geq 0$ :

$$0^m \in L \implies 0^{m+iq} \in L .$$

- Für jedes  $r \in \{0, \dots, q - 1\}$  definiere

$$m_r = \min\{m \mid 0^m \in L \wedge m \geq n \wedge m \equiv r \pmod{q}\} .$$

Sei  $R$  die Menge aller  $r \in \{0, \dots, q - 1\}$ , bei denen das Minimum nicht über der leeren Menge gebildet wird.

- Mit diesen Bezeichnungen gilt: Die Sprache

$$L' := \overbrace{\{x \in L \mid |x| < n\}}^{\text{endlich}} \cup \bigcup_{r \in R} \overbrace{\{0^{m_r+iq} \mid i \geq 0\}}^{0^{m_r} (0^q)^*}$$

ist **regulär** und es gilt  $L' = L$ .

## Der CYK-Algorithmus

Das spezielle Wortproblem für eine kontextfreie Sprache  $L$  (mit  $\varepsilon \notin L$ ):

**Eingabe:**  $w = a_1 \cdots a_n$  mit  $a_i \in \Sigma$

**Frage:**  $w \in L$  ?

Der Algorithmus von Cocke, Younger und Kasami benutzt eine kontextfreie Grammatik  $G = (V, \Sigma, P, S)$  in Chomsky Normalform für  $L$  und die Methode des dynamischen Programmierens zur Berechnung einer Tabelle  $T$ :

1. Für  $1 \leq i, j \leq n$  berechne

$$T[i, j] := \{A \in V \mid A \Rightarrow_G^* a_i a_{i+1} \cdots a_{i+j-1}\} .$$

2. Akzeptiere  $w$  gdw  $S \in T[1, n]$ .

Wegen

$$S \in T[1, n] \text{ gdw } S \Rightarrow_G^* a_1 a_2 \cdots a_n = w$$

akzeptiert der Algorithmus exakt die Eingaben aus  $L$ .

## Berechnung der Tabelle

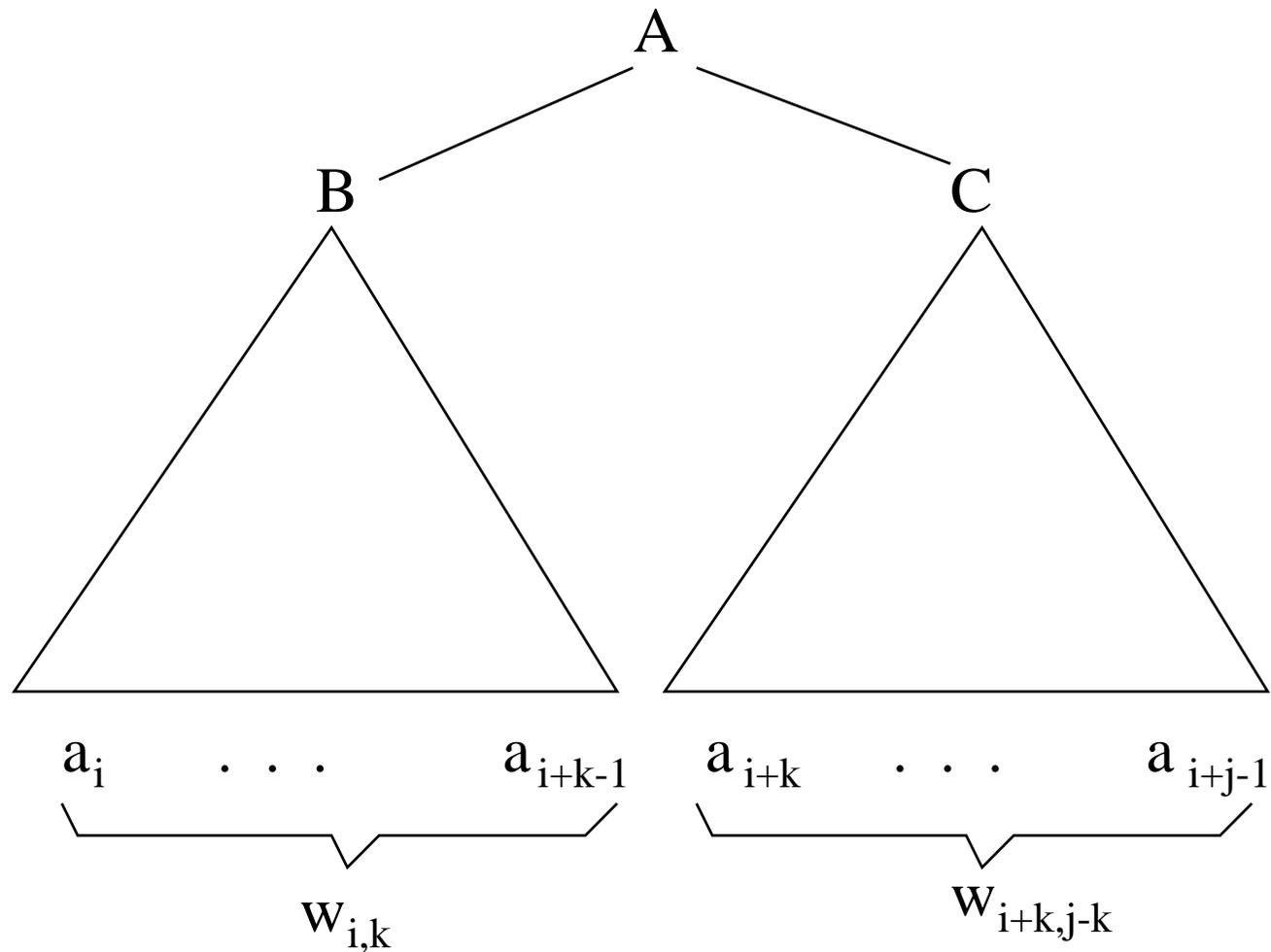
- Das Teilwort

$$w_{i,j} := a_i a_{i+1} \cdots a_{i+j-1}$$

ist das ab Position  $i$  beginnende Teilwort von  $w$  der Länge  $j$ .

- $T[i, j]$  soll die Menge aller Variablen sein, aus denen das Teilwort  $w_{i,j}$  ableitbar ist.
- Die **Ableitung** eines Teilwortes  $a_i$  der Länge 1 aus einer Variablen  $A$  ist nur über eine Regel der Form  $A \rightarrow a_i$  möglich ist.
- Die **Ableitung** eines Teilwortes  $w_{i,j} = a_i \cdots a_{i+j-1}$  für  $j \geq 2$  hat wegen der binären Syntaxbäume eine **spezielle Form** (s. folgende Illustration).

## Berechnung der Tabelle (fortgesetzt)

Abbildung 1: Syntaxbaum zur Ableitung  $A \Rightarrow_G^* w_{i,j}$ .

## Berechnung der Tabelle (fortgesetzt)

Tabelle  $T$  kann spaltenweise nach folgendem Schema berechnet werden:

$$T[i, 1] = \{X \in V \mid X \rightarrow a_i \in P\}$$

$$\begin{aligned} T[i, j] &= \{X \in V \mid \exists k \in \{1, \dots, j-1\}, \exists X \rightarrow BC \in P : \\ &\quad B \Rightarrow_G^* w_{i,k} , C \Rightarrow_G^* w_{i+k, j-k}\} \\ &= \{X \in V \mid \exists k \in \{1, \dots, j-1\}, \exists X \rightarrow BC \in P : \\ &\quad B \in T[i, k] , C \in T[i+k, j-k]\} \end{aligned}$$

berechnet werden.

