Digraphen, DAGs und Wurzelbäume

Eingangs- und Ausgangsgrad

Bei einer gerichteten Kante $e = (u, v) \in E$ heißt u *Startknoten* von e; v heißt *Endknoten* von e; e heißt eine aus u *austretende* und in v *mündende* Kante.

Eingangsgrad: $\text{indeg}(v)$ = Anzahl der in v mündenden Kanten.

Ausgangsgrad: $\text{outdeg}(v)$ = Anzahl der aus v austretenden Kanten.

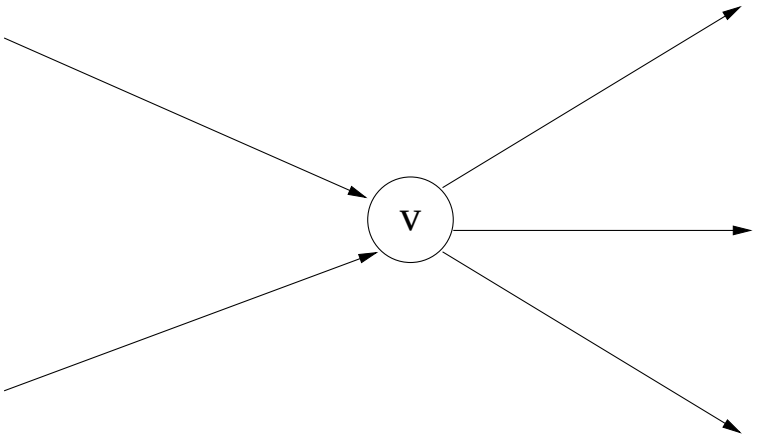
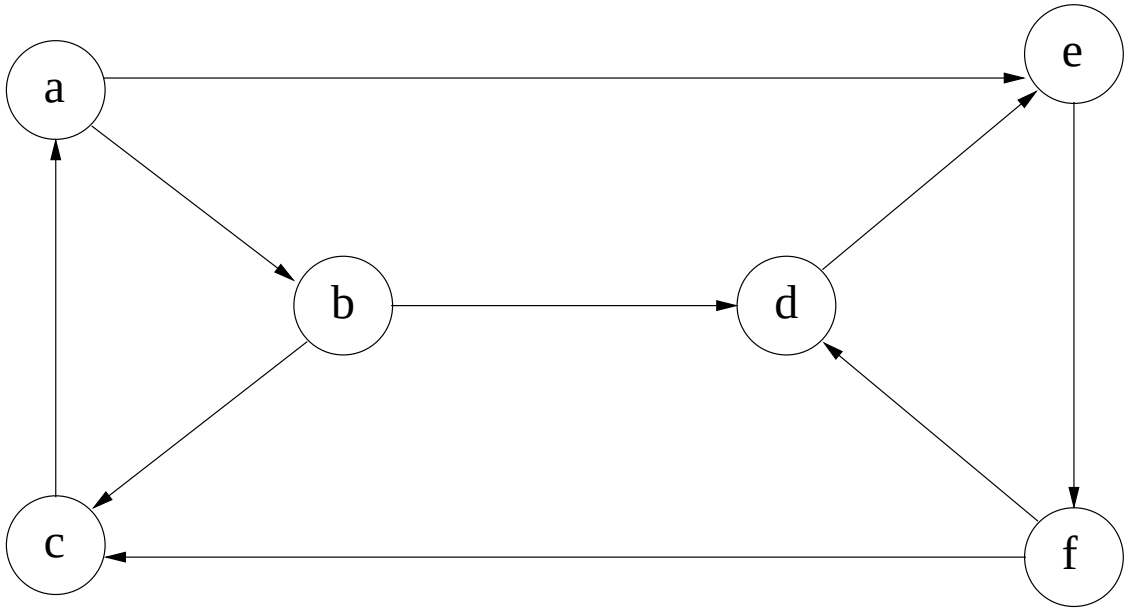


Abbildung 1: Ein Knoten v mit $\text{indeg}(v) = 2$ und $\text{outdeg}(v) = 3$.

Gerichtete Wege, Pfade, Kreise

Analog definiert wie bei Graphen außer dass Kanten nur entlang ihrer Orientierung durchlaufen werden dürfen (Einbahnstraßen!).



