Wahrscheinlichkeitstheorie

— die Wissenschaft der „Zapper“ und „Zocker“ —

Münzwürfe, Zufallsbits

Elementarereignisse

„Kopf“ oder „Zahl“
„1“ oder „0“

mit Wahrscheinlichkeiten

$$p \text{ und } q := 1 - p$$

für $0 \leq p \leq 1$.

Faire Münze: $p = q = \frac{1}{2}$.

Würfeln

Elementarereignisse

$$1, 2, 3, 4, 5, 6$$

mit nichtnegativen Wahrscheinlichkeiten

$$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 \quad ,$$

deren Gesamtsumme 1 ergibt.

Fairer Würfel: $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{6}$.

Diskreter Wahrscheinlichkeitsraum

Raum

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$$

mit (endlich oder abzählbar unendlich vielen) Elementarereignissen

$$\omega_1, \omega_2, \ldots$$

und enstprechenden nichtnegativen Wahrscheinlichkeiten

$$\Pr[\omega_1], \Pr[\omega_2], \ldots$$

deren Gesamtsumme 1 ergibt.

Einer Teilmenge $E \subseteq \Omega$, genannt *Ereignis*, wird die Wahrscheinlichkeit

$$\Pr[E] := \sum_{\omega \in E} \Pr[\omega]$$

zugeordnet.

Endlicher Raum mit Gleichwahrscheinlichkeit

$$\Omega_n := \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$$

mit

$$\Pr[\omega_1] = \cdots = \Pr[\omega_n] = \frac{1}{n} \ .$$

Es gilt:

$$\Pr[E] = \frac{|E|}{n} = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl aller Fälle}}$$

Spezialfälle

- Ω_2 ist der W.-raum für den Wurf einer fairen Münze.
- Ω_6 ist der W.-raum für das Schmeißen eines fairen Würfels.

Die Wahrscheinlichkeit des Ereinisses „Würfel liefert eine gerade Augenzahl“ ergibt sich wie folgt:

$$\Pr[\{2,4,6\}] = \frac{|\{2,4,6\}|}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Einfache Tatsachen

Für Ereignisse $A, B, A_1, A_2, \ldots$ eines diskreten W.-raumes Ω gilt:

1. $\Pr[\emptyset] = 0$, $\Pr[\Omega] = 1$.
2. $A \subseteq B \Rightarrow \Pr[A] \leq \Pr[B]$.
3. $0 \leq \Pr[A] \leq 1$.
4. Es gilt der „Additionssatz“:

$$A_1, \ldots, A_n \text{ paarweise disjunkt } \Rightarrow \Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i]$$

5. Im Allgemeinen sind Wahrscheinlichkeiten „subadditiv“:

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] \leq \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i]$$

Siebformel für diskrete W.-räume

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{l=1}^{n}(-1)^{l-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_l \le n} \Pr\left[\bigcap_{j=1}^{l} A_{i_j}\right]$$

- Die „alte“ Siebformel

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{l=1}^{n}(-1)^{l-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_l \le n} \left|\bigcap_{j=1}^{l} A_{i_j}\right|$$

  ergibt sich als Spezialfall, indem die obige Siebformel auf einen endlichen Raum mit Gleichwahrscheinlichkeit angewendet wird.

- Einen eleganten Beweis für die „neue“ Siebformel liefern wir später nach (nachdem das Konzept der „Zufallsvariable“ eingeführt wurde).

Bedingte Wahrscheinlichkeit (Beispiel)

Betrachte den W.-raum Ω_6 zum Schmeißen eines fairen Würfels.

- $E = \{2, 4, 6\}$ sei das Ereignis „gerade Augenzahl“.
- $L = \{4, 5, 6\}$ sei das Ereignis „große Augenzahl“.

Was ist die Wahrscheinlichkeit für eine gerade Augenzahl unter der Bedingung (=Vorwissen), dass eine große Augenzahl erzielt wurde ?

