1 Grundbegriffe zur Asymptotik

Es hat etwas zutiefst Befriedigendes, auf Fragen exakte Antworten zu geben oder Probleme präzise zu lösen. Es gibt jedoch auch Situationen, in denen Approximationen gefragt sind. Wenn wir zum Beispiel für eine rekursive Gleichung oder eine Summe keine Lösung in einer geschlossenen Form finden, kann es dennoch gelingen, die Lösung durch eine geschlossene Form anzunähern. Und selbst wenn eine Lösung in geschlossener Form existiert, möchten wir sie vielleicht qualitativ mit einer anderen geschlossenen Form vergleichen. Dies wollen wir im Folgenden an einem Beispiel illustrieren, wobei wir nebenbei ein paar Grundbegriffe auf informeller Ebene einführen.
Betrachten wir zum Beispiel die Folge

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{k}, \tag{1}$$

von der bekannt ist, dass sie nicht in eine geschlossene Form gebracht werden kann. Es ist aber nett zu wissen, daß (ohne Beweis)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\binom{3n}{n}} = 2. \tag{2}$$

In Worten: die Summe S_n ist asymptotisch gleich $2\binom{3n}{n}$. In Zeichen: $S_n \sim 2\binom{3n}{n}$.
Das Wort *Asymptotik* stammt aus dem Griechischen. Asymptoten waren in diesem Zusammenhang geometrische Kurven, die sich zwar an eine Gerade anschmiegen, aber nicht mit ihr zusammenfallen (wie zum Beispiel die Hyperbeläste der Funktion $1/x$, die sich beim Übergang zu Null an die y-Achse und beim Übergang zu Unendlich an die x-Achse anschmiegen, ohne aber mit diesen Achsen zusammenzufallen). Abbildung 1 illustriert dies am Beispiel der Funktion $f(x) = 1/x$. Wir betreiben im folgenden Asymptotik bezüglich der Annäherung einer Variable n aus $\mathbb{N}$ ans Unendliche und diskutieren dabei Funktionen der Form $g : \mathbb{N} \to \Re_0^+$ (also Folgen mit Werten im Bereich der nichtnegativen reellen Zahlen). Alle in diesem Kapitel diskutierten Konzepte lassen sich aber leicht auf Funktionen mit reellem Definitions- und Zielbereich und auf beliebige Grenzübergänge verallgemeinern.
Wir werden in Abschnitt 1.2 die sogenannte O-Notation kennenlernen. Im Augenblick können Sie sich unter $O(g)$ eine Folge f vorstellen, die für eine Konstante k und für hinreichend große n nach oben durch $k \cdot g(n)$ abgeschätzt werden kann. Wir fahren mit unserer beispielhaften Betrachtung der Folge S_n fort. Die asymptotische Bestimmung von S_n gemäß (2) kann wie folgt verfeinert werden (ohne Beweis):

$$\begin{aligned} S_n &= \binom{3n}{n} \cdot \left(2 - \frac{4}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) && (3) \\ &= \sqrt{\frac{3}{\pi n}} \cdot (6.75)^n \cdot \left(1 - \frac{151}{72n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right). && (4) \end{aligned}$$

Diese Gleichung bestimmt S_n bis auf einen relativen Fehler der Ordnung $1/n^2$.

Eine typische Anwendung der Asymptotik ist der Vergleich zweier Folgen. Aus unserer verfeinerten Abschätzung von S_n ergibt sich zum Beispiel, dass S_n ein asymptotisch langsameres Wachstum hat als 6.75^n, aber ein schnelleres als zum Beispiel 6.74^n. Ein Lernziel dieses Kapitels wird sein, Aussagen dieser Art mühelos verstehen und evtl. selber herleiten zu können.

1.1 Kampf der Giganten

Wir holen als erstes die formale Definition für asymptotische Gleichheit nach:

$$f \sim g :\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1 \tag{5}$$

Dies ist offensichtlich eine Äquivalenzrelation.
Als nächstes wollen wir den Begriff des asymptotisch langsameren oder schnelleren Wachstums formalisieren. Wir benutzen eine 1871 von Paul du Bois-Reymond erfundene Notation und definieren:

$$f \prec g :\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \tag{6}$$

In Worten: f wächst asymptotisch langsamer als g. Diese Relation ist transitiv. Wir schreiben auch $g \succ f$ für $f \prec g$. In Worten: g wächst asymptotisch schneller als f.
Zum Beispiel gilt $n \prec n^2$ und

$$n^\alpha \prec n^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$$

für beliebige reelle Konstanten α, β. Die Relation $\prec$ kann benutzt werden, um eine breite Palette von Funktionen in eine "asymptotische Hackordnung" zu bringen, wie zum Beispiel

$$1 \prec \log\log n \prec \log n \prec n^\epsilon \prec n \prec n^c \prec n^{\log n} \prec c^n \prec n^n \prec c^{c^n}. \tag{7}$$