Weg: b c a b d e

Pfad: a b d e f

Kreis: b d e f c a

Starke Komponenten

Zwei Knoten u, v eines Digraphen $G = (V, E)$ heißen *stark zusammenhängend*, wenn es in G sowohl einen (gerichteten) Weg von u nach v als auch einen (gerichteten) Weg von v nach u gibt. In Zeichen: $u \leftrightarrow v$.

- Wenn es einen gerichteten Weg von u nach v gibt, dann gibt es auch einen gerichteten Pfad von u nach v (auf dem Weg liegende Kreise einfach rausschneiden!).
- „$\leftrightarrow$“ ist eine Äquivalenzrelation auf V.
- Die resultierenden Knoten-Äquivalenzklassen (bzw. die von ihnen aufgespannten Untergraphen) heißen *starke Komponenten*.
- Ein Digraph mit nur einer Komponente heißt *stark zusammenhängend*.

Beispiel

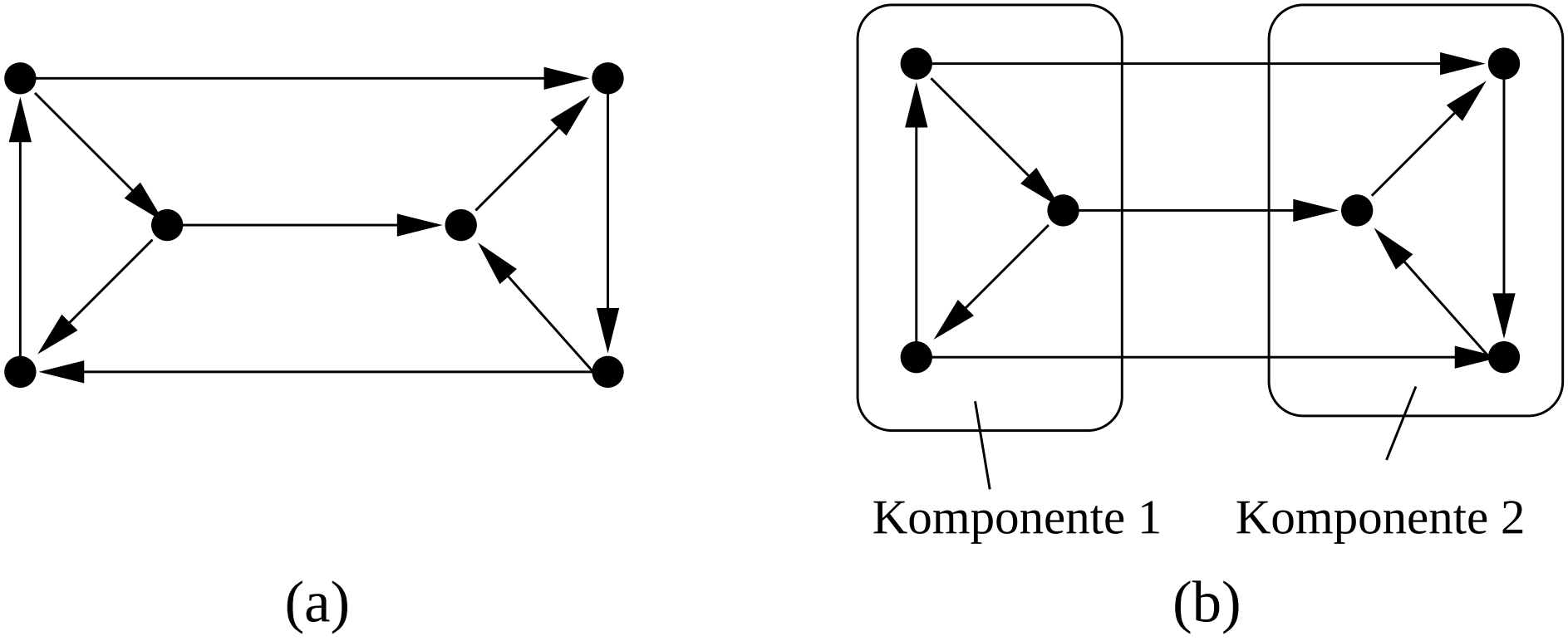


Abbildung 2: (a) ein stark zusammenhängender Digraph (b) ein Digraph und seine starken Komponenten

Transitive Hülle

- Ein von einem Punktpfad verschiedener Pfad heißt *echt*.
- Die *transitive Hülle* $G^+ = (V, E^+)$ von $G = (V, E)$ repräsentiert Pfadverbindungen in G durch Kanten:

$$E^+ := \{(u, v) | \text{ Es gibt in } G \text{ einen echten Pfad von } u \text{ nach } v\}$$

- Die transitive Hülle ist mit dem Algorithmus von Warshall in $O(n^3)$ Schritten berechenbar.

