Aufgabe 11.1 (4 Punkte)

a) Wieviele perfekte Matchings hat ein Pfad mit $n \geq 2$ Knoten?
b) Wieviele perfekte Matchings hat ein Kreis mit n Knoten?
c) Wieviele Matchings/perfekte Matchings/Maximum Matchings hat ein Sterngraph mit n Knoten?
d) Für welche $n \geq 2$ kann man Graphen G mit n Knoten angeben der ein perfektes Matching enthält?

Aufgabe 11.2 (4 Punkte)

Gib einen Algorithmus an, der zu einem gegebenen Graphen $G = (V, E)$ in $O(n + m)$ Schritten ein Maximal Matching berechnet.

Begründe die Laufzeitschranke für das von Dir angegeben Verfahren.

Aufgabe 11.3 (4 Punkte)

Gegeben sein ein bipartiter Graph $G = (V_1 \uplus V_2, E)$, wobei $|V_1| \leq |V_2|$. Ein semi-perfektes Matching ist ein Matching $M \subseteq E$, bei dem jeder Knoten $v \in V_1$ beteiligt ist ($V_1 \subset \cup_{e \in M} e$).

Zeige, dass das Auffinden einen semi-perfekten Matchings mit minimalem Gewicht (durch geeignete Erweiterung von G und und der Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{R}$) effizient reduziert werden kann zum klassischen MINIMUM WEIGHT PERFECT MATCHING Problem.

Aufgabe 11.4 (4 Punkte)

Wir betrachten injektive Abbildungen $h : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\}$ wie in Beispiel 4.1.6 (Skript S. 119f):

a) Finde eine Abbildung $\bar{h}$, die keinem gültigen Schedule entspricht.
b) Betrachte den Graph

$$G = (\{1, \ldots, n\} \uplus \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\}, \{(i, (k, j)) \mid 1 \leq i, k \leq n, 1 \leq j \leq m\}) \ .$$

Sei $\hat{M} \subset E$ ein semi-perfektes Matching mit minimalem Gewicht im Graph G bzgl. der Gewichtsfunktion $w_{i,(k,j)} = k \cdot t_{i,j}$.
Zeige, dass die Abbildung $h^*(i) := (k, j)$ für $(i, (k, j)) \in \hat{M}$ wohldefiniert und injektiv ist, und dass h^* einem Schedule mit minimalen Kosten entspricht.