Hans U. Simon
Leonie Ryvkin

Bochum, den 26.10.17
Abgabe am 09.11.17

Übungen zur Vorlesung

Komplexitätstheorie

WS 17/18

Übungsblatt 3

Aufgabe 3.1

Zeigen Sie die Reflexivität und Transitivität der Relationen »$\leq_T$« und »$\leq_L$«.

Aufgabe 3.2

Das Problem LONGEST PATH BETWEEN TWO NODES ist gegeben durch

Eingabe: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $l(e) \in \mathbb{N}_0$, Knoten $a, b \in V$, Schranke $B \in \mathbb{N}$.
Frage: Existiert in G ein Pfad von a nach b, der mindestens Gesamtgewicht B hat?

Konstruieren Sie eine Levin–Reduktion von HAMILTON CIRCUIT auf LONGEST PATH BETWEEN TWO NODES. HAMILTON CIRCUIT ist wie folgt definiert:

Eingabe: Ungerichteter (bzw. gerichteter) Graph $G = (V, E)$.
Frage: Existiert eine (gerichtete) Rundreise durch den Graphen, welche jeden Knoten genau einmal besucht?

Aufgabe 3.3

Sei R eine selbstreduzierbare, polynomiell verifizierbare Relation und $val(x', y)$ eine polynomiell auswertbare Bewertungsfunktion. Dabei ist ein Paar (x, y) genau dann in R, wenn gilt: $x = (x', K)$ und $val(x', y) \geq K$ für das Maximierungsproblem (bzw. $val(x', y) \leq K$ für das Minimierungsproblem). Zeigen Sie, dass das Maximierungs– bzw. Minimierungsproblem von R bezüglich val Turing–reduzierbar auf das Entscheidungsproblem für R ist.

Aufgabe 3.4

Untersuchen Sie, ob für die folgenden Klassen von Graphen das Problem VERTEX COVER NP–vollständig oder in Polynomialzeit lösbar ist:

- Graphen mit Knoten, die höchstens Grad 3 haben
- Bipartite Graphen

Hinweise: Überlegen Sie, ob Sie beliebige Graphen mittels lokaler Ersetzung in Graphen aus einer oder beiden der oben genannten Klassen überführen können. Können Sie Parallelen zu Matching-Problemen finden?

Aufgabe 3.5

Betrachten Sie die polynomielle Reduktion von 3–SAT auf 3–COLORABILITY und beweisen Sie folgende Aussagen über die Klauselkomponente (Skript S.36) und das Crossover–Gadget (S. 4 Handzettel):

a) Wenn A, B, C die Farbe 0 haben, so muss auch Z mit 0 gefärbt sein.

b) Wenn einer der Knoten A, B, C die Farbe 1 hat, so kann auch Z mit 1 gefärbt werden.

c) Zu jeder Wahl von zwei Farben $a, b \in$ 1,2,3 existiert eine Färbung f mit $f(x) = f(x') = a$ und $f(y) = f(y') = b$.

d) Es gilt $f(x) = f(x')$ und $f(y) = f(y')$ für *alle* zulässigen 3–Färbungen.

Aufgabe 3.6

Gegeben sei die folgende Variante von PARTITION:

Eingabe: Zahlen $a_1, \ldots, a_{2n} \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{i=1}^{2n} a_i = S$
Frage: Existiert eine Menge $I \subset [2n]$ mit $|I| = n/2$ und $\sum_{i \in I} a_i = S/2$?

Zeigen Sie, dass dieses Problem pseudopolynomiell lösbar ist.