Beachte: In G^+ gibt es i.A. Schleifen, also Kanten der Form (u, u), und zwar genau dann, wenn es in G einen u enthaltenden (und von einem Punktpfad verschiedenen) Kreis gibt.

Algorithmus von Warshall („high level“)

Eingabe: Adjazenzmatrix A von $G = (V, E)$ mit $V = [n]$.

Ausgabe: Adjazenzmatrix A^+ von $G^+ = (V, E^+)$

Methode: Dynamisches Programmieren:

1. Berechne n Matrizen $P_0, P_1, \ldots, P_n$ mit folgender Interpretation:

$$P_k[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{es gibt in } G \text{ einen Pfad (Punktpfade ausgeschlossen)} \\ & \text{von } i \text{ nach } j \text{ mit Zwischenknoten aus } [k] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

2. Gib $A^+ := P_n$ als Adjazenzmatrix von G^+ aus!

Bei $k = 0$ sind also gar keine Zwischenknoten zugelassen und damit nur direkte Verbindungen durch Kanten erlaubt !

Algorithmus von Warshall („low level“)

1. Initialisiere P mit $P := A$ (entspricht der Matrix P_0).

2. Die folgende 3-fach geschachtelte Laufanweisung berechnet P_k (mit Laufindex $k = 1, \ldots, n$):

   for $k := 1$ **to** n **do**
   for $i := 1$ **to** n **do**
   for $j := 1$ **to** n **do**
   $P[i,j] := P[i,j] \vee (P[i,k] \wedge P[k,j])$ (*)
   end-for
   end-for
   end-for;

3. Gib $A^+ := P$ aus.

Algorithmus von Warshall (Korrektheitsnachweis)

Die mit $(*)$ markierte Programmzeile

$$P[i,j] := P[i,j] \vee (P[i,k] \wedge P[k,j])$$

berechnet P_k korrekt aus P_{k-1}, und zwar aus folgendem Grund:

- Es gibt einen Pfad von i nach j mit Zwischenknoten aus $[k]$ **gdw** einer der folgenden beiden Fälle eintritt:
  - Es gibt einen Pfad mit Zwischenknoten aus $[k-1]$ von i nach j.
  - Es gibt einen Pfad mit Zwischenknoten aus $[k-1]$ sowohl von i nach k als auch von k nach j.

Azyklische Digraphen, topologische Nummerierung

- Ein Digraph ohne (gerichtete) Kreise heißt *azyklischer Digraph*, auf Englisch auch „Directed Acyclig Graph“ oder einfach „DAG“ genannt.
- In einem DAG heißt u ein *(echter) Vorgänger* von v bzw. v ein *(echter) Nachfolger* von u, falls ein (echter) Pfad von u nach v existiert.
- Eine bijektive Abbildung $N : V \to [n]$ heißt *topologische Nummerierung* der Knoten des DAG $G = (V, E)$ **gdw** $N(u) < N(v)$ für alle $(u, v) \in E$ gilt. (Echte Vorgänger eines Knoten haben also stets kleinere Nummern als der Knoten selbst.)