Hierbei sind ϵ, c beliebige Konstanten mit $0 < \epsilon < 1 < c$. Alle hier aufgelisteten Funktionen mit Ausnahme von 1 streben gegen Unendlich. Bei unserer Hackordnung geht es also nicht um die Frage, ob eine Folge gegen Unendlich strebt, sondern mit welcher Geschwindigkeit sie es tut.
Bei asymptotischer Analyse ist folgende innerliche Grundhaltung hilfreich:

DENKE IM GROSSEN!

Zum Beispiel besagt unsere Hackordnung, dass $\log_{10} n \prec n^{0.0001}$. Dies mag uns falsch erscheinen, wenn unser Horizont sich nur auf niedliche Zahlenwinzlinge wie zum Beispiel $n = 10^{100}$ erstreckt. In diesem Fall gilt $\log_{10} n = 100 > 10^{0.01} = n^{0.0001}$ und die Funktion $n^{0.0001}$ sieht gegenüber $\log_{10} n$ noch ziemlich alt aus. Setzen wir hingegen $n = 10^{10^{100}}$, so verblaßt der Wert $\log_{10} n = 10^{100}$ im Vergleich zu $n^{0.0001} = 10^{10^{96}}$. Erst jetzt zeigen sich also die Steherqualitäten der Funktion $n^{0.0001}$ im Vegleich zu $\log_{10} n$.
Wie ordnen sich weitere Funktionen in die Hackordnung (7) ein? Betrachten wir zum Beispiel die Anzahl $\pi(n)$ der Primzahlen zwischen 1 und n. Aus der Zahlentheorie ist bekannt, dass $\pi(n) \sim n/\ln n$. Somit gilt für alle $\epsilon > 0$:

$$n^{1-\epsilon} \prec \pi(n) \prec n.$$

Wie stehts mit der Funktion $2^{\sqrt{\log n}}$? Aus der Definition von $\prec$ ergibt sich durch Logarithmieren das Kriterium

$$e^f \prec e^g \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(f(n) - g(n)) = -\infty.$$

Hieraus läßt sich für alle $\epsilon > 0$ leicht ableiten:

$$\log n = 2^{\log\log n} \prec 2^{\sqrt{\log n}} \prec 2^{\epsilon \log n} = n^\epsilon.$$

1.2 Die Wachstumsordnung von Funktionen

Die sogenannte O-Notation wurde von Paul Bachmann im Jahre 1894 eingeführt und in den folgenden Jahren von Edmund Landau populär gemacht. Die Notation ist geeignet, die asymptotische Wachstumsordnung von Funktionen zu erfassen. Ziel dieses Abschnittes ist es, die O-Notation (sowie dazu verwandte Notationen) mathematisch sauber zu definieren und ihren Gebrauch einzuüben. Im späteren Verlauf der Vorlesung werden wir die O-Notation hauptsächlich verwenden, um die Laufzeit von Algorithmen asymptotisch abzuschätzen.
Mathematisch gesehen ist $O(g)$ die folgende Klasse von Funktionen:

$$O(g) = \{f \mid \exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists c \in \Re^+, \forall n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n). \tag{8}$$

Kurioserweise wird die Schreibweise

$$f = O(g) \tag{9}$$

anstelle von

$$f \in O(g)$$

verwendet.
Gleichung (9) lässt sich äquivalent ausdrücken wie folgt:

$$f = O(g) \Leftrightarrow \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty \tag{10}$$

Es gilt also $f = O(g)$ genau dann, wenn die Folge $f(n)/g(n)$ keine gegen Unendlich strebende Teilfolge besitzt.
Wenn wir voraussetzen, dass die Folge $f(n)/g(n)$ einen (evtl. unendlichen) Grenzwert besitzt, erhalten wir das vereinfachte Kriterium

$$f = O(g) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty, \tag{11}$$

d.h., $f = O(g)$ gilt genau dann, wenn der Grenzwert der Folge $f(n)/g(n)$ endlich ist.
Wir betrachten einige Beispiele:

$$\begin{aligned} 1000n &= O(n) \\ n^2 + 500n &= O(n^2) \\ \log n &= O(\ln n) \end{aligned}$$

Diese Beispiele bergen die folgenden allgemeinen (etwas salopp formulierten) Lehrsätze:

- Die O-Notation verschluckt in einem Produkt konstante Faktoren.
- Die O-Notation verschluckt in einer Summe untergeordnete Terme (also alle Summanden außer demjenigen mit dem größten asymptotischen Wachstum).
- Die O-Notation unterscheidet nicht zwischen verschiedenen Basen des Logarithmus.