Notation: $\Pr[E|L]$ (Wahrscheinlichkeit von E gegeben L)

Antwort: $\Pr[E|L] := \frac{|E \cap L|}{|L|} = \frac{|\{4,6\}|}{|\{4,5,6\}|} = \frac{2}{3}$.

Bedingte Wahrscheinlichkeit: allgemeine Definition

Die bedingte Wahrscheinlichkeit von „Ereignis A gegeben Ereignis B“ unter der Voraussetzung $\Pr[B] > 0$:

$$\Pr[A|B] := \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}$$

Vereinfachung im Falle von Gleichwahrscheinlichkeit:

$$\Pr[A|B] = \frac{|A \cap B|/|\Omega|}{|B|/|\Omega|} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

Aus der Definition ergibt sich für Ereignisse A, B mit echt positiven Wahrscheinlichkeiten:

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[A|B] \cdot \Pr[B] = \Pr[B|A] \cdot \Pr[A]$$

Der Multiplikationssatz

Für Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ mit $\Pr[A_1 \cap \cdots \cap A_n] > 0$ gilt:

$$\Pr[A_1 \cap \cdots \cap A_n] = \Pr[A_1]\,\Pr[A_2|A_1]\,\Pr[A_3|A_1 \cap A_2] \cdots \Pr[A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}]$$

Denn die rechte Seite dieser Gleichung lässt sich umschreiben wie folgt:

$$\Pr[A_1]\frac{\Pr[A_1 \cap A_2]}{\Pr[A_1]}\frac{\Pr[A_1 \cap A_2 \cap A_3]}{\Pr[A_1 \cap A_2]} \cdots \frac{\Pr[A_1 \cap \cdots \cap A_n]}{\Pr[A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}]} = \Pr[A_1 \cap \cdots \cap A_n]$$

Anwendung: das Geburtstagsparadox

m Bälle werden zufällig in $n \geq m$ Körbe geschmissen (Gleichwahrscheinlichkeit).
Betrachte folgende Ereignisse (wobei „K“ für „Kollision“ steht):

$$
\begin{array}{lcl}
K & \Leftrightarrow & \text{es gibt zwei Bälle, die in demselben Korb landen} \\
\bar{K} & \Leftrightarrow & \text{die } m \text{ Bälle verteilen sich auf } m \text{ verschiedene Körbe} \\
A_i & \Leftrightarrow & \text{der } i\text{-te Ball kandet in einem leeren Korb}
\end{array}
$$

Im Falle von m Personen und $n = 365$ ist $\Pr[K]$ die Wahrscheinlichkeit, dass es zwei Personen gibt, die an demselben Tag Geburtstag haben.

Geburtstagsparadox (Analyse)

Offensichtlich gilt:

$$\begin{aligned}
\bar{K} &= \bigcap_{i=1}^{m} A_i \\
\Pr[\bar{K}] &= \Pr[A_1]\Pr[A_2|A_1]\Pr[A_3|A_1\cap A_2]\cdots\Pr[A_m|A_1\cap\cdots\cap A_{m-1}] \\
&= 1\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-m+1}{n} \\
&= 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right) \\
&\le e^0\cdot e^{-1/n}\cdot e^{-2/n}\cdots e^{-(m-1)/n} = e^{-\sum_{i=0}^{m-1} i/n} = e^{-(m-1)m/(2n)}
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\Pr[K] \ge 1 - e^{-(m-1)m/(2n)}$$

Funktion $e^{-(m-1)m/(2n)}$ strebt mit wachsendem m in rasantem Tempo gegen Null, so dass Kollisionen „sehr schnell sehr wahrscheinlich“ werden.

Geburtstagsparadox (konkrete Zahlen)

- Bei 23 Personen ist die Wahrscheinlichkeit des Zusammenfallens zweier Geburtstage bereits größer als 0.5.
- Bei 50 Personen ist die Wahrscheinlichkeit des Zusammenfallens zweier Geburtstage bereits größer als 0.95.