Beispiel

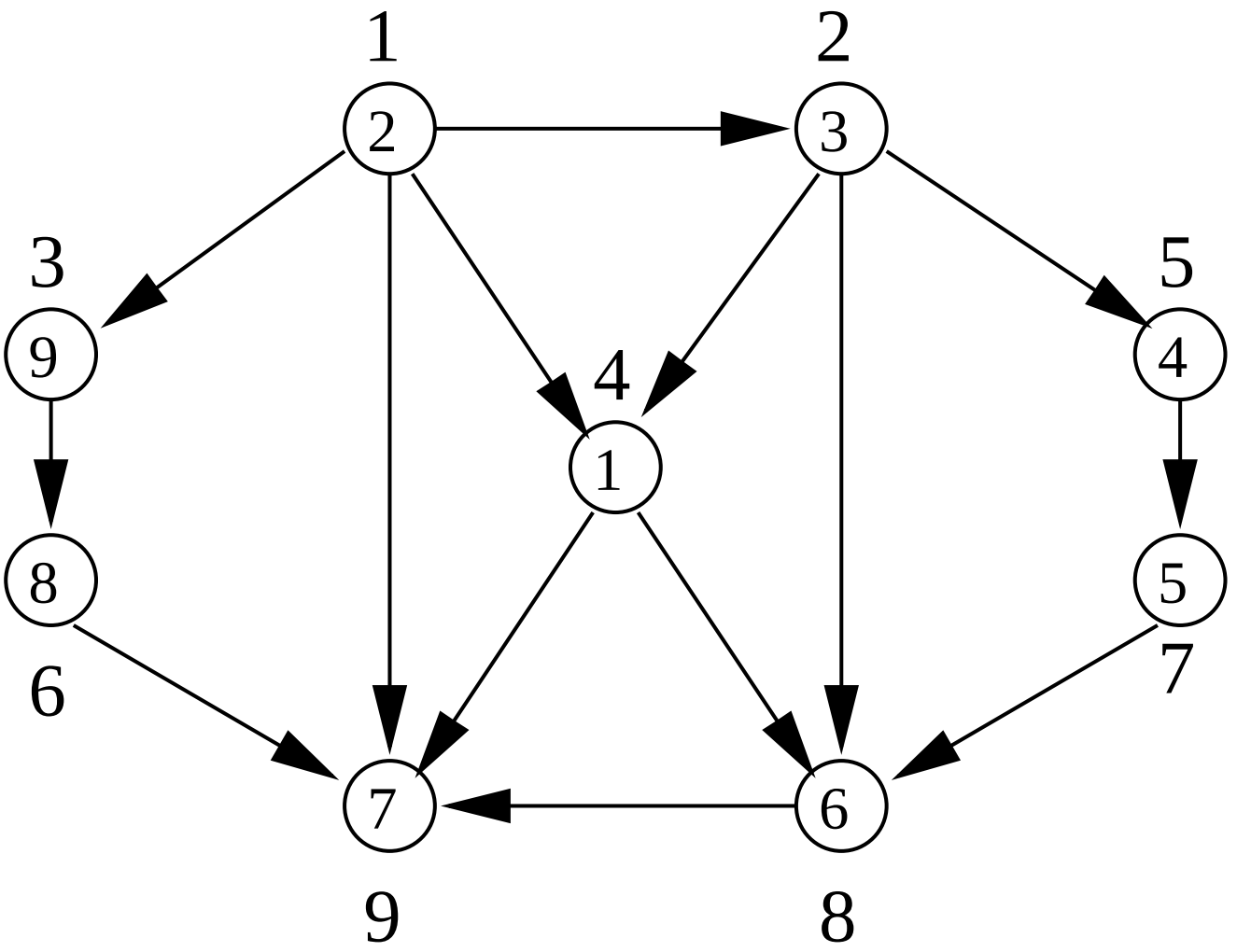
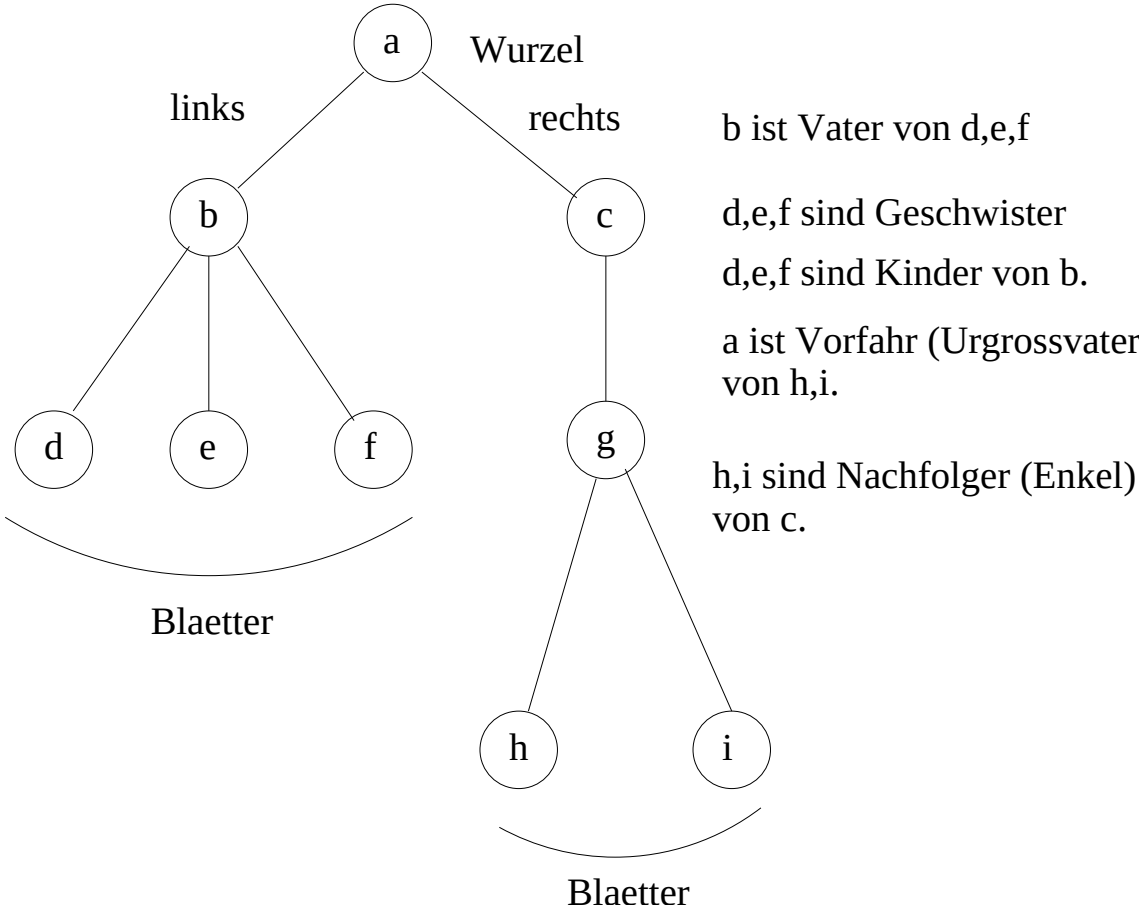