Beachte, dass die Tabelleneinträge  $T[i, k]$  und  $T[i+k, j-k]$  zum Zeitpunkt der Berechnung von  $T[i, j]$  schon bekannt sind.

## Beispiel

Die Sprache  $L = \{a^n b^n c^m \mid n, m \geq 1\}$  wird durch folgende kontextfreie Grammatik mit Startvariable  $S$  generiert:

$$S \rightarrow AB, A \rightarrow ab \mid aAb, B \rightarrow c \mid cB$$

Umformen in Chomsky Normalform ergibt:

$$S \rightarrow AB, A \rightarrow CD \mid CF, B \rightarrow c \mid EB, C \rightarrow a, D \rightarrow b, E \rightarrow c, F \rightarrow AD$$

## Beispiel (fortgesetzt)

$S \rightarrow AB$  ,  $A \rightarrow CD \mid CF$  ,  $B \rightarrow c \mid EB$  ,  $C \rightarrow a$  ,  $D \rightarrow b$  ,  $E \rightarrow c$  ,  $F \rightarrow AD$

Eingabe *aaabbbcc* führt zu folgender Tabelle:

$j \downarrow   i \rightarrow$	a	a	a	b	b	b	c	c
1	C	C	C	D	D	D	E,B	E,B
2			A				B	-
3			F				-	-
4		A				-	-	-
5		F			-	-	-	-
6	A			-	-	-	-	-
7	S		-	-	-	-	-	-
8	S	-	-	-	-	-	-	-

## Greibach Normalform (GNF)

**Definition:** Eine kontextfreie Grammatik ist in **Greibach Normalform**, wenn sie nur Regeln der Form

$$A \rightarrow aB_1 \cdots B_k, \quad A \rightarrow a \text{ mit } k \geq 1, A, B_1, \dots, B_k \in V, a \in \Sigma$$

besitzt (einzelnes Terminalzeichen gefolgt von einem String aus Variablen).

**Bemerkung:**

- Die **Einschränkung auf  $k = 1$**  würde die **regulären Grammatiken** liefern.
- Greibach Normalform führt später zu **Kellerautomaten, die in „Realzeit“ arbeiten** (in jedem Schritt ein Eingabesymbol verarbeiten).

## Transformation in Greibach Normalform

**Satz:** Jede kontextfreie Grammatik  $G$  mit  $\varepsilon \notin L(G)$  kann in eine äquivalente kontextfreie Grammatik  $G'$  in Greibach Normalform transformiert werden.

Wir gehen **oBdA** davon aus, dass  $G$  **separiert** ist und **keine  $\varepsilon$ -Regeln** besitzt (was zum Beispiel bei Chomsky Normalform der Fall ist).

Der Beweis besteht aus vier Teilen:

1. Technik zur **Vermeidung von „Linksrekursion“**
2. Erzwingen einer **„Monotonie-Eigenschaft“** unter **Verwendung von Hilfsvariablen**
3. Transformation in **Greibach-Normalform** abgesehen von  $B$ -Regeln für eine Hilfsvariable  $B$
4. Transformation der  $B$ -Regeln in **Greibach Normalform** für jede Hilfsvariable  $B$

## Eine Invarianzbedingung

Im Beweis wird das Regelsystem  $P$  dynamisch modifiziert werden. Dabei wird es jedoch stets nur Regeln enthalten, deren rechte Seiten

- zu  $V^+$  gehören (String aus Variablen)
- oder der GNF genügen (einzelnes Terminalzeichen gefolgt von einem — evtl. leeren — String aus Variablen).

### Bemerkungen:

1. Anfangs ist dies der Fall, da wir von einer separierten kontextfreien Grammatik ohne  $\varepsilon$ -Regeln ausgehen.
2. Dass die Eigenschaft erhalten bleibt, könnte im Prinzip induktiv gezeigt werden.

Es folgt eine Beschreibung der vier Beweisteile.

## Vermeidung von Linksrekursion

Die  $A$ -Regeln

$$A \rightarrow \overbrace{A\alpha_1 \mid \cdots \mid A\alpha_k}^{\text{linksrekursiv}} \mid \beta_1 \mid \cdots \mid \beta_l \text{ mit } \alpha_i \neq \varepsilon$$

erzeugen gerade die durch folgenden regulären Ausdruck beschreibbaren Satzformen:

$$(\beta_1 \mid \cdots \mid \beta_l) \cdot (\alpha_1 \mid \cdots \mid \alpha_k)^*$$

Diese Satzformen lassen sich genau so gut (ohne Linksrekursion) erzeugen durch

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \beta_1 \mid \cdots \mid \beta_l \mid \beta_1 B \mid \cdots \mid \beta_l B \\ B &\rightarrow \alpha_1 \mid \cdots \mid \alpha_k \mid \alpha_1 B \mid \cdots \mid \alpha_k B \end{aligned}$$

$B$  ist dabei eine **neue Variable**.

## Erzwingen einer Monotonie-Eigenschaft

### Ziel:

Für  $V = \{A_1, \dots, A_m\}$  und Regeln der Form  $A_i \rightarrow A_j \alpha$  erzwinge, dass  $i < j$ .

Dies leistet folgende „**Bootstrapping**“-Methode:

FOR  $i := 1$  TO  $m$  DO

FOR  $j := 1$  TO  $i - 1$  DO

FOR all  $A_i \rightarrow A_j \alpha \in P$  DO

Seien  $A_j \rightarrow \beta_1 | \dots | \beta_k$  alle  $A_j$ -Regeln

**Streiche**  $A_i \rightarrow A_j \alpha$  aus  $P$

Füge  $A_i \rightarrow \beta_1 \alpha | \dots | \beta_k \alpha$  hinzu

ENDFOR

ENDFOR

**Vermeide** linksrekursive Regeln der Form  $A_i \rightarrow A_i \alpha$  (sofern vorhanden)  
mit der besprochenen Technik unter Einsatz der **Hilfsvariable**  $B_i$

ENDFOR

## Greibach Normalform für $A_i$ -Regeln

Die Monotonie-Eigenschaft impliziert, dass die rechten Seiten der  $A_m$ -Regeln mit einem Terminalzeichen beginnen. Folgende Methode erreicht diese Eigenschaft iterativ auch für die Variablen  $A_{m-1}, \dots, A_1$ :

```
FOR  $i := m - 1$  DOWNTO 1 DO
  FOR  $j := i + 1$  TO  $m$  DO
    FOR all  $A_i \rightarrow A_j \alpha \in P$  DO
      Seien  $A_j \rightarrow \beta_1 | \dots | \beta_k$  alle  $A_j$ -Regeln
      Streiche  $A_i \rightarrow A_j \alpha$  aus  $P$ 
      Füge  $A_i \rightarrow \beta_1 \alpha | \dots | \beta_k \alpha$  hinzu
    ENDFOR
  ENDFOR
ENDFOR
```

## Greibach Normalform für $B_i$ -Regeln

Die rechte Seite einer  $B_i$ -Regel beginnt mit einer Variable  $A_j$ . Da alle  $A_j$ -Regeln bereits der Greibach-Normalform genügen, ist die folgende Maßnahme nun ausreichend:

```
FOR  $i := 1$  TO  $m$  DO
  FOR  $j := 1$  TO  $m$  DO
    FOR all  $B_i \rightarrow A_j\alpha \in P$  DO
      Seien  $A_j \rightarrow \beta_1 | \dots | \beta_k$  alle  $A_j$ -Regeln
      Streiche  $B_i \rightarrow A_j\alpha$  aus  $P$ 
      Füge  $B_i \rightarrow \beta_1\alpha | \dots | \beta_k\alpha$  hinzu
    ENDFOR
  ENDFOR
ENDFOR
```

## Beispiel

**Aufgabe:** Bringe die durch

$$A_1 \rightarrow A_2 A_3, A_2 \rightarrow A_3 A_1 \mid b, A_3 \rightarrow A_1 A_2 \mid a$$

gegebene Grammatik in Greibach Normalform.

