

Übungen zur Vorlesung
Komplexitätstheorie
Sommer 2010
Aufwärmblatt

Aufgabe 0.1

Gib die Turing-Tafel einer 2-Band TM M an, die Folgendes leistet: Bei der Eingabe 1^n gibt M auf dem Ausgabeband die Binärdarstellung von n aus.

Es reicht, die Binärdarstellung "rückwärts" auszugeben (zum Beispiel 1011 statt 1101 für $n = 13$). Dies ist einfacher, weil das Band nur auf der rechten Seite unbeschränkt ist.

Aufgabe 0.2

Zeige, dass folgende Abbildungen zeitkonstruierbar sind:

- a) $T(n) = c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{N}$
- b) $T(n) = 2^n$
- c) $T(n) = n$

Überlege außerdem, warum aus der Zeitkonstruierbarkeit von T und S folgt, dass auch $T + S$ und $T \cdot S$ zeitkonstruierbar sind.

Hinweis: Verwende für Teil c) eine Zeitanalyse der TM aus Aufgabe 1.

Aufgabe 0.3

Eine *zweidimensionale* Turingmaschine besitzt keine Bänder, sondern *Gitter*, auf denen sich der Kopf nicht nur nach links und rechts, sondern auch nach oben und unten bewegen kann (siehe Abbildung 1).

Zeige, dass jede Sprache, die von einer zweidimensionalen TM M in Zeit $O(T(n))$ erkannt wird (wobei $T(n)$ zeitkonstruierbar ist), ebenfalls von einer eindimensionalen TM M' in Zeit $O(T(n)^2)$ erkannt werden kann.

▷	▷	▷	▷	▷	▷	▷	...
▷	1	1	0	1	□	□	...
▷	□	□	1	□	□	□	...
▷	□	1	0	□	□	□	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Abbildung 1: Ein Gitter einer zweidimensionalen TM (der Kopf befindet sich auf dem farbig markierten Feld)

Hinweis: Gib M' für jedes Gitter von M zwei Bänder (ein Band simuliert das Gitter, das andere speichert die Position des Kopfs im Gitter), sowie ein zusätzliches Band für Nebenrechnungen.

Aufgabe 0.4

Eine TM heißt *oblivious*¹ wenn die Bewegung der Köpfe nicht von der Eingabe x , sondern nur von der *Länge der Eingabe* $n := |x|$ abhängt. Das heißt, wenn man n kennt, kann man die Positionen der Köpfe in jedem Schritt vorhersagen.

Zeige, dass jede Sprache, die von einer TM M in Zeit $O(T(n))$ erkannt wird (wobei $T(n)$ zeitkonstruierbar ist), ebenfalls von einer oblivious TM M' in Zeit $O(T(n)^2)$ erkannt werden kann.

Hinweis: In der Vorlesung wurde die Reduktion von k -Band Turing-Maschinen auf 1-Band-TM vorgestellt. Erweitere diese Reduktion geschickt. Es reicht eine 2-Band-TM aus.

¹vergesslich; etwas nicht wahrnehmend