Abbildung 3: Ein DAG und eine topologische Nummerierung seiner Knoten.

Wurzelbäume

Ein Wurzelbaum ist ein Baum $T = (V, E)$, bei dem ein Knoten als *Wurzel* ausgezeichnet ist. Graphische Visualisierung und Terminologie lehnen sich an „Familien-Stammbäume“ an:



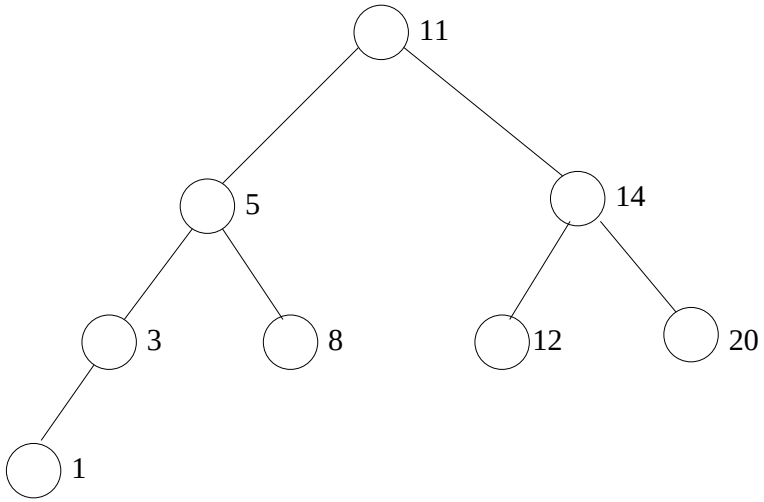
Hierarchische Partitionierungen, Tiefe

Wurzelbäume eignen sich zur Visualisierungen von Hierarchien wie zum Beispiel:

- Verzeichnisse und Unterverzeichnisse auf einem PC
- Untergliederung einer Firma in Abteilungen, Gruppen, Labors.
- Untergliederung einer Fakultät in Fachbereiche, Institute, Lehrstühle.
- usw.

