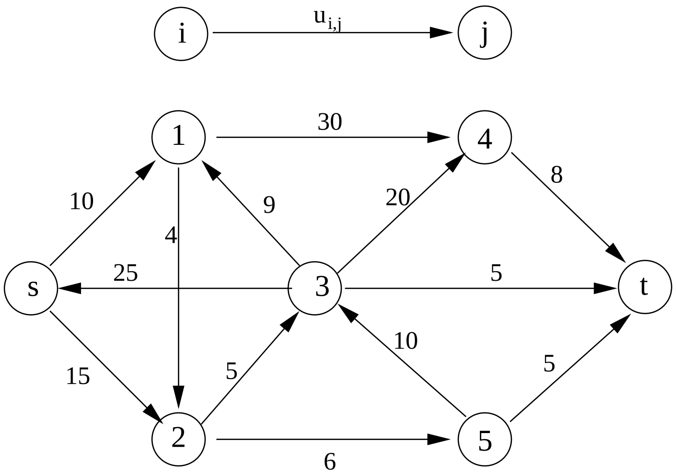
### Aufgabe 7.1 (4 Punkte)

Beweise die folgenden Eigenschaften von Transportnetzwerken mit Einheitskapazitäten (Skript S. 69):

a) Wenn $G$ keine bidirektionalen Kanten besitzt, dann besitzt auch $G(x)$ keine bidirektionalen Kanten.
b) Wenn $G$ Einheitskapazitäten besitzt, so besitzt auch $G(x)$ Einheitskapazitäten.
c) Wenn $G$ einfach ist, so ist auch $G(x)$ einfach.

### Aufgabe 7.2 (4 Punkte)

Führe den generischen Preflow-Push Algorithmus für das Netzwerk aus Aufgabe 6.1 (s.u.) aus. Wende dabei folgende Regeln an: (1) Wähle immer den aktiven Knoten mit kleinstem Index. (2) Durchlaufe die Adjazenzliste eines Knotens in aufsteigender Folge der Knotenindizes.




### Aufgabe 7.3 (4 Punkte)

Beweise die Invarianzeigenschaften des generischen Preflow-Push Algorithmus (s. Skript S. 77):

a) $x$ ist stets ein Präfluss in $G$.
b) $d$ ist stets eine zulässige Distanzmarkierung für $G(x)$.
c) $d$ wird nach der Initialisierung nur über Relabel-Operationen modifiziert. Jede auf einen aktiven Knoten $i$ angewandte Relabel-Operation aktualisiert $d(i)$ auf einen echt vergrößerten Wert.
d) Nach der Initialisierung gilt $d(s) = n$ und $d(i) \leq n - 1$ für alle $i \neq s$.
e) Startknoten $s$ ist niemals aktiv. Distanzmarkierung $n$ für $s$ kann im Laufe des generischen Algorithmus nicht mehr verändert werden.

**Aufgabe 7.4 (4 Punkte)**

Eine Kante in einem Transportnetzwerk heisse *lebenswichtig*, falls das Löschen dieser Kante die größte Abnahme des maximalen Flusswertes zur Folge hat. (O.B.d.A. sei der maximale Fluss nicht der Nullfluss.) Beweise folgende Behauptungen oder finde Gegenbeispiele:

a) Jede Kante $(i, j)$ mit maximalem Wert $u_{ij}$ ist lebenswichtig.
b) Sei $x$ ein maximaler Fluss. Jede Kante $(i, j)$ mit maximalem Wert $x_{i,j}$ ist lebenswichtig.
c) Sei $x$ ein maximaler Fluss. Jede Kante $(i, j)$, die zu einem minimalen Schnitt gehört und deren Wert $x_{i,j}$ maximal ist, ist lebenswichtig.
d) Eine Kante, die nicht zu einem minimalen Schnitt gehört, kann nicht lebenswichtig sein.