Beim Erzwingen der Monotonie-Eigenschaft müssen nur die  $A_3$ -Regeln modifiziert werden. Es entstehen folgende Zwischenergebnisse:

$$(1) A_3 \rightarrow A_2 A_3 A_2 \mid a$$

$$(2) A_3 \rightarrow A_3 A_1 A_3 A_2 \mid b A_3 A_2 \mid a$$

$$(3) A_3 \rightarrow b A_3 A_2 \mid a \mid b A_3 A_2 B_3 \mid a B_3$$

$$(3) B_3 \rightarrow A_1 A_3 A_2 \mid A_1 A_3 A_2 B_3$$

Beim Übergang von (2) nach (3) wurde die Technik zur Vermeidung von Linksrekursion eingesetzt.

## Beispiel (fortgesetzt)

$$A_1 \rightarrow A_2A_3$$

$$A_2 \rightarrow A_3A_1 \mid b$$

$$A_3 \rightarrow bA_3A_2 \mid a \mid bA_3A_2B_3 \mid aB_3$$

$$B_3 \rightarrow A_1A_3A_2 \mid A_1A_3A_2B_3$$

hat bereits  $A_3$ -Regeln in GNF. Die Technik zur Vererbung dieser Eigenschaft auf die Variablen  $A_2, A_1$  liefert:

$$A_3 \rightarrow bA_3A_2 \mid a \mid bA_3A_2B_3 \mid aB_3$$

$$A_2 \rightarrow bA_3A_2A_1 \mid aA_1 \mid bA_3A_2B_3A_1 \mid aB_3A_1 \mid b$$

$$A_1 \rightarrow bA_3A_2A_1A_3 \mid aA_1A_3 \mid bA_3A_2B_3A_1A_3 \mid aB_3A_1A_3 \mid bA_3$$

$$B_3 \rightarrow A_1A_3A_2 \mid A_1A_3A_2B_3$$

## Beispiel (fortgesetzt)

$$A_3 \rightarrow bA_3A_2 \mid a \mid bA_3A_2B_3 \mid aB_3$$

$$A_2 \rightarrow bA_3A_2A_1 \mid aA_1 \mid bA_3A_2B_3A_1 \mid aB_3A_1 \mid b$$

$$A_1 \rightarrow bA_3A_2A_1A_3 \mid aA_1A_3 \mid bA_3A_2B_3A_1A_3 \mid aB_3A_1A_3 \mid bA_3$$

$$B_3 \rightarrow A_1A_3A_2 \mid A_1A_3A_2B_3$$

hat bereits  $A_i$ -Regeln in GNF. Die Technik zur Vererbung dieser Eigenschaft auf die  $B_i$ -Regeln liefert dieselben  $A_i$ -Regeln und die folgenden  $B_3$ -Regeln:

$$\begin{aligned}
 B_3 \rightarrow & bA_3A_2A_1A_3A_3A_2 \mid aA_1A_3A_3A_2 \mid bA_3A_2B_3A_1A_3A_3A_2 \\
 & \mid aB_3A_1A_3A_3A_2 \mid bA_3A_3A_2 \\
 & \mid bA_3A_2A_1A_3A_3A_2B_3 \mid aA_1A_3A_3A_2B_3 \mid bA_3A_2B_3A_1A_3A_3A_2B_3 \\
 & \mid aB_3A_1A_3A_3A_2B_3 \mid bA_3A_3A_2B_3
 \end{aligned}$$

## GNF suggeriert Maschinenmodell

- Betrachte eine Linksableitung in GNF.
- In jedem Schritt wird die vorderste Variable zu einem Terminal und beliebig vielen Variablen hergeleitet.
- Dies lässt sich durch einen Automaten simulieren, der in jedem Schritt ein Zeichen liest, und die Variablen geeignet speichert (s.u.).

## Statischer versus dynamischer Speicher

**Statischer Speicher:** ein im „Programm“ festgelegter Speicherblock konstanter Größe; kann nicht dynamisch (zur Laufzeit) und damit auch nicht in Abhängigkeit von der Länge der Eingabe wachsen.

**Dynamischer Speicher:** kann dynamisch (zur Laufzeit) wachsen und daher auch von der Länge der Eingabe abhängig sein.

- **Endliche Automaten** verfügen (in Form ihrer Zustandsmenge) nur über einen **statischen Speicher**.
- Ihre **beschränkte Potenz** (zum Beispiel die **Unfähigkeit** Sprachen wie  $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$  zu erkennen) ist diesem Umstand geschuldet.

## Kellerspeicher

Eine eingeschränkte aber durchaus wirkungsvolle Form des dynamischen Speichers ist der **Kellerspeicher** (auch einfach „**Keller**“ genannt);

- In einem Keller können **Symbole** „gestapelt“ werden.
- Nur oben auf dem Stapel darf ein Symbol draufgelegt (**Schreib-Operation**) oder entfernt werden (**Lösch-Operation**).
- Der Stapel darf **dynamisch** (theoretisch unbegrenzt) wachsen.

## Ein Lob der „Hochstapelei“

Das Erkennen der nicht-regulären Sprache

$$\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$$

ist unter Verwendung eines Kellerspeichers babyleicht:

**Schreibphase:** Solange  $a$ 's gelesen werden, lege diese auf den Stapel

**Löschphase:** Beim Lesen des ersten  $b$ 's schalte von der Schreib- auf die Löschphase um: pro gelesenen  $b$  entferne von dem Stapel ein  $a$ .

**Akzeptieren/Verwerfen:** Akzeptiere **gdw** die Eingabe die Form  $a^+ b^+$  hat (was mit der „endlichen Kontrolle“ so nebenbei getestet wird) und der Stapel nach Verarbeitung der Eingabe leer ist.

## Beispiel

Bei Eingabe

*aaaabbbb*

verändert sich der Stapel wie folgt:

Eingabe	a	a	a	a	b	b	b	b
				a				
			a	a	a			
		a	a	a	a	a		
Stapel	a	a	a	a	a	a	a	

## Kellerautomat (informelle Definition)

Ein (nichtdeterministischer) **Kellerautomat** (englisch: **pushdown automaton**), kurz **PDA** ist **ein um einen Kellerspeicher erweiterter NFA**.