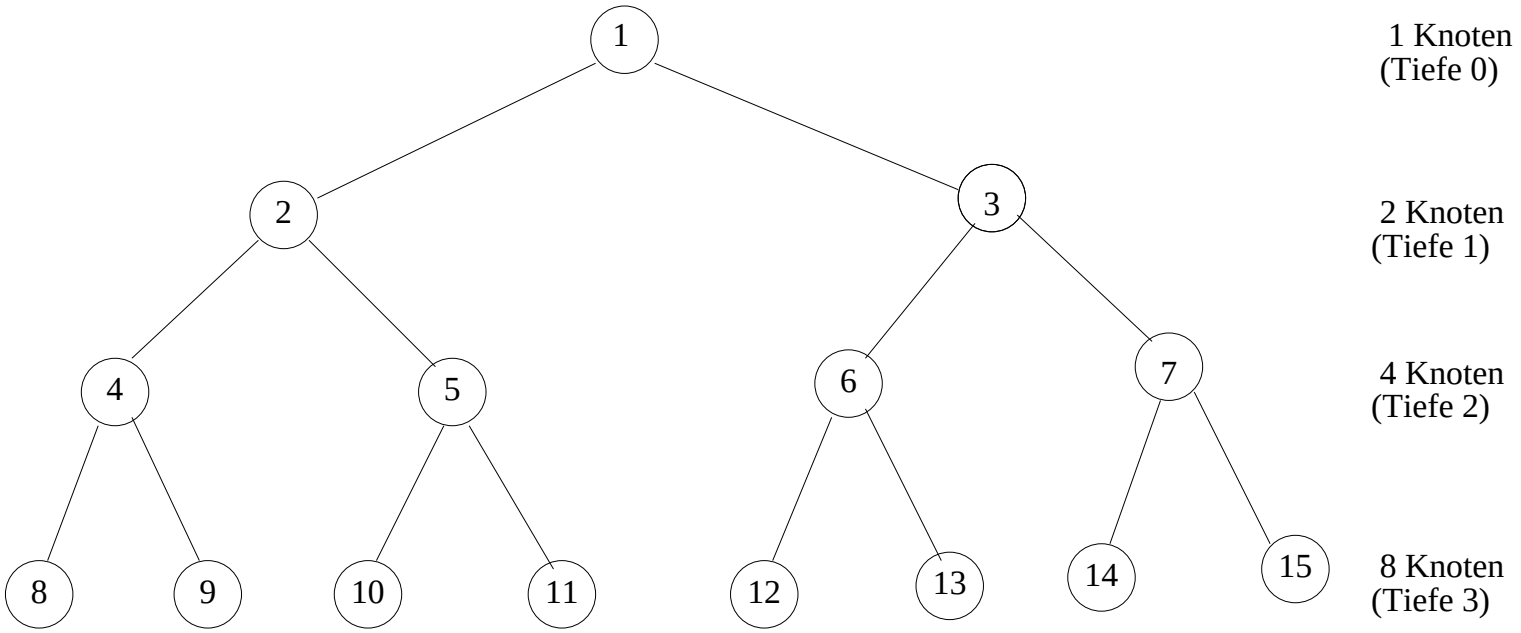
Die **Tiefe** eines Knotens v in einem Baum mit Wurzel r ist seine Entfernung zur Wurzel gemessen in der Anzahl der Kanten auf dem Pfad von v nach r.

Binäre Suchbäume



- Der „Schlüssel“, der an einem Knoten gespeichert ist, ist stets größer als alle Schlüssel im linken Unterbaum und stets kleiner als alle Schlüssel im rechten Unterbaum.
- Dieses Organisationsprinzip eröffnet die Möglichkeit der (überaus effizienten) „Binärsuche“.

Vollständige Binärbäume



- Knoten i hat die Kinder $2i$ und $2i+1$ (daher implizite Darstellung in einem Array $T[1:n]$ möglich).
- Auf dem Level der „Tiefe“ d gibt es 2^d Knoten.
- Datenstruktur findet Anwendung beim Sortierverfahren „Heapsort“ (mehr dazu in der Vorlesung „Datenstrukturen“).