

1 Das Lemma von Burnside und seine Anwendungen

Mit dem Lemma von Burnside lassen sich Zählprobleme lösen, bei denen Symmetrien eine Rolle spielen. Betrachten wir als einführendes Beispiel die Anzahl der 2-Färbungen der Seiten eines Würfels, sagen wir mit den Farben „Rot“ und „Blau“. Wenn der Würfel fixiert ist, dann lassen sich die zwei Wahlmöglichkeiten pro Seite frei kombinieren und wir erhalten $2^6 = 64$ mögliche Färbungen. Wir wollen aber den Würfel als im Raum frei beweglich ansehen und Färbungen miteinander identifizieren, die sich durch Bewegungen im Raum ineinander überführen lassen. Zum Beispiel gibt es dann lediglich *eine* Färbung, die zwei gegenüber liegende Seiten „Rot“ und die restlichen Seiten „Blau“ färbt. Mit einer elementaren Überlegung, die wir in der Vorlesung durchführen, ergeben sich bei dieser Zählweise genau 10 mögliche (paarweise nicht ineinander überführbare) Färbungen. Im Weiteren gehen wir vor wie folgt:

- Im Abschnitt 1.1 beschäftigen wir uns mit dem Lemma von Burnside.
- Im Abschnitt 1.2 kommen wir auf das Zählproblem mit den 2-Färbungen der Seiten eines im Raum frei beweglichen Würfels zurück und lösen es mit Hilfe dieses Lemmas.

1.1 Das Lemma von Burnside

Es sei G eine Untergruppe der Gruppe aller Permutationen auf einer Grundmenge X . Die Elemente von G bezeichnen wir im Folgenden auch als G -Permutationen. Die G -Permutationen mit $x \in X$ als Fixpunkt bilden die Untergruppe

$$G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\} \leq G .$$

Es sei daran erinnert, dass die Linksnebenklassen von G_x in G eine Partition von G bilden und dass die Anzahl der Linksnebenklassen als $\text{ind}_G(G_x)$ notiert wird. Die Menge

$$O_x = \{g(x) \mid g \in G\}$$

aller Elemente die sich aus $x \in X$ durch Anwendung einer G -Permutation erhalten lassen, heißt der *Orbit* von x . Zwischen Orbits und den Linksnebenklassen von G_x besteht der folgende Zusammenhang:

Lemma 1.1 *Für alle $g, h \in G$ gilt:*

$$g \circ G_x = h \circ G_x \Leftrightarrow g(x) = h(x)$$

Beweis Aus $g \circ G_x = h \circ G_x$ ergeben sich der Reihe nach die folgenden Implikationen:

$$g \circ G_x = h \circ G_x \implies h \in g \circ G_x \implies \exists f \in G_x : h = g \circ f \implies \exists f \in G_x : h(x) = g(f(x)) = g(x)$$

Umgekehrt ergeben sich aus $g(x) = h(x)$ die Implikationen

$$g(x) = h(x) \implies g^{-1} \circ h \in G_x \implies h \in g \circ G_x \implies g \circ G_x = h \circ G_x .$$

In der letzten Implikation haben wir ausgenutzt, dass zwei Linksnebenklassen entweder disjunkt oder identisch sind. **qed.**

Folgerung 1.2 Für alle $x \in X$ gilt

$$|O_x| = \text{ind}_G(G_x) = \frac{|G|}{|G_x|} . \quad (1)$$

Hierbei ergibt sich die erste Gleichung unmittelbar aus Lemma 1.1 (da dieses impliziert, dass jede Linksnebenklasse von G_x genau *ein* Element zum Orbit O_x beiträgt) und die zweite Gleichung ergibt sich aus dem uns bereits bekannten Satz von Lagrange.

Da G eine Gruppe ist, folgt leicht, dass die Orbits eine Partition der Grundmenge X darstellen. Die Anzahl der Orbits wird notiert als $|X/G|$. Zu $g \in G$ bezeichne

$$\text{fix}(g) = \{x \in X \mid g(x) = x\}$$

die Menge der *Fixpunkte* von g .

Es sei $A \in \{0, 1\}^{X \times G}$ die 0, 1-Matrix, deren Einsen das Ereignis $g(x) = x$ anzeigen. Dann hat die Zeile $A[x, \cdot]$ genau $|G_x|$ 1-Einträge und die Spalte $A[\cdot, g]$ hat genau $|\text{fix}(g)|$ 1-Einträge. Mit der Methode des doppelten Abzählens ergibt sich

$$\sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{g \in G} |\text{fix}(g)| . \quad (2)$$

Das folgende Lemma von Burnside reduziert die Berechnung von $|X/G|$ auf Fixpunktberechnungen.