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Für paarweise disjunkte Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ mit jeweils echt positiver Wahrscheinlichkeit und ein Ereignis $B \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n$ gilt:

$$\Pr[B] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[B|A_i] \Pr[A_i]$$

Denn die rechte Seite dieser Gleichung lässt sich umschreiben wie folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{\Pr[B \cap A_i]}{\Pr[A_i]} \Pr[A_i] &= \sum_{i=1}^{n} \Pr[B \cap A_i] \\
&= \Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)\right] \\
&= \Pr\left[B \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \Pr[B]
\end{aligned}$$

Satz von Bayes

Seien wieder $A_1, \ldots, A_n$ paarweise disjunkte Ereignisse mit jeweils echt positiver Wahrscheinlichkeit und $B \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n$ ein weiteres Ereignis mit $\Pr[B] > 0$. Aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit und dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit ergibt sich sofort für alle $i = 1, \ldots, n$:

$$\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i]\Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^n \Pr[B|A_j]\Pr[A_j]}$$

Die Wahrscheinlichkeiten von „A_i gegeben B“ lassen sich also bestimmen mit Hilfe der Wahrscheinlichkeiten von „B gegeben A_j“ (Rollentausch von Vorwissen und analysiertem Ereignis).

Das „Zweikinderproblem“

- Wir sind zu Besuch bei einer Familie mit zwei Kindern.
- Eines, ein Mädchen, hat sich uns bereits vorgestellt.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder Mädchen sind ?

Wir beabsichtigen eine Bayes-Analyse unter den folgenden „Annahmen“:

Gleichwahrscheinlichkeit: Jede der vier Kombinationen JJ,JM,MJ,MM (J=Junge,M=Mädchen) besitzt Wahrscheinlichkeit 1/4.

„Girls First“: Bei der Kombination JM oder MJ lernen wir das Mädchen zuerst kennen.

Die Analyse unter der (evtl. natürlicheren) Annahme

Alles Zufall: Bei jedem von zwei Kindern gibt es eine Wahrscheinlichkeit von 1/2, dieses als erstes kennenzulernen.

verschieben wir auf die Übung.

Bayes-Analyse

Ein Einzelbuchstabe „J“ bzw. „M“ stehe für das Ereignis, dass wir einen Jungen bzw. ein Mädchen als erstes kennenlernen. Aus unseren Grundannahmen ergibt sich:

$$\Pr[JJ] = \Pr[JM] = \Pr[MJ] = \Pr[MM] = \frac{1}{4}$$

$$\Pr[M|JM] = \Pr[M|MJ] = \Pr[M|MM] = 1 \; ; \; \Pr[M|JJ] = 0 \; .$$

Mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit und dem Satz von Bayes folgt somit:

$$\begin{aligned} \Pr[M] &= \frac{1}{4} \cdot (\Pr[M|JJ] + \Pr[M|JM] + \Pr[M|MJ] + \Pr[M|MM]) \\ &= \frac{1}{4} \cdot (0+1+1+1) = \frac{3}{4} \\ \Pr[MM|M] &= \frac{\Pr[M|MM] \cdot \Pr[MM]}{\Pr[M]} = \frac{1 \cdot 1/4}{3/4} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder Mädchen sind, beträgt somit 1/3.

Das „Ziegenproblem“

- Die Kandidatin einer Fernsehshow darf zwischen drei Türen wählen.
- Eine Tür birgt ein teures Auto; die anderen zwei (als Trostpreis) jeweils eine Ziege.
- Nach erfolgter Wahl einer Tür öffnet der Showmaster eine der übrigen Türen, hinter welcher sich (wie er weiß) eine Ziege befindet.
- Er bietet der Kandidatin an, ihre Wahl nochmals zu ändern.

Frage: Ist es schlau, dieses Angebot anzunehmen ?