Man kann also intuitiv die Gleichung $f = O(g)$ auch so lesen, dass die rechte Seite eine "Vergröberung" der linken Seite darstellt, bei der von allerlei Details (konstante Faktoren, untergeordnete Terme, etc.) abtrahiert wird, da man sich ausschließlich für die sogenannte "Wachstumsordnung" interessiert.
Hier sind zwei weitere Beispiele:

$$\begin{array}{rclcl} \sum_{i=1}^{n} i & = & \frac{1}{2}n(n+1) & = & O(n^2) \\ \sum_{i=1}^{n} i^2 & = & \frac{1}{3}n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1) & = & O(n^3) \end{array}$$

Bei diesen Beispielen gibt es also präzise geschlossene Ausdrücke für die Summen. Die O-Notation erlaubt die Vereinfachung dieser Ausdrücke nach dem nunmehr schon bekannten Schema.
Bisher haben wir den Eindruck vermittelt, dass die O-Notation erstens zur Vereinfachung von Termen und zweitens zur präzisen Festlegung der Wachstumsordnung benutzt wird. Es sei kurz erwähnt, dass die Definition von $O(g)$ dies keineswegs erzwingt. Auch Gleichungen wie $n = O(20500n + 333\log n)$ oder $n = O(n^{20000})$ sind formal korrekt (auch wenn sie keine interessanten Neuigkeiten verkünden).

Eine bedeutende Anwendung der O-Notation besteht darin, asymptotische Approximationen zu verfeinern. Ein Beispiel dafür kennen Sie bereits aus der einleitenden Erörterung der Folge S_n und ihrer Approximation gemäß den Gleichungen (2) und (3).
Um verfeinerte Approximationen zu notieren, ist es bequem, wenn Terme wie $O(g)$ auch auf der linken Seite und auch innerhalb von arithmetischen Ausdrücken auftauchen dürfen. Formal definieren wir für eine Funktion f, zwei Funktionsmengen F und G und eine arithmetische Verknüpfung $\circ$:

$$f \circ G = \{f \circ g \mid g \in G\} \tag{12}$$

$$F \circ G = \{f \circ g \mid f \in F, g \in G\} \tag{13}$$

Zum Beispiel ist dann $f + O(h) = \{f + g \mid g = O(h)\}$. Gleichung (3) machte bereits von dieser Notation Gebrauch.
Wenn die O-Notation auf der linken Seite einer Gleichung auftritt, muss das Gleichheitszeichen als Mengeninklusion interpretiert werden. Zum Beispiel bedeutet $10n^3 + O(n^2) = O(n^3)$ eigentlich $10n^3 + O(n^2) \subseteq O(n^3)$. Ähnlich wie früher "$=$" in der Bedeutung von "$\in$" benutzt wurde, wird also hier "$=$" in der Bedeutung von "$\subseteq$" benutzt. *Graham, Knuth and Patashnik* geben in ihrem Buch über *Concrete Mathematics* drei Gründe für diese schlampige Schreibweise an:

Grund 1: Tradition Die Zahlentheoretiker haben vor mehr als 100 Jahren diese Notation eingeführt, und sie hat sich bis heute in der Mathematik gut etabliert. Wir können nicht darauf spekulieren, dass die "mathematische Gemeinde" ihre Gewohnheiten diesbezüglich ändern wird.

Grund 2: Tradition Informatiker und Programmierer sind an Schlampigkeiten dieser Art gewohnt, wenn sie zum Beisiel Wertzuweisungen an Variable in der Form $n = n + 1$ notieren. Auf eine Schludrigkeit mehr oder weniger kommt es dann auch nicht mehr an.

Grund 3: Tradition Wir sind gewohnt sprachlich das Gleichheitszeichen mit "ist" auszudrücken. Wir sagen etwa "f ist von der Wachstumsordnung g" oder "f ist gleich O von g". In der Sprache finden wir rechts neben "ist" oft eine Vergröberung der linken Seite (aber nicht umgekehrt). Wir sagen zum Beispiel "ein Hund ist ein Säugetier" (nicht aber "ein Säugetier ist ein Hund"). Auch sprachlich entspricht also "ist" oft der Relation des Enthaltenseins.