Lemma 1.3 Die Anzahl der Orbits stimmt überein mit der mittleren Anzahl von Fixpunkten. *Formal:*

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |\text{fix}(g)| \quad (3)$$

Beweis Es sei $x_1, \dots, x_{|X/G|}$ ein vollständiges Repräsentantensystem der Orbits. Die Gleichung (3) ergibt sich aus folgender Rechnung:

$$\begin{aligned} |X/G| &= \sum_{i=1}^{|X/G|} 1 = \sum_{i=1}^{|X/G|} \sum_{y \in O_{x_i}} \frac{1}{|O_{x_i}|} = \sum_{i=1}^{|X/G|} \sum_{y \in O_{x_i}} \frac{1}{|O_y|} \\ &= \sum_{x \in X} \frac{1}{|O_x|} \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{x \in X} |G_x| \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |\text{fix}(g)| \end{aligned}$$

qed.

1.2 Anwendung des Lemmas von Burnside

Eine elementare Überlegung in der Vorlesung hatte ergeben, dass es 10 2-Färbungen der Seiten eines (im Raum beweglichen) Würfels gibt. In diesem Abschnitt skizzieren wir, wie sich dieses Resultat als Anwendung des Lemmas von Burnside erhalten lässt. Die 6 Seiten des Würfels kürzen wir mit $L = \text{Links}$, $R = \text{Rechts}$, $V = \text{Vorn}$, $H = \text{Hinten}$, $U = \text{Unten}$ und $O = \text{Oben}$ ab. Dann bezeichnet

$$X' = \{L, R, V, H, U, O\}$$

die Menge dieser Seiten. Wir betrachten zunächst die Gruppe G' der Permutationen von X' , die durch Bewegungen im Raum realisierbar sind. Die Permutationen mit L als Fixpunkt bilden eine Untergruppe, sagen wir G'_L . Sie entsprechen den in Abbildung 1 angedeuteten Drehungen um 0, 90, 180 oder 270 Grad um eine LR-Achse. Als Permutationen (jeweils

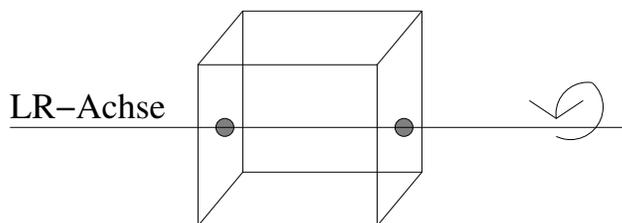


Abbildung 1: Drehungen mit den Fixpunkten L, R

angegeben als Liste von Zyklen) lesen sich diese vier Drehungen wie folgt:

$$\begin{aligned} \text{Drehung um 0 Grad} &= L, R, V, H, U, O \\ \text{Drehung um 90 Grad} &= L, R, VUHO \\ \text{Drehung um 180 Grad} &= L, R, VH, UO \\ \text{Drehung um 270 Grad} &= L, R, VOHU \end{aligned}$$

Beachte, dass Zyklen der Länge 1 Fixpunkte der Permutation repräsentieren. Zum Beispiel repräsentieren die 6 Zyklen der Länge 1 (= 6 Fixpunkte) bei der Drehung um 0 Grad die identische Abbildung. Bei der Drehung um 90 Grad haben wir L, R als Fixpunkte und es gilt: V wird auf U , U wird auf H , H wird auf O und O wird auf V abgebildet (usw.).

Wir wissen aus der Gruppentheorie, dass sich G' als Vereinigung der Rechtsnebenklassen von $G'_L \leq G'$ darstellen lässt.

Behauptung: Es seien $\sigma_1, \sigma_2 \in G'$. Dann gilt $\sigma_1^{-1}(L) = \sigma_2^{-1}(L)$ genau dann, wenn σ_1 und σ_2 zur selben Rechtsnebenklasse von G'_L gehören. (Der Beweis ist völlig analog zu dem Beweis von Lemma 1.1.)

Beachte, dass $\sigma^{-1}(L)$ die Seite angibt, die nach Anwendung der Permutation σ *links* platziert ist (also gewissermaßen die Rolle von L einnimmt). Da jede der 6 Seiten die Rolle von L (=

linke Seite) einnehmen kann, gibt es insgesamt $6 \cdot 4 = 24$ im Raum realisierbare Permutationen auf X' . Vier dieser Permutationen haben wir in Form der Untergruppe G'_L schon kennen gelernt. Wir erhalten die restlichen 20 Permutationen, indem wir den vier Permutationen aus G'_L jeweils 5 weitere Permutationen voran stellen, die den Würfel so rotieren, dass eine der verbleibenden 5 Seiten die Rolle von L einnimmt. Wenn wir zum Beispiel

$$U, O, HLVR \quad (\text{Drehung um } 90 \text{ Grad um eine } UO\text{-Achse})$$

voran stellen, dann nimmt H (die hintere Seite) die Rolle von L (der linken Seite) ein. Die verbleibenden 20 Permutationen ergeben sich aus folgender Verknüpfungstabelle:

