Hans U. Simon
Leonie Ryvkin

Bochum, den 25.10.18
Abgabe am 08.11.18

Übungen zur Vorlesung

Komplexitätstheorie

WS 18/19

Übungsblatt 3

Aufgabe 3.1

Zeigen Sie die Reflexivität und Transitivität der Relationen »$\leq_T$« und »$\leq_L$«.

Aufgabe 3.2

Das Problem LONGEST PATH BETWEEN TWO NODES ist gegeben durch

Eingabe: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$, zwei verschiedene Knoten Knoten $a, b \in V$ und eine Schranke $B \in \mathbb{N}$.
Frage: Existiert in G ein einfacher Pfad[1] von a nach b, der mindestens die Länge B hat?

Konstruieren Sie eine Levin–Reduktion von HAMILTON CIRCUIT auf LONGEST PATH BETWEEN TWO NODES. HAMILTON CIRCUIT ist wie folgt definiert:

Eingabe: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$.
Frage: Existiert eine Rundreise durch den Graphen, welche jeden Knoten genau einmal besucht?

Aufgabe 3.3

Sei R eine polynomiell verifizierbare Relation und val eine polynomiell auswertbare Kostenfunktion. Es sei R' die Relation

$$R' = \{((x, K), y) | (x, y) \in R \text{ und } \mathrm{val}(x, y) \leq K\} \ .$$

Weiter sei

$$R'_{val} = \{(x, y^*) \in R | \forall y : (x, y) \in R \Rightarrow \mathrm{val}(x, y) \geq \mathrm{val}(x, y^*)\}$$

die Relation zum zugehörigen Minimierungsproblem. Zeige: Falls R' selbstreduzierbar ist, dann folgt $R'_{val} \leq_T L(R')$, d.h. das Minimierungsproblem für R' ist auf das Entscheidungsproblem für R' Turing-reduzierbar.

[1] also ein Pfad, der keinen Knoten mehrmals besucht

Aufgabe 3.4

a) Zeigen Sie, dass VERTEX COVER als Entscheidungsproblem in Polynomialzeit lösbar wird, wenn wir es auf bipartite Graphen einschränken.
b) Entwerfen Sie einen Algorithmus, der zu gegebenem bipartiten Graphen und zu gegebener Kostenschranke k ein Vertex Cover der Größe k konstruiert, sofern eines existiert.
Hinweis zu a): Sie dürfen ausnutzen, dass das Maximum Matching Problem für beliebige Graphen in Polynomialzeit lösbar ist. Recherchieren Sie, in welcher Beziehung Maximum Matching und Vertex Cover in bipartiten Graphen zueinander stehen.

Aufgabe 3.5

Betrachten Sie die polynomielle Reduktion von 3–SAT auf 3–COLORABILITY und beweisen Sie (unter der Voraussetzung, dass für die Knoten A, B, C nur die Farben 0 und 1 zur Verfügung stehen) folgende Aussagen über die Klauselkomponente (Skript S.36) und das Crossover–Gadget (S. 4 Handzettel):

a) Wenn A, B, C die Farbe 0 haben, so muss auch Z mit 0 gefärbt sein.

b) Wenn einer der Knoten A, B, C die Farbe 1 hat, so kann auch Z mit 1 gefärbt werden.

c) Zu jeder Wahl von zwei Farben $a, b \in \{1, 2, 3\}$ existiert eine Färbung f mit $f(x) = f(x') = a$ und $f(y) = f(y') = b$.

d) Es gilt $f(x) = f(x')$ und $f(y) = f(y')$ für *alle* zulässigen 3–Färbungen.

Aufgabe 3.6

Gegeben sei die folgende Variante von PARTITION:

Eingabe: Zahlen $a_1, \ldots, a_{2n} \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{i=1}^{2n} a_i = S$
Frage: Existiert eine Menge $I \subset [2n]$ mit $|I| = n/2$ und $\sum_{i \in I} a_i = S/2$?

Zeigen Sie, dass dieses Problem pseudopolynomiell lösbar ist.