Die formale Definition wird zudem folgende **technische Details** berücksichtigen:

- Neben dem Eingabealphabet gibt es ein (zum Eingabealphabet nicht notwendig disjunktes) **Kelleralphabet** (inklusive einem „**untersten Kellerzeichen**“).
- Ein PDA darf „ **$\varepsilon$ -Transitionen**“ vollziehen, in denen kein weiteres Eingabesymbol verarbeitet wird.
- Es gibt **nur einen Startzustand** (wegen der  $\varepsilon$ -Transitionen kein echtes „handicap“).
- Die **Eingabe** wird „**mit leerem Keller**“ (wie in dem eben gezeigten illustrierenden Beispiel) **akzeptiert**. (Endzustände sind daher überflüssig.)

## Kellerautomat (formale Definition)

$\mathcal{P}_e(U)$  bezeichnet die Menge aller endlichen Teilmengen einer (evtl. unendlichen) Menge  $U$ .

Ein **PDA**  $M$  besteht aus den folgenden Komponenten:

- $Z$ , die **Zustandsmenge** (eine endliche Menge)
- $\Sigma$ , das **Eingabealphabet** (ebenfalls endlich)
- $\Gamma$ , das **Kelleralphabet** (ebenfalls endlich)
- $\delta : Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow \mathcal{P}_e(Z \times \Gamma^*)$ , die **Überföhrungsfunktion**
- $z_0 \in Z$ , der **Startzustand**
- $\# \in \Gamma$ , das **unterste Kellerzeichen**

**Konvention:** Wir werden des öfteren (ohne dies explizit immer wieder zu erwähnen und hauptsächlich zur Vermeidung lästiger Fallunterscheidungen) mit  $a$  ein Element von  $\Sigma \cup \{\varepsilon\}$  bezeichnen.

## Konventionen

- Der String  $B_1 \cdots B_k$  wird im Grenzfall  $k = 0$  mit dem leeren Wort identifiziert.
- Der Kellerinhalt wird als String notiert, wobei das „links“ im String „oben“ im Keller bedeutet.

Beachte, dass die Ersetzung von  $A$  durch  $B_1 \cdots B_k$  im Keller die folgenden Grenzfälle mit einschließt:

**Lösch-Operation** Im Falle  $k = 0$  wird  $A$  aus dem Keller entfernt.

**Ersetzung** Im Falle  $k = 1$  wird  $A$  durch  $B_1$  ersetzt. Dabei ist auch  $B_1 = A$  erlaubt, d.h., der Keller bliebe unverändert.

Falls  $k \geq 1$  ist im Anschluss  $B_1$  das oberste Kellersymbol.

## Arbeitsweise des PDA

- **Anfangs** befindet sich  $M$  im Startzustand  $z_0$  und der Keller enthält nur das unterste Kellersymbol  $\#$ .
- Falls  $(z', B_1 \cdots B_k) \in \delta(z, \varepsilon, A)$ , dann darf  $M$  im Zustand  $z$  und bei oberstem Kellersymbol  $A$  eine  $\varepsilon$ -**Transition** vollziehen, wobei ein Wechsel auf den Zustand  $z'$  erfolgt und im Keller das oberste Symbol  $A$  durch  $B_1 \cdots B_k$  ersetzt wird.
- Falls  $(z', B_1 \cdots B_k) \in \delta(z, a, A)$  mit  $a \in \Sigma$ , dann darf  $M$  im Zustand  $z$ , bei oberstem Kellersymbol  $A$  und beim Lesen des Eingabesymbols  $a$  auf den Zustand  $z'$  wechseln und im Keller das oberste Symbol  $A$  durch  $B_1 \cdots B_k$  ersetzen. Anschließend rückt der Lesekopf des Eingabebandes auf das nächste Symbol.
- Die Eingabe wird **akzeptiert gdw**  $M$  durch geeignete Wahl der jeweils möglichen Rechenschritte erreichen kann, dass der **Keller nach Verarbeitung des letzten Zeichens der Eingabe** (+ evtl. weiteren  $\varepsilon$ -Transitionen) **leer** ist.

## Exkurs: Konfiguration (Momentaufnahme)

In eine Konfiguration für einen (evtl. nichtdeterministischen) Prozess packen wir alle Informationen hinein, die nötig sind, um

- den Prozess zu suspendieren (temporär zu stoppen)
- und ihn später wieder weiterlaufen zu lassen.

### Beispiele:

- Informationen die Betriebssysteme von laufenden Prozessen protokollieren (s. Grundvorlesung zur Informatik oder Vorlesung über Betriebssysteme)
- Schachspiel mit Konfiguration bestehend aus der aktuellen Schachstellung und einem Zusatzbit, welches angibt, ob WEISS oder SCHWARZ am Zug ist (+ weitere Details wegen komplizierter Remis-Regeln)

## Konfigurationen eines PDA

Die Konfiguration eines PDA besteht aus

- dem aktuellen Zustand  $z \in Z$ ,
- dem noch nicht verarbeiteten Teil  $v \in \Sigma^*$  der Eingabe,
- dem aktuellen Kellerinhalt  $\alpha \in \Gamma^*$ .

**Notation:**  $(z, v, \alpha) \in Z \times \Sigma^* \times \Gamma^*$ .

**Anfangskonfiguration bei Eingabe  $w$ :**  $(z_0, w, \#)$

**Akzeptierende Endkonfiguration:**  $(z, \varepsilon, \varepsilon)$  für jedes  $z \in Z$

## Folgekonfigurationen

Eine „Rechnung“ eines PDA lässt sich als Folge von Konfigurationen beschreiben.

### Definition

1.  $(z', v', \alpha')$  heißt **unmittelbare Folgekonfiguration** von  $(z, v, \alpha)$  **gdw**  $(z, v, \alpha)$  wird in einem Rechenschritt in  $(z', v', \alpha')$  übergeführt (einmalige Verwendung der Überföhrungsfunktion).

**Notation:**  $(z, v, \alpha) \vdash (z', v', \alpha')$ .

2.  $(z', v', \alpha')$  heißt **Folgekonfiguration** von  $(z, v, \alpha)$  **gdw**  $(z, v, \alpha)$  wird durch eine (evtl. leere) Folge von Rechenschritten in  $(z', v', \alpha')$  übergeführt.

**Notation:**  $(z, v, \alpha) \vdash^* (z', v', \alpha')$ .

Formal ist „ $\vdash^*$ “ die reflexive–transitive Hülle von „ $\vdash$ “.

## Sprache eines PDA

Die folgende Definition der vom PDA  $M$  erkannten Sprache  $N(M)$  entspricht unserer Vereinbarung über das Akzeptieren mit leerem Keller:

$$N(M) := \{w \in \Sigma^* \mid \exists z \in Z : (z_0, w, \#) \vdash^* (z, \varepsilon, \varepsilon)\}$$

**In Worten:** Wort  $w$  gehört zur Sprache  $N(M)$  **gdw**  $M$  durch Verarbeitung der Eingabe  $w$  aus der Anfangskonfiguration in eine akzeptierende Endkonfiguration gelangen kann.

**Konvention:** Im Folgenden schreiben wir (der besseren Lesbarkeit zuliebe)

$$zA \xrightarrow{a} z'x \text{ statt } (z', x) \in \delta(z, a, A) .$$

## Beispiel

Die Sprache

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$$

kann durch folgenden PDA erkannt werden:

- $Z = \{z_0, z_1\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $\Gamma = \{a, \#\}$
- Startzustand  $z_0$
- unterstes Kellersymbol  $\#$

### Intuition:

- Während der Schreibphase ist  $M$  im Zustand  $z_0$ .
- Während der Löschphase ist  $M$  im Zustand  $z_1$ .

