Lemma 0.1 *Für jedes $k \geq 0$ sind die Klassen Σ'_k und Π'_k abgeschlossen unter Vereinigung und Durchschnitt von Sprachen.*

Beweis Für $k = 0$ ist die Aussage offensichtlich. Sei $k \geq 1$. Seien $L', L'' \in \Sigma'_k$. Dann existieren Sprachen $L'_0, L''_0 \in P$ und Polynome $p'_1, \ldots, p'_k, p''_1, \ldots, p''_k$, so dass

$$\begin{aligned} L' &= \{x : (\exists y'_1)_{p'_1} (\forall y'_2)_{p'_2} \ldots (Q_k y'_k)_{p'_k} \langle y'_1, \ldots, y'_k, x\rangle \in L'_0\} \ , \\ L'' &= \{x : (\exists y''_1)_{p''_1} (\forall y''_2)_{p''_2} \ldots (Q_k y''_k)_{p''_k} \langle y''_1, \ldots, y''_k, x\rangle \in L''_0\} \ . \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned} L' \cup L'' &= \{x : (\exists y_1)_{pol} (\forall y_2)_{pol} (\exists y_3)_{pol} \cdots (Q_k y_k)_{pol} \text{Bedingung (A)}\} \\ L' \cap L'' &= \{x : (\exists y_1)_{pol} (\forall y_2)_{pol} (\exists y_3)_{pol} \cdots (Q_k y_k)_{pol} \text{Bedingung (B)}\} \ , \end{aligned}$$

wobei die Bedingungen (A) bzw. (B), jeweils bestehend aus zwei Teilen, gegeben sind wie folgt:

1. Für alle ungeraden $i \in \{1, \ldots, k\}$ ist y_i ein Codewort für eine Stringpaar (y'_i, y''_i) mit $|y'_i| \leq p'_i(|x|)$ und $|y''_i| \leq p''_i(|x|)$.

2. Falls eine entsprechende Bedingung auch für alle geraden $i \in \{1, \ldots, k\}$ gilt, dann folgt

   $$\langle y'_1, \ldots, y'_k, x\rangle \in L'_0 \vee \langle y''_1, \ldots, y''_k, x\rangle \in L''_0$$

   im Falle der Bedingung (A) und

   $$\langle y'_1, \ldots, y'_k, x\rangle \in L'_0 \wedge \langle y''_1, \ldots, y''_k, x\rangle \in L''_0$$

   im Falle der Bedingung (B).

Man beachte, dass die Bedingungen (A) und (B) in Polynomialzeit getestet werden können.[1]
Da $L_1 \cup L_2$ bzw. $L_1 \cap L_2$ mit einer alternierenden Quantorenkette vom Typ Σ'_k (gefolgt von einer in Polynomialzeit überprüfbaren Aussage) beschrieben werden kann, ergibt sich $L' \cup L''$ bzw. $L' \cap L'' \in \Sigma'_k$.
Die entsprechenden Abschlusseigenschaften von Π'_k **ergeben sich leicht** durch Dualisierung. **Übg.**

•

[1] Beim effizienten Testen von $|y'_i| \leq p'_i(|x|)$ bzw. $|y''_i| \leq p''_i(|x|)$ nutzen wir die Platzkonstruierbarkeit der betreffenden Polynome aus.