\circ	$U, O, HLVR$	U, O, HV, RL	$U, O, VLHR$	$V, H, OLUR$	$V, H, ULOR$
L, R, V, H, U, O	$U, O, HLVR$	U, O, HV, RL	$U, O, VLHR$	$V, H, OLUR$	$V, H, ULOR$
$L, R, VUHO$	VRO, HLU	VO, HU, RL	VLO, HRU	OLH, URV	ULV, ORH
L, R, VH, UO	VR, OU, HL	V, H, RL, UO	VL, HR, UO	OL, UR, VH	UL, OR, VH
$L, R, VOHU$	VRU, HLO	VU, HO, RL	VLU, HRO	OLV, URH	ULH, ORV

Die Zeilen dieser Tabelle korrespondieren zu den 4 Permutationen der Untergruppe G'_L . Die Spalten entsprechen den voran geschalteten Permutationen (realisierbar als Drehungen), die jeweils eine andere Seite die Rolle von L spielen lassen. In Spalte 1 (2,3,4,5) ist H (R, V, O, U) in der Rolle von L . Jede Spalte liefert eine Rechtsnebenklasse von G'_L . Die Einträge der Tabelle sind durch stures Nachrechnen leicht zu verifizieren.

Das Lemma von Burnside kann *nicht* unmittelbar auf X' und G' angewendet werden. Vielmehr müssen wir übergehen zu X und G , die definiert sind wie folgt:

- X ist die Menge der Abbildungen der Form $f : X' \rightarrow \{0, 1\}$ (2-Färbungen der Seiten eines „fixierten“ Würfels). Eine solche Färbung ist als 6-Tupel

$$f = [f(L), f(R), f(V), f(H), f(U), f(O)] \in \{0, 1\}^6$$

beschreibbar.

- Jede Permutation σ auf X' induziert die folgende Permutation σ auf X :

$$\sigma(f) := [f(\sigma^{-1}(L)), f(\sigma^{-1}(R)), f(\sigma^{-1}(V)), f(\sigma^{-1}(H)), f(\sigma^{-1}(U)), f(\sigma^{-1}(O))]$$

Anschaulich: Liste auf, welche Farben in den Positionen L, R, V, H, U, O zu liegen kommen, wenn zuvor die Seiten des Würfels gemäß σ permutiert wurden. G ist die Gruppe der 24 Permutationen auf X , die von den oben beschriebenen Permutationen auf X' induziert werden.

Der Orbit einer Färbung f gibt an, welche Färbungen mit f identifiziert werden (weil sie durch eine Bewegung des Würfels im Raum aus f hervor gehen). Die Zahl $|X/G|$ der Orbits ist daher die gesuchte Anzahl von 2-Färbungen. Das Lemma von Burnside besagt, dass diese Zahl überein stimmt mit der mittleren Anzahl der Fixpunkte der G -Permutationen. Wir machen die

Zentrale Beobachtung: Eine Permutation σ auf X' mit k Zyklen induziert eine Permutation σ auf X mit 2^k Fixpunkten: um einen Fixpunkt zu erhalten, müssen wir nämlich für die Elemente jedes Zyklus eine einheitliche Farbe vorsehen, haben aber bei jedem Zykel die freie Wahl zwischen 2 Farben!

Zum Beispiel hat die von der identischen Abbildung induzierte Permutation $2^6 = 64$ Fixpunkte (da 6 Zyklen der Länge 1 vorliegen). Die Permutation $L, R, VUHO$ (mit drei Zyklen) hat $2^3 = 8$ Fixpunkte (usw.) Damit ergibt sich folgende Rechnung:

- $G'_L \leq G'$ induziert die entsprechende Untergruppe $G_L \leq G$ mit $2^6 + 2^3 + 2^4 + 2^3 = 96$ Fixpunkten.
- Die 2. Spalte obiger Verknüpfungstabelle induziert Permutationen auf X mit $2^4 + 2^3 + 2^4 + 2^3 = 48$ Fixpunkten.
- Alle weiteren Spalten der Verknüpfungstabelle, 4 an der Zahl, induzieren jeweils Permutationen auf X mit $2^3 + 2^2 + 2^3 + 2^2 = 24$ Fixpunkten.

Die mittlere Anzahl der Fixpunkte der Permutationen aus G ist daher identisch zu

$$\frac{1}{24} \cdot (96 + 48 + 4 \cdot 24) = \frac{1}{24} \cdot 240 = 10 .$$

Nach dem Lemma von Burnside gibt es daher 10 2-Färbungen der Seiten eines (im Raum beweglichen) Würfels.

Es stellt sich die Frage, ob die elementare Überlegung (mit dem selben Ergebnis von 10 2-Färbungen) nicht einfacher war als der Umweg über das Lemma von Burnside. Der Vorteil des Lemma von Burnside ist jedoch, dass es sehr flexible Anpassungen an leicht veränderte Fragestellungen erlaubt. Wenn wir zum Beispiel allgemeiner die Anzahl der m -Färbungen der Seiten eines (im Raum beweglichen) Würfels ermitteln wollen, so brauchen wir in der obigen Rechnung lediglich die Zweierpotenzen durch Potenzen zur Basis m zu ersetzen.