## Beispiel (fortgesetzt)

Die folgenden Transitionen realisieren die **Schreibphase**

$$z_0\# \xrightarrow{a} z_0a\# , z_0a \xrightarrow{a} z_0aa$$

Das **Umschalten** von Schreib– auf Löschphase wird realisiert durch

$$z_0a \xrightarrow{b} z_1\varepsilon$$

Die folgenden Transitionen realisieren die **Löschphase**

$$z_1a \xrightarrow{b} z_1\varepsilon , z_1\# \xrightarrow{\varepsilon} z_1\varepsilon$$

Auf der Eingabe  $aabb$  ergibt sich die Rechnung:

$$\begin{array}{l} (z_0, aabb, \#) \vdash (z_0, abb, a\#) \vdash (z_0, bb, aa\#) \vdash \\ (z_1, b, a\#) \vdash (z_1, \varepsilon, \#) \vdash (z_1, \varepsilon, \varepsilon) \end{array}$$

**Anmerkung:** Dieser PDA arbeitet deterministisch in dem Sinne, dass jede Konfiguration nur eine Folgekonfiguration hat.

## Von der kontextfreien Grammatik zum PDA

**Satz:** Jede kontextfreie Grammatik  $G$  kann in einen äquivalenten PDA  $M$  transformiert werden.

**Beweis:** Gegeben  $G = (V, \Sigma, P, S)$  in GNF, wähle die Komponenten von  $M$  wie folgt:

- Zustandsmenge  $\{z\}$  (ein Zustand)
- Eingabealphabet  $\Sigma$
- Kellularphabet  $V \cup \Sigma$
- Überföhrungsfunktion  $\delta$  (durch Transitionen weiter unten spezifiziert)
- Startzustand  $z$
- unterstes Kellerzeichen  $S$

## Beweis (fortgesetzt)

**Plan zum Design des PDA:** Die möglichen Rechnungen von  $M$  sollen in einer 1-zu-1 Beziehung zu den möglichen Linksableitungen bezüglich  $G$  stehen. Dabei soll stets gelten:

$$(\text{gelesener Teil der Eingabe}) \cdot \text{Kellerinhalt} = \text{Satzform} . \quad (1)$$

**Abkürzung:** kfG = Kontextfreie Grammatik

Überföhrungsfunktion  $\delta$  wird nach folgendem Schema entworfen:

kfG	PDA
$A \rightarrow a\alpha'$	$zA \xrightarrow{a} z\alpha'$

Da die Grammatik in GNF, hat jede Regel die Form  $A \rightarrow a\alpha'$ . Der resultierende PDA (ohne  $\varepsilon$ -Transitionen) arbeitet nichtdeterministisch in Realzeit.

## Beweis (fortgesetzt)

Induktiv lässt sich zeigen, dass  $G$  und  $M$  sich im Sinne von (1) wechselseitig entsprechen. Die Induktion erfolgt über die Länge der grammatischen Ableitung bzw. über die Länge der Rechnung des PDA.

**Induktionsanfang:** Anfangs gilt

(gelesener Teil der Eingabe) =  $\varepsilon$ , Kellerinhalt =  $S$ , Satzform =  $S$  .

Wegen  $\varepsilon \cdot S = S$  ist (1) erfüllt.

**Induktionsschritt:** An der Tafel führen wir vor: jeder Schritt einer Linksableitung bezüglich  $G$  ist von  $M$  im Sinne von (1) simulierbar, und umgekehrt.

Aus (1) folgt, dass erfolgreiche Linksableitungen von  $w$  (die zur Satzform  $w$  führen) und akzeptierende Rechnungen von  $M$  auf Eingabe  $w$ , d.h.,

(gelesener Teil der Eingabe) =  $w$ , Kellerinhalt =  $\varepsilon$  ,

sich wechselseitig entsprechen. Also gilt  $L(G) = N(M)$ .

## Beispiel

Die Sprache  $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$  wird durch die Grammatik

$$S \rightarrow aSb \mid ab$$

erzeugt, bzw. in GNF durch

$$S \rightarrow aSB \mid aB, \quad B \rightarrow b.$$

Dies führt zum PDA mit den Transitionen

$$zS \xrightarrow{a} zB, \quad zS \xrightarrow{a} zSB, \quad zB \xrightarrow{b} z\varepsilon.$$

Auf dem Wort  $aabb$  arbeitet der PDA entsprechend der Linksableitung der Grammatik

$$\begin{array}{ccccccc} (z, aabb, S) & \vdash & (z, abb, SB) & \vdash & (z, bb, BB) & \vdash & (z, b, B) & \vdash & (z, \varepsilon, \varepsilon) \\ S & \rightarrow & aSB & \rightarrow & aaBB & \rightarrow & aabB & \rightarrow & aabb \end{array}$$

## Vom PDA zur kontextfreien Grammatik

**Satz:** Jeder PDA  $M$  kann in eine äquivalente kontextfreie Grammatik  $G$  transformiert werden.

### Beweisstruktur:

- Bringe  $M$  zunächst in eine „Normalform“ (ohne die zugehörige Sprache abzuändern).
- Entwerfe eine kontextfreie Grammatik  $G$ , deren Linksableitungen gerade den akzeptierenden Rechnungen von  $M$  entsprechen.

## „Normalform“ des PDA

Transitionen der Form

$$zA \xrightarrow{a} z' B_1 \cdots B_k \text{ mit } k > 2$$

könnten mit Hilfe neuer Zustände  $z_1, \dots, z_{k-2}$  simuliert werden durch die Transitionen

$$zA \xrightarrow{a} z_1 B_{k-1} B_k, \quad z_1 B_{k-1} \xrightarrow{\varepsilon} z_2 B_{k-2} B_{k-1}, \quad \dots, \quad z_{k-2} B_2 \xrightarrow{\varepsilon} z' B_1 B_2 .$$

Daher können wir **annehmen**, dass der gegebene PDA  $M$  nur Transitionen der Form

$$zA \xrightarrow{a} z' B_1 \cdots B_k \text{ mit } k \in \{0, 1, 2\}$$

verwendet.

## Entwurf einer Grammatik (Tripelkonstruktion)

Gegeben der (normalisierte) PDA  $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$ , wähle die Komponenten von  $G$  wie folgt:

- Variablenmenge  $V = \{S\} \cup (Z \times \Gamma \times Z)$
- Terminalalphabet  $\Sigma$
- Produktionensystem  $P$  (durch Regeln weiter unten spezifiziert)
- Startsymbol  $S$

Wegen der Variablen der Form  $(z, A, z') \in Z \times \Gamma \times Z$  spricht man von der „**Tripelkonstruktion**“.

**Intuition:** Interpretiere das Tripel  $(z, A, z')$  als „Wette“ auf folgendes Ereignis: nachdem  $M$ , gestartet im Zustand  $z$  mit Kellerinhalt  $A$ , den Keller geleert hat, befindet er sich im Zustand  $z'$ .

