

Chernov- und Hoeffding-Schranken

Hans U. Simon (RUB)

Email: simon@lmi.rub.de

Homepage: <http://www.ruhr-uni-bochum.de/lmi>

Chernov-Schranken

Voraussetzung: X Bernoulli-verteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit p (mit Erwartungswert p und Varianz $p(1 - p)$).

$X_1, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsvariable mit der gleichen Verteilung wie X .

$\bar{X}_n := \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ empirischer Mittelwert.

Dann gelten für alle $0 \leq \delta \leq p(1 - p)$ die folgenden “additiven” Chernov-Schranken:

$$\Pr[\bar{X}_n \geq p + \delta] \leq e^{\frac{-\delta^2 n}{2p(1-p)}} \leq e^{-2\delta^2 n}$$

$$\Pr[\bar{X}_n \leq p - \delta] \leq e^{\frac{-\delta^2 n}{2p(1-p)}} \leq e^{-2\delta^2 n}$$

$$\Pr[|\bar{X}_n - p| \geq \delta] \leq 2e^{\frac{-\delta^2 n}{2p(1-p)}} \leq 2e^{-2\delta^2 n}$$

Verallgemeinerung: Gilt auch mit $p := (p_1 + \dots + p_n)/n$, falls $X_1, \dots, X_n$ unabhängige bernoulli-verteilte Zufallsvariable mit Erfolgswahrscheinlichkeiten $p_1, \dots, p_n$ sind.

Chernov-Schranken (fortgesetzt)

Weiterhin gelten für alle $0 \leq \delta \leq 1$ die sogenannten “multiplikativen” Chernov-Schranken:

$$\Pr[\bar{X}_n \geq (1 + \delta)p] \leq e^{-np\delta^2/3}$$

$$\Pr[\bar{X}_n \leq (1 - \delta)p] \leq e^{-np\delta^2/2}$$

Hoeffding-Schranken

Voraussetzung: X Zufallsvariable X mit Werten in einem Intervall $[a, b]$ der reellen Zahlen und mit dem Erwartungswert μ .

$X_1, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsvariable mit der gleichen Verteilung wie X .

$\bar{X}_n := \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ der resultierende empirische Mittelwert.

Dann gelten für alle $\delta \geq 0$ die folgenden Schranken:

$$\Pr[\bar{X}_n \geq \mu + \delta] \leq e^{\frac{-2\delta^2 n}{(b-a)^2}}$$

$$\Pr[\bar{X}_n \leq \mu - \delta] \leq e^{\frac{-2\delta^2 n}{(b-a)^2}}$$

$$\Pr[|\bar{X}_n - \mu| \geq \delta] \leq 2e^{\frac{-2\delta^2 n}{(b-a)^2}}$$

Verallgemeinerung: Gilt auch mit $\mu := (\mu_1 + \dots + \mu_n)/n$, falls $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsvariable mit Werten in $[a, b]$ und den Erwartungswerten $\mu_1, \dots, \mu_n$ sind.