Akzeptieren wir also diese Eigenart und kehren zum Thema der verfeinerten Approximationen zurück. Eine der berümtesten Approximationen ist die Stirling-Approximation von

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k. \tag{14}$$

Ihre einfache Version lautet

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n. \tag{15}$$

Die verfeinerte Version mit einem relativen Fehler der Ordnung $O(1/n^4)$ liest sich wie folgt:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{5140n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) \tag{16}$$

Die harmonische Zahlenfolge ist gegeben durch

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}. \tag{17}$$

Die einfache Approximation

$$H_n \sim \ln n \tag{18}$$

wird verfeinert durch

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} + O\left(\frac{1}{n^6}\right), \tag{19}$$

wobei

$$\gamma = 0.5772156649\ldots \tag{20}$$

die sogennnte Euler'sche Konstante bezeichnet. Wie bereits erwähnt haben wir für die Anzahl der Primzahlen zwischen 1 und n die asymptotische Gleichung

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}. \tag{21}$$

Eine genauere Approximation ist gegeben durch

$$\pi(n) = \frac{n}{\ln n} + \frac{n}{(\ln n)^2} + \frac{2n}{(\ln n)^3} + \frac{6n}{(\ln n)^4} + O\left(\frac{n}{(\log n)^5}\right). \tag{22}$$

Durch algebraische Manipulation lassen sich die asymptotischen Approximationen von $\pi(n)$ in asymptotische Approximationen für die n-te Primzahl P_n umrechnen. Die einfache Version lautet

$$P_n \sim n \ln n \tag{23}$$

und die verfeinerte

$$P_n = n \ln n + n \ln \ln n - n + n\frac{\ln \ln n}{\ln n} + O\left(\frac{n}{\ln n}\right) \tag{24}$$

mit einem relativen Fehler von $O\left(1/(\ln n)^2\right)$. Diese Approximation liefert zum Beispiel für $n = 10^6$ (also die 1-Millionste Primzahl) die Schätzung $\hat{P}_n = 15631363.8$, wobei der genaue Wert dieser Primzahl 15485863 ist.
Weitere Beispiele für Approximationen von Funktionen lassen sich durch die Taylorreihen (Potenzreihenentwicklungen von Funktionen) konstruieren. Dies betrifft Approximationen von Funktionen mit reellem (oder komplexem) Definitions- und Zielbereich und die Annäherung der Variablen an einen endlichen Punkt (den Entwicklungspunkt der Reihe). Zum Beispiel gilt

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + O(z^5)$$

bei Annäherung von z an 0. Da wir uns in diesem Kapitel auf Definitionsbereich $\mathbb{N}$ und die Annäherung ans Unendliche spezialisiert haben, gehen wir darauf nicht näher ein und verweisen auf das Gebiet der Analysis.
Es wurde bereits darauf hingewiesen, dass die O-Notation einen nicht darauf verpflichtet, die genaue Wachstumsordnung anzugeben. Im Prinzip schätzen wir mit $f = O(g)$ die Wachstumsordnungvon f nach oben (aber nicht automatisch nach unten) ab. Für die Abschätzung nach unten verwenden wir die Ω-Notation:

$$g = \Omega(f) :\Leftrightarrow f = O(g). \tag{25}$$

Die genaue Wachstumsordnung ergibt sich durch die Θ-Notation, wobei

$$f = \Theta(g) :\Leftrightarrow f = O(g) \text{ und } f = \Omega(g) \tag{26}$$

Es gelten folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} f = \Theta(g) \quad &\Leftrightarrow \quad g = \Theta(f) && (27)\\ &\Leftrightarrow \quad 0 < \liminf_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty. && (28)\end{aligned}$$

In Worten: $f = \Theta(g)$ genau dann, wenn es in der Folge $f(n)/g(n)$ weder eine gegen Null noch eine gegen Unendlich konmvergente Teilfolge gibt. Ist diese Kriterium erfüllt, sagen wir, dass f und g die gleiche Wachstumsordnung haben (eine Äquivalenzrelation). Falls die Folge $f(n)/g(n)$ einen (evtl. unendlichen) Grenzwert besitzt, so ergibt sich die Vereinfachung

$$f = \Theta(g) \Leftrightarrow 0 < \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty, \tag{29}$$

d.h., $f = \Theta(g)$ genau dann, wenn der Grenzwert der Folge $f(n)/g(n)$ weder Null noch Unendlich ist.
Wir beschließen diesen Abschnitt mit der Definition der o- und ω-Notation:

$$o(g) = \{f|\ f \prec g\} \tag{30}$$
$$\omega(g) = \{f|\ f \succ g\} \tag{31}$$

Die Schreibweise $f = o(g)$ bzw. $f = \omega(g)$ ist also zu $f \prec g$ bzw. $f \succ g$ äquivalent.