PDA	kfG
$z \in Z$	$S \rightarrow (z_0, \#, z)$
$zA \xrightarrow{a} z'\varepsilon$	$(z, A, z') \rightarrow a$
$zA \xrightarrow{a} z_1B, z' \in Z$	$(z, A, z') \rightarrow a(z_1, B, z')$
$zA \xrightarrow{a} z_1BC, z', z_2 \in Z$	$(z, A, z') \rightarrow a(z_1, B, z_2)(z_2, C, z')$

Die folgende Äquivalenz ist mit Induktion (nach der Länge der Rechnung von  $M$  bzw. nach der Länge der Linksableitung) beweisbar:

$$(z, x, A) \vdash^* (z', \varepsilon, \varepsilon) \text{ gdw } (z, A, z') \Rightarrow^* x$$

$L(G) = N(M)$  ergibt sich jetzt wie folgt:

$$\begin{aligned} w \in N(M) &\Leftrightarrow \exists z \in Z : (z_0, w, \#) \vdash^* (z, \varepsilon, \varepsilon) \\ &\Leftrightarrow \exists z \in Z : S \Rightarrow (z_0, \#, z) \Rightarrow^* w \\ &\Leftrightarrow w \in L(G) \end{aligned}$$

## Induktionsbeweis (Skizze)

Wir beschränken uns hier auf den Induktionsschritt für die Behauptung

**Wenn**  $(z, x, A) \vdash^* (z', \varepsilon, \varepsilon)$  **dann**  $(z, A, z') \Rightarrow^* x$

und betrachten auch nur den folgenden kompliziertesten Fall:

- $x = uv$  ist eine Zerlegung von  $x$ , die die folgende Beschreibung erleichtert.
- $M$  ersetzt zunächst mit einer  $a$ -Transition Kellersymbol  $A$  durch  $BC$ .
- $u$  ist das Teilwort nach dessen Verarbeitung zum ersten Male nur noch das unterste Symbol (nämlich  $C$ ) im Keller steht.
- Nach Verarbeitung des Teilwortes  $v$  ist der Keller zum ersten Male leer.

## Induktionsbeweis (fortgesetzt)

Die geschilderte Rechnung von  $M$  auf  $x = auv$  hat die Form

$$(z, auv, A) \vdash (z_1, uv, BC) \vdash^* (z_2, v, C) \vdash^* (z', \varepsilon, \varepsilon)$$

und kann von  $G$  „simuliert“ werden wie folgt:

$$(z, A, z') \Rightarrow a(z_1, B, z_2)(z_2, C, z') \Rightarrow^* au(z_2, C, z') \Rightarrow^* auv$$

Bei den mit „ $\Rightarrow^*$ “ gekennzeichneten Passagen der Linksableitung wurde die Induktionsvoraussetzung eingesetzt.

## Folgerungen

1. Die Klasse der von PDAs erkennbaren Sprachen stimmt mit der Klasse der kontextfreien Sprachen überein.
2. Jede kontextfreie Sprache kann von einem PDA erkannt werden, der nur einen einzigen Zustand besitzt, ohne  $\varepsilon$ -Transitionen auskommt und daher nichtdeterministisch in Realzeit arbeitet.

## Beispiel

Die Sprache

$$L = \{a_1 a_2 \cdots a_n \$ a_n \cdots a_2 a_1 \mid n \geq 0, a_i \in \{a, b\}\}$$

(mit  $\$ \in L$ ) kann durch einen PDA erkannt werden, der

- in einer „**Schreibphase**“  $a_1, \dots, a_n$  in den Keller legt ( $a_n$  befindet sich dann oben),
- beim Lesen des **Trennzeichens** „ $\$$ “ von der „Schreib–“ in die „Löschphase“ umschaltet,
- in der **Löschphase** beim Lesen von  $a_i$  und oberstem Kellersymbol  $a_i$  (Match!) das Symbol  $a_i$  vom Keller entfernt,
- nach Abarbeitung der Eingabe und bei oberstem Kellersymbol „ $\#$ “, das Symbol  $\#$  vom Keller entfernt (um diesen vollständig zu leeren).

## Beispiel (fortgesetzt)

Auf diese Weise werden auch Eingaben  $w \notin L$  entlarvt. Beim Auftreten von „**Störungen**“ wie

- Eingabe  $w$  hat **nicht die Form**  $w = u\$v$  mit  $u, v \in \{a, b\}^*$ ,
- Auftreten eines „**Mismatches**“ in der Löschphase (gelesenes Zeichen stimmt nicht überein mit dem obersten Kellerzeichen),

wird der Keller (zur Strafe) nicht geleert.

Beachte, dass der Fall des Mismatches die Fälle

$$w = u\$v, |u| \neq |v|$$

mit einschließt.

## Beispiel (fortgesetzt)

$M$  hat die folgenden Komponenten:

- Zustandsmenge  $\{z_0, z_1\}$
- Eingabealphabet  $\{a, b, \$\}$
- Kellularphabet  $\{a, b, \#\}$
- Startzustand  $z_0$
- unterstes Kellerzeichen  $\#$

### Intuition:

- Während der Schreibphase ist  $M$  im Zustand  $z_0$ .
- Während der Löschphase ist  $M$  im Zustand  $z_1$ .

## Beispiel (fortgesetzt)

Die folgenden Transitionen realisieren die **Schreibphase**:

$$\begin{aligned} z_0\# &\xrightarrow{a} z_0a\# & , & & z_0a &\xrightarrow{a} z_0aa & , & & z_0b &\xrightarrow{a} z_0ab \\ z_0\# &\xrightarrow{b} z_0b\# & , & & z_0a &\xrightarrow{b} z_0ba & , & & z_0b &\xrightarrow{b} z_0bb \end{aligned}$$

Das **Umschalten** von Schreib- auf Löschphase wird realisiert durch

$$z_0\# \xrightarrow{\$} z_1\# , z_0a \xrightarrow{\$} z_1a , z_0b \xrightarrow{\$} z_1b .$$

Die folgenden Transitionen realisieren die **Löschphase**:

$$z_1a \xrightarrow{a} z_1\varepsilon , z_1b \xrightarrow{b} z_1\varepsilon , z_1\# \xrightarrow{\varepsilon} z_1\varepsilon$$

Auf der Eingabe  $ba\$ab$  ergibt sich die Rechnung:

$$\begin{aligned} (z_0, ba\$ab, \#) &\vdash (z_0, a\$ab, b\#) &\vdash (z_0, \$ab, ab\#) &\vdash \\ (z_1, ab, ab\#) &\vdash (z_1, b, b\#) &\vdash (z_1, \varepsilon, \#) &\vdash (z_1, \varepsilon, \varepsilon) \end{aligned}$$

## Beispiel (fortgesetzt)

Unser PDA für die Sprache

$$L = \{a_1 a_2 \cdots a_n \$ a_n \cdots a_2 a_1 \mid a_i \in \{a, b\}\}$$

ist **arbeitet deterministisch** in folgendem Sinn:

- **Jede Konfiguration hat nur eine unmittelbare Folgekonfiguration.**

## Beispiel (fortgesetzt)

Die (das leere Wort  $\varepsilon$  enthaltende) Sprache

$$L' = \{a_1 a_2 \cdots a_n a_n \cdots a_2 a_1 \mid n \geq 0, a_i \in \{a, b\}\}$$

( $L$  abzüglich des Trennzeichens) kann von einem PDA  $M'$  erkannt werden, der ein nicht-deterministischer Verwandter von  $M$  ist:

- Transitionen der Schreib— und Löschphase wie zuvor plus folgende Transitionen zum „Umschalten“:

$$z_0 a \xrightarrow{a} z_1 \varepsilon, \quad z_0 b \xrightarrow{b} z_1 \varepsilon, \quad z_0 \# \xrightarrow{\varepsilon} z_1 \varepsilon.$$

$M'$  hat (sofern gelesenes Zeichen mit dem obersten Kellerzeichen übereinstimmt) die Wahl in der Schreibphase zu verweilen oder (mit Hilfe der neuen Transitionen) in die Löschphase umzuschalten. Bei Eingaben aus  $L'$  wird die akzeptierende Rechnung genau zum richtigen Zeitpunkt diese Umschaltung vornehmen (Raten der Nahtstelle an der Mitte des Eingabewortes).

