Hans U. Simon
Leonie Ryvkin

Bochum, den 10.01.19
Abgabe am 17.01.19

Übungen zur Vorlesung

Komplexitätstheorie

WS 18/19

Übungsblatt 10

Aufgabe 10.1

In der Vorlesung (s. Konversion von Software zu Hardware) wurde gezeigt, dass sich jede Sprache aus P von einer polynomiellen Schaltkreisfamilie $C = (C_n)_{n\geq 0}$ realisieren lässt. Zeigen Sie, dass sich ein geeignetes Codewort $desc(C_n)$ in $(\log n)$–beschränktem Speicherplatz berechnen lässt (d.h. die Familie $(C_n)_{n>0}$ ist uniform). Wir gehen von formalen Sprachen über dem Binäralphabet aus. Dementsprechend erhalten Schaltkreise bei Eingabe $x \in \{0,1\}^n$ die Eingangsknoten $0, 1, x_1, \ldots, x_n$.

Aufgabe 10.2

Zeigen Sie, dass jede spärliche Sprache (wir betrachten wieder formale Sprachen über dem Alphabet $\{0,1\}$) ein Element von $P_{/poly}$ ist.
Zeigen Sie dies direkt, d.h. ohne dabei Satz 20.11 anzuwenden.

Aufgabe 10.3

Sei $f : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ eine beliebige Abbildung. Beweise:

a) (Universalität von $\wedge, \vee, \neg$) Jedes f kann als CNF-Formel mit Hilfe von $n2^n$ $\wedge, \vee$-Operationen ausgedrückt werden. Daher kann f auch von einem Schaltkreis der Größe $O(n2^n)$ berechnet werden.

b) Man kann für jedes f rekursiv einen Schaltkreis aufbauen, der f mit $O(2^n)$ Bausteinen berechnet.

c) Kombiniere die Konstruktion aus b) geschickt mit der Aussage von a) um zu zeigen: f kann von einem Schaltkreis mit $O(\frac{2^n}{n})$ Bausteinen berechnet werden.

Aufgabe 10.4

Wir definieren eine Klasse von Schaltkreisfamilien, die *PH-Circuits*, über folgende Eigenschaften:

- die Bausteine sind AND-, OR- oder NOT-Bausteine
- die AND- und OR-Bausteine haben unbeschränkt viele Eingänge
- die NOT-Bausteine befinden sich nur auf der Eingabeebene, d.h. die Eingangsknoten sind $0, 1, x_1, \ldots, x_n, \overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}$
- folgende Abbildungen sind in polynomieller Zeit berechenbar:
  - SIZE(n): Liefert die Anzahl (in Binärdarstellung) der Bausteine von Schaltkreis C_n. Dabei spielen die ersten $n+2$ Bausteine die Rolle der Eingabevariablen $x_1, \ldots, x_n$ sowie der Konstanten 0 und 1.
  - TYPE(n,i): Liefert den Typ (AND, OR, NOT, None) von Baustein i in C_n
  - EDGE(n,i,j): Gibt 1 aus, genau dann wenn eine gerichtete Kante von Baustein i zu Baustein j in C_n existiert
- die Größe der Schaltkreise ist durch $2^{n^{O(1)}}$ beschränkt
- die Tiefe der Schaltkreise ist konstant

Zeige: In PH sind genau die Sprachen (d.h. formale Sprachen über $\{0,1\}^*$), die von PH-Circuits erkannt werden.