Daniela Kacso
Christian Brandl

Bochum, den 14. 04. 2008

Übungen zur Vorlesung

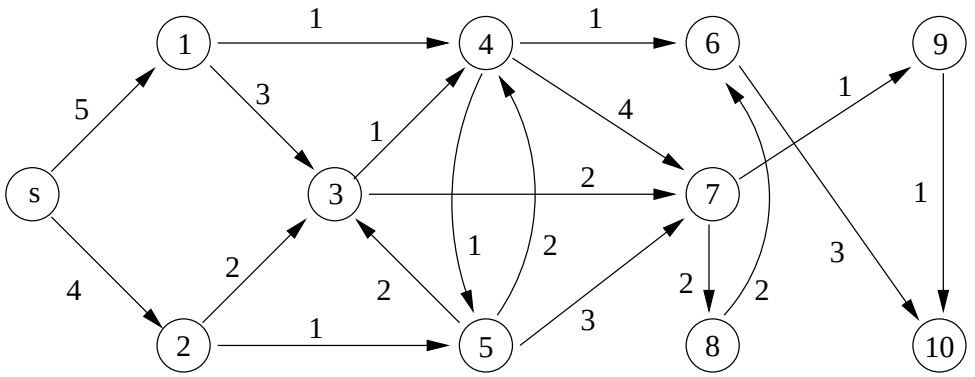
Effiziente Algorithmen

SS 08

Blatt 1

Aufgabe 1.1

Gib zu dem folgenden Digraphen eine baumartige Kollektion kürzester Pfade an.



Finde auch eine nicht-baumartige Kollektion kürzester Pfade und begründe, warum sie nicht baumartig ist.

Aufgabe 1.2

Die folgende Tabelle enthält die möglichen Dienstzeiten für die Fahrer eines Busunternehmens und die zugehörigen Kosten. Der Besitzer des Unternehmens möchte zu den geringst möglichen Kosten sicherstellen, dass von 9 bis 17 Uhr zu jeder Stunde mindestens ein Fahrer Dienst hat.

Dienstzeit	9–11	9–13	11–13	12–15	12–17	13–16	14–17	16–17
Kosten	11	25	9	16	28	22	15	8

Zeichne einen Graphen, in dem sich dieses Problem als Kürzeste-Pfade Problem lösen lässt und gib eine Lösung an.

Aufgabe 1.3

Beweise die folgenden Aussagen über lineare Programme mit beschränkten Differenzen (s. Skript S. 8f.):

a) 1. Wenn der Digraph $G_{\mathcal{P}}$ einen Pfad von i nach j der Länge c enthält, dann kann man aus den linearen Randbedingungen in $\mathcal{P}$ die Ungleichung $x_j \leq x_i + c$ herleiten (Beweis durch Induktion über die Länge des Pfades).

2. Wenn der Digraph $G_{\mathcal{P}}$ einen negativen Kreis enthält, dann besitzen die linearen Randbedingungen in $\mathcal{P}$ keine Lösung.
3. Sei i_0 ein Wurzelknoten von $G_{\mathcal{P}}$. Wenn der Digraph $G_{\mathcal{P}}$ keinen negativen Kreis enthält, dann erhalten wir eine Lösung von $\mathcal{P}$, indem wir für $i = 1, \ldots, n$ die Variable x_i mit der Länge des kürzesten Pfades von i_0 zum Knoten i belegen.

b) Sei $G''_{\mathcal{P}}$ der Graph mit neuem Startknoten s, neuer Kante (s, i_0) mit Kosten p, sowie neuer Kante (j, s) mit Kosten $-q$.

1. Wenn $G''_{\mathcal{P}}$ einen negativen Kreis enthält, so hat $\mathcal{P}$ erweitert um die Bedingungen $x_{i_0} = p$ und $x_j \geq q$ keine Lösung.
2. Wenn $G''_{\mathcal{P}}$ keinen negativen Kreis enthält, dann liefern die von s ausgehenden kürzesten Pfade eine Lösung für $\mathcal{P}$ erweitert um die Randbedingungen $x_{i_0} = p$ und $x_j \geq q$.

Aufgabe 1.4

a) Zeichne den zugehörigen Digraphen für das lineare Programm mit beschränkten Differenzen in Beispiel 2.1.4 des Skripts ohne die Randbedingungen $x_{23} = p$ und $x_0 \geq 0$. Begründe, warum jeder Knoten ein Wurzelknoten ist. Modifiziere dann den Graphen so, dass er auch die beiden obigen Randbedingungen berücksichtigt.

b) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass das lineare Programm genau dann eine Lösung besitzt, wenn der Digraph keinen negativen Kreis enthält. Zeige, dass die Bedingung

$$p \geq b_{i+16} + b_{i+8} + b_i \quad \text{für } i = 0, \ldots, 7$$

für die Existenz einer Lösung notwendig aber nicht hinreichend ist.