Übersicht und Limes-Kriterien: In der folgenden Übersicht darf, sofern der Limes existiert, $\limsup_{n\to\infty}$ bzw. $\liminf_{n\to\infty}$ auch durch $\lim_{n\to\infty}$ ersetzt werden:

Schreibweise	**Limes-Kriterium**	**Sprechweise**
$f = O(g)$	$\limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$	f wächst höchstens so schnell wie g
$f = \Omega(g)$	$\liminf_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0$	f wächst mindestens so schnell wie g
$f = \Theta(g)$	$f = O(g)$ und $f = \Omega(g)$	f wächst genau so schnell wie g
$f = o(g)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$	f wächst langsamer als g
$f = \omega(g)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$	f wächst schneller als g

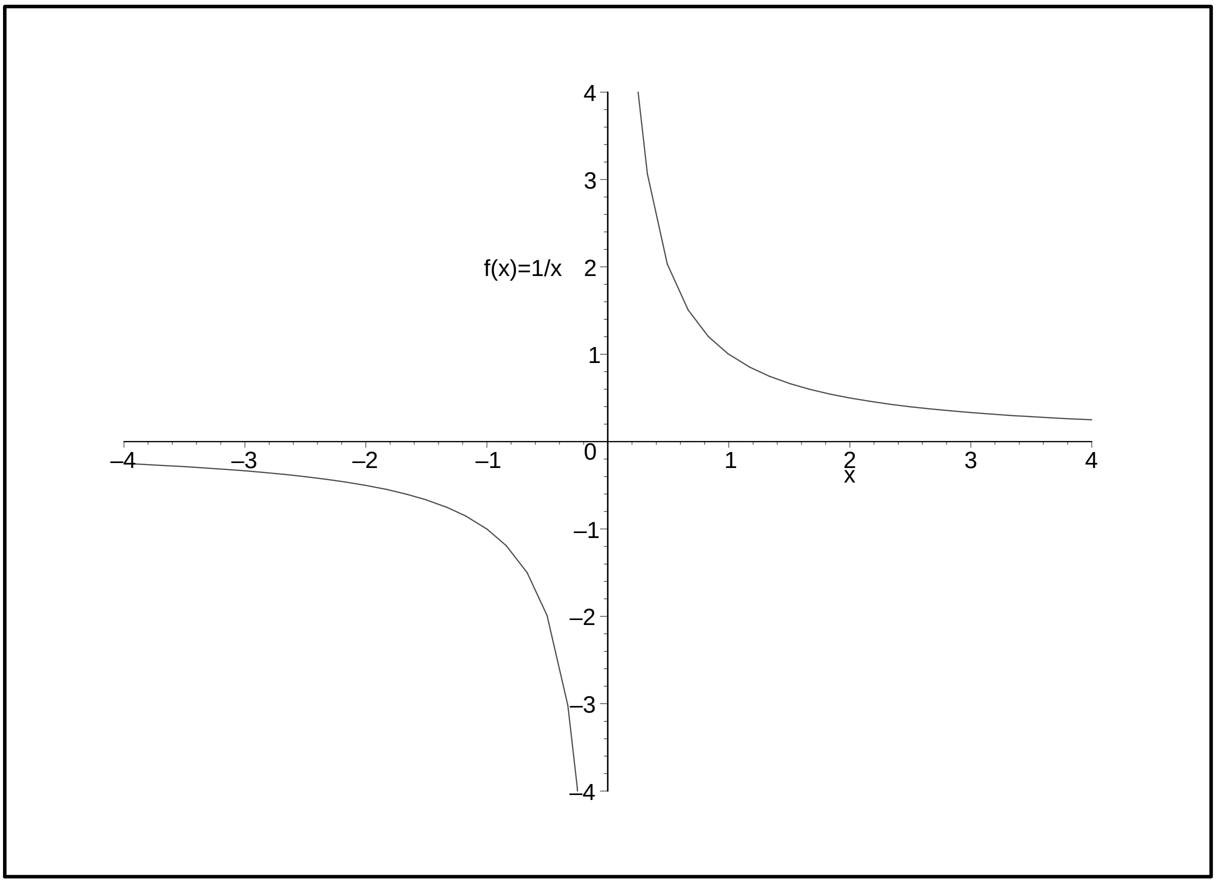

Abbildung 1: Asymptoten