Grundannahmen und Notationen zum Ziegenproblem

- Jede der drei Türen hat dieselbe Wahrscheinlichkeit, 1/3, das Auto zu bergen.
- Der Showmaster bestimmt die Tür, die er öffnet, per Münzwurf, sofern er überhaupt eine Wahl hat (s. Übungen zu einer davon abweichenden Grundannahme).
- „A“ steht für „Auto“, „Z“ für „Ziege“.
- $W \in \{A, Z\}$ sei das Objekt (Auto oder Ziege) hinter der ursprünglich von der Kandidatin gewählten Tür.
- Enstprechend seien $X, Y \in \{A, Z\}$ die Objekte hinter den beiden im Uhrzeigersinn folgenden Türen.
- „X_{auf}“ (bzw. „Y_{auf}“) bezeichne das Ereignis, das der Showmaster die Tür mit Objekt X (bzw. mit Objekt Y) öffnet (wobei er genau dann eine Wahl hat, wenn $W = A$ und $X = Y = Z$).

Bayes-Analyse

Aus den Grundannahmen ergibt sich

$$\begin{aligned}
\Pr[X_{auf}|W=A] &= \Pr[Y_{auf}|W=A] = \frac{1}{2} \\
\Pr[X_{auf}|X=A] &= \Pr[Y_{auf}|Y=A] = 0 \\
\Pr[X_{auf}|Y=A] &= \Pr[Y_{auf}|X=A] = 1
\end{aligned}$$

und somit:

$$\begin{aligned}
\Pr[X_{auf}] &= \frac{1}{3}(\Pr[X_{auf}|W=A] + \Pr[X_{auf}|X=A] + \Pr[X_{auf}|Y=A]) \\
&= \frac{1}{3}\cdot(1/2+0+1) = \frac{1}{2} \\
\Pr[Y=A|X_{auf}] &= \frac{\Pr[X_{auf}|Y=A]\cdot\Pr[Y=A]}{\Pr[X_{auf}]} = \frac{1\cdot 1/3}{1/2} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Analog: $\Pr[X=A|Y_{auf}] = 2/3$ und $\Pr[W=A|X_{auf}] = \Pr[W=A|Y_{auf}] = 1/3$.

Resultat: Ein Türwechsel verdoppelt die Gewinnchancen !

Unabhängige Ereignisse

Ereignisse A, B heißen *unabhängig* **gdw**

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B] \ .$$

Im Falle von Ereignissen mit echt positiver Wahrscheinlichkeit ist dies gleichbedeutend zu

$$\Pr[A|B] = \Pr[A] \text{ und } \Pr[B|A] = \Pr[B] \ .$$

Intuitiv: Eintreten von Ereignis B liefert uns keine zusätzliche Information darüber, ob A eintritt (und umgekehrt).

Ereignisse $A_1, A_2, \ldots,$ heißen *unabhängig* **gdw** für jede endliche Auswahl $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$ gilt

$$\Pr[A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_r}] = \Pr[A_{i_1}] \cdot \Pr[A_{i_2}] \cdots \Pr[A_{i_r}] \ .$$

„Unabhängig" ist mehr als „paarweise unabhängig"

$\Omega_6^2 = \Omega_6 \times \Omega_6$ mit Gleichverteilung ist der W.-raum für das zweimalige unbhängige Schmeißen eines Würfels. Betrachte folgende Ereignisse:

$$\begin{array}{lcl} A & \Leftrightarrow & \text{1. Wurf liefert eine gerade Augenzahl} \\ B & \Leftrightarrow & \text{2. Wurf liefert eine gerade Augenzahl} \\ C & \Leftrightarrow & \text{Die Summe beider Augenzahlen ist 7} \end{array}$$

Man rechnet leicht nach (an der Tafel in der Vorlesung), dass folgendes gilt:

- $\Pr[A] = \Pr[B] = 1/2$. $\Pr[C] = 1/6$.
- $\Pr[A \cap B] = 1/4$. $\Pr[A \cap C] = \Pr[B \cap C] = 1/12$.

Da das Eintreten von A und B das Ereignis C logisch ausschließt, gilt

$$A \cap B \cap C = \emptyset \text{ und somit } \Pr[A \cap B \cap C] = 0 \ .$$

Es hat sich ergeben, dass A, B, C paarweise unabhängig sind , aber nicht unabhängig.