- Man kann zeigen, dass kein deterministischer PDA für  $L'$  existiert.

## Deterministische Kellerautomaten (DPDAs)

Intuitiv nennen wir einen Kellerautomaten **deterministisch**, wenn er über **Endzustände** (statt mit leerem Keller) akzeptiert und wenn er **in jeder Konfiguration maximal eine mögliche Transition** (inklusive der  $\varepsilon$ -Transitionen) zur Verfügung hat.

**Formal:** Ein Kellerautomat  $M$  heißt deterministisch oder kurz **DPDA** gdw gilt:

- Neben den üblichen Komponenten eines Kellerautomaten ist noch eine **Menge  $E \subseteq Z$  von Endzuständen** spezifiziert.
- Für alle  $z \in Z$ ,  $a \in \Sigma$  und  $A \in \Gamma$  gilt

$$|\delta(z, a, A)| + |\delta(z, \varepsilon, A)| \leq 1 .$$

## Deterministisch kontextfreie Sprachen

Die von einem DPDA  $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#, E)$  erkannte Sprache ist dann gegeben durch

$$\{w \in \Sigma^* \mid \exists z \in E, \exists \alpha \in \Gamma^* : (z_0, w, \#) \vdash^* (z, \varepsilon, \alpha)\} .$$

Eine Sprache  $L$  heißt **deterministisch kontextfrei** gdw ein DPDA existiert, der  $L$  erkennt.

**Bemerkung (s. Vorlesung über Compilerbau):**

$$\text{DPDAs} \leftrightarrow \text{LR}(k)\text{-Grammatiken}$$

## Deterministisch kontextfreie Sprachen (fortgesetzt)

**Satz:** Jede reguläre Sprache ist deterministisch kontextfrei.

**denn:** Jeder DFA kann als DPDA aufgefasst werden, der weder von seinem Keller noch von  $\varepsilon$ -Transitionen Gebrauch macht.

**Satz (ohne Beweis):** Jeder PDA, der mit leerem Keller akzeptiert, kann in einen äquivalenten PDA transformiert werden, der mit Endzuständen akzeptiert (und umgekehrt).

**Folgerung:** Jede deterministisch kontextfreie Sprache ist kontextfrei.

**denn:** Jeder DPDA kann als Spezialfall eines mit Endzuständen akzeptierenden PDA angesehen werden.

**Aber:** reguläre Sprachen  $\subsetneq$  dkf Sprachen  $\subsetneq$  kf Sprachen,

denn (wie wir bereits gesehen) ist  $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$  dkf, aber nicht regulär, und  $\{a_1 \dots a_n a_n \dots a_1 \mid n \geq 0, a_i \in \{a, b\}\}$  ist kf, aber nicht dkf.

## Beispiele

Die Sprache

$$L_1 = \{a^m b^m c^n \mid m \geq 1, n \geq 0\}$$

kann von einem DPDA mit  $E = \{z_2\}$  und den folgenden Transitionen erkannt werden:

$$\begin{array}{ll} z_0 \# \xrightarrow{a} z_0 a \# & , \quad z_0 a \xrightarrow{a} z_0 a a \quad \text{Schreibphase} \\ z_0 a \xrightarrow{b} z_1 \varepsilon & , \quad z_1 a \xrightarrow{b} z_1 \varepsilon \quad \text{Löschphase} \\ z_1 \# \xrightarrow{\varepsilon} z_2 \# & , \quad z_2 \# \xrightarrow{c} z_2 \# \quad \text{Endroutine} \end{array}$$

Analog kann

$$L_2 = \{a^n b^m c^m \mid m \geq 1, n \geq 0\}$$

mit einem DPDA erkannt werden.

## Beispiele (fortgesetzt)

Also sind die folgenden Sprachen deterministisch kontextfrei:

$$L_1 = \{a^m b^m c^n \mid m \geq 1, n \geq 0\}$$

$$L_2 = \{a^n b^m c^m \mid m \geq 1, n \geq 0\}$$

Die Sprache

$$L_1 \cap L_2 = \{a^m b^m c^m \mid m \geq 1\}$$

ist (wie wir bereits wissen) **nicht kontextfrei**.

**Folgerung:** Weder deterministisch kontextfreie Sprachen noch kontextfreie Sprachen sind abgeschlossen unter „ $\cap$ “.

## Abschlusseigenschaften

**Satz:** Kontextfreie Sprachen sind abgeschlossen unter den Operationen „ $\cup$ ,  $\cdot$ ,  $*$ “.

**denn:** Gehe aus von den Grammatiken

$$G_1 = (V_1, \Sigma, P_1, S_1) , G_2 = (V_2, \Sigma, P_2, S_2) , V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

für kontextfreie Sprachen  $L_1, L_2$ . Übernahme der Regeln aus  $P_1$  und  $P_2$  und Hinzufügen der Regeln

$$S \rightarrow S_1 \mid S_2 \text{ bzw. } S \rightarrow S_1 S_2 \text{ bzw. } S \rightarrow \varepsilon \mid S_1 S$$

mit neuem Startsymbol  $S$  führt zu einer kontextfreien Grammatik für  $L_1 \cup L_2$  bzw. für  $L_1 \cdot L_2$  bzw.  $(L_1)^*$ .

## Abschlusseigenschaften (fortgesetzt)

Kontextfreie Sprachen sind **nicht abgeschlossen unter** den Operationen „ $\cap$ ,  $\neg$ “.

denn:

- Nicht–Abgeschlossenheit unter „ $\cap$ “ wurde bereits gezeigt.
- Mit deMorgan folgt die Nicht–Abgeschlossenheit unter „ $\neg$ “.

**Genauer:** Abschluss unter „ $\neg$ “ hätte wegen

$$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1 \cap L_2}} = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$$

den Abschluss unter „ $\cap$ “ zur Folge (und ist daher unmöglich).

## Abschlusseigenschaften (fortgesetzt)

**Satz:** Die deterministisch kontextfreien Sprachen sind abgeschlossen unter „ $\neg$ “, aber nicht abgeschlossen unter „ $\cap, \cup, \cdot, *$ “.

- Abschluss unter „ $\neg$ “ ist nicht ganz einfach zu beweisen.  
(Hier: ohne Beweis)
- Nicht–Abgeschlossenheit unter „ $\cap$ “ wurde bereits gezeigt.
- Nicht–Abgeschlossenheit unter „ $\cup$ “ folgt dann direkt mit deMorgan.
- Nicht–Abgeschlossenheit unter „ $\cdot, *$ “ ist einfacher zu beweisen, wenn das Konzept des „Homomorphismus“  $\varphi : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  zur Verfügung steht.  
(Hier: ohne Beweis)

## Abschlusseigenschaften (fortgesetzt)

**Satz:** Der Durchschnitt einer (deterministisch) kontextfreien Sprache mit einer regulären Sprache liefert wieder eine (deterministisch) kontextfreie Sprache.

Zu einem gegebenen PDA  $M_1 = (Z_1, \Sigma, \Gamma_1, \delta_1, z_{01}, \#, E_1)$  — OBdA Akzeptieren mit Endzuständen und keine  $\varepsilon$ -Transitionen! — und einem gegebenen DFA  $M_2 = (Z_2, \Sigma, \delta_2, z_{02}, E_2)$  betrachte den „Produktautomaten“

$$M = (Z_1 \times Z_2, \Sigma, \Gamma_1, \delta, (z_{01}, z_{02}), \#, E_1 \times E_2)$$

mit  $((z'_1, z'_2), B_1 \cdots B_k) \in \delta((z_1, z_2), a, A)$  gdw

$$(z'_1, B_1 \cdots B_k) \in \delta_1(z_1, a, A) \text{ und } z'_2 = \delta_2(z_2, a) .$$

**Intuition:**  $M$  führt die „Rechnungen“ von  $M_1$  und  $M_2$  parallel aus.

Dann gilt:

- $M$  ist ein PDA und erkennt die Sprache  $N(M_1) \cap T(M_2)$ .
- Wenn  $M_1$  ein DPDA ist, dann ist auch  $M$  ein DPDA.

## Das Wortproblem

Spezielles Wortproblem für eine kontextfreie Sprache  $L \subseteq \Sigma^*$

**Eingabe:**  $x \in \Sigma^*$

**Frage:**  $x \in L$  ?

**Komplexität:** lösbar in „kubischer“ Zeit ( $O(n^3)$  Rechenschritte).

**Methode:** Verwende den **CYK-Algorithmus**:  $n^2$  Tabelleneinträge; jeder Eintrag kann in Linearzeit ( $O(n)$  Rechenschritte) bestimmt werden.

**Bemerkung:** Für eine **deterministisch kontextfreie Sprachen** kann das Wortproblem (unter Verwendung einer **LR(k)-Grammatik**) in **Linearzeit** gelöst werden.

## Nützliche und nutzlose Variable

Eine Variable  $A \in V$  einer kontextfreien Grammatik  $G = (V, \Sigma, P, S)$  heißt

- **generierend** gdw  $\exists w \in \Sigma^* : A \Rightarrow_G^* w$   
(d.h., aus  $A$  kann ein Terminalstring abgeleitet werden),
- **erreichbar** gdw  $\exists \alpha, \beta \in (V' \cup \Sigma)^* : S \Rightarrow_G^* \alpha A \beta$ , mit  $V' \subseteq V$  generierende Variablen
- **nützlich** gdw  $A$  generierend und erreichbar ist,
- **nutzlos** gdw  $A$  **nicht nützlich** ist.

**Beobachtung:** Eine Variable  $A \in V$  taucht genau dann in einer Ableitung  $S \Rightarrow_G^* w \in \Sigma^*$  auf, wenn  $A$  nützlich ist.

## Säubern einer kontextfreien Grammatik

Eine kontextfreie Grammatik  $G$  heißt **gesäubert** gdw  $G$  keine nutzlosen Variablen enthält.

Säubern von  $G$  (ohne die Sprache abzuändern):

1. **Berechne** (s. Übung) die Menge aller generierenden Variablen.
2. **Entferne** aus  $G$  die nicht-generierenden Variablen und die Regeln, welche nicht-generierende Variablen verwenden.
3. **Kommentar:** Jetzt sind alle Variablen generierend.
4. **Berechne** (s. Übung) die Menge der erreichbaren Variablen.
5. **Entferne** aus  $G$  die nicht-erreichbaren Variablen und die Regeln, welche nicht-erreichbare Variablen enthalten.
6. **Kommentar:** Jetzt sind alle Variablen generierend und erreichbar und somit nützlich.

Bei geschickter Implementierung erfolgt **Säubern in Linearzeit** !

## Das „Leerheitsproblem“

**Eingabe:** kontextfreie Grammatik  $G$ .

**Frage:**  $L(G) = \emptyset$  ?

**Komplexität:** Linearzeit

**Methode:** Nutze aus:

$$L(G) \neq \emptyset \Leftrightarrow S \text{ ist generierend}$$

## Das „Endlichkeitsproblem“

**Eingabe:** Kontextfreie Grammatik  $G$  ohne Ketten- und  $\varepsilon$ -Regeln

**Frage:**  $|L(G)| < \infty$  ?

**Komplexität:** Linearzeit

**Methode:** • Säubere  $G$ .

- Berechne einen Digraphen  $D$  mit Knotenmenge  $V$ , der eine Kante  $(A, B)$  enthält gwd es gibt eine Regel mit  $A$  auf der linken und  $B$  auf der rechten Seite.
- Nutze aus:

$$|L(G)| = \infty \Leftrightarrow D \text{ enthält einen Zyklus}$$

## Ausblick: Nicht–entscheidbare Probleme

Im Kapitel über Berechenbarkeitstheorie  
werden wir sehen:

Es gibt algorithmisch **nicht entscheidbare Probleme**.

## Beispiele für nicht–entscheidbare Probleme

Für keines der folgenden Probleme gibt es einen Entscheidungsalgorithmus:

**Schnittproblem:** Gegeben sind zwei kontextfreie Grammatiken (oder zwei PDAs).

**Frage:** Existiert ein Terminalstring, der von beiden Grammatiken erzeugt (von beiden PDAs akzeptiert) werden kann ?

**Kommentar:** Sogar das Schnittproblem für deterministisch kontextfreie Sprachen (etwa gegeben durch DPDAs) ist unentscheidbar.

**Äquivalenzproblem** Erzeugen zwei gegebene kontextfreie Grammatiken dieselbe Sprache?

Das Äquivalenzproblem für deterministisch kontextfreie Sprachen  
— Erkennen zwei gegebene DPDAs dieselbe Sprache ? —  
ist hingegen entscheidbar.

**Kommentar:** 1997 fand Senizergues einen Entscheidungsalgorithmus.

## Lernziele zum Level der kontextfreien Sprachen

- Kenntnis der wesentlichen Konzepte und Resultate auf dem Level der (deterministisch) kontextfreien Sprachen besitzen und Zusammenhänge verstehen
- Syntaxbäume und grammatische (Links-)Ableitungen angeben können
- zu einer (evtl. deterministisch) kontextfreien Sprache die passende kontextfreie Grammatik bzw. den passenden PDA (DPDA) angeben können
- zu einer gegebenen kontextfreien Grammatik (bzw. einem gegebenen PDA oder DPDA) die zugehörige Sprache ableiten können
- eine kontextfreie Grammatik in Chomsky oder Greibach Normalform transformieren können
- Nachweis der Nicht-Kontextfreiheit einer Sprache mit Hilfe des Pumping-Lemmas (evtl. auch unter Ausnutzung von Abschlusseigenschaften) führen können

## Lernziele (fortgesetzt)

- den CYK–Algorithmus auf Instanzen des Wortproblems anwenden können
- Rechnungen von PDAs oder DPDAs als Konfigurationsfolgen ausdrücken können
- eine kontextfreie Grammatik in einen äquivalenten PDA transformieren können und umgekehrt
- die besprochenen Synthesprobleme lösen können
- die besprochenen Entscheidungsprobleme lösen können