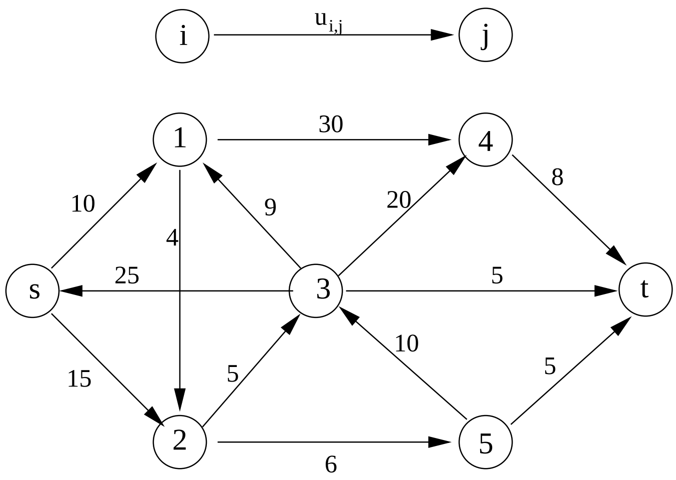
Aufgabe 6.1 (4 Punkte)

Führe den KFVP- Algorithmus für das folgende Netzwerk aus. Durchlaufe die Adjazenzliste eines Knotens in aufsteigender Folge der Knotenindizes.



Gib dabei bei jeder *relabel*-Operation den neuen Distanzwert des veränderten Knotens an und bei jeder *augment*-Operation den verwendeten FVP.

Aufgabe 6.2 (4 Punkte)

Verifiziere die folgenden Invarianzeigenschaften des KFVP-Algorithmus (Skript S. 64):

a) x ist stets ein zulässiger Fluss durch G.
b) d ist stets eine zulässige Distanzmarkierung in $G(x)$.
c) Falls $i \neq s$, dann durchlaufen die Backpointer von i ausgehend (in umgekehrter Orientierung) einen zulässigen Pfad von s nach i. Dieser hat die Länge $d(s) - d(i) \leq \tau - 1$.

Aufgabe 6.3 (4 Punkte)

Zeige, dass die zur Laufzeitanalyse (Skript S. 66/77) des KFVP-Algorithmus vorgeschlagene zyklische Durchmusterung von Adjazenzlisten korrekt ist:

Wenn das Ende von Liste A_i erreicht ist, dann enthält Liste A_i keinen Knoten j, so dass (i, j) zulässig ist.

Bonusaufgabe 6.4 (4 Punkte)

Zeige, dass der Markierungsalgorithmus (Skript S. 59) im Falle irrationaler Kantenkapazitäten nicht zu terminieren braucht und dass die Flusswerte, die man mit ihm erhält, gegen einen Wert konvergieren können, der verschieden ist vom Wert eines maximalen Flusses:

Definition. Ein *flussvergrößernder Weg* in einem residualen Netzwerk $G(x)$ ist ein gerichteter Weg, der jede Kante höchstens einmal besucht. (Knoten können mehrmals besucht werden, insbesondere auch s und t.)

a) Betrachte zunächst das Netzwerk mit zwei Knoten $\{s, t\}$ und vier Kanten

$$E = \{a = (s, t), b = (t, s), c = (s, t), d = (t, s)\} ,$$

wobei die Kapazitäten wie folgt gegeben sind: $u(a) = 1$, $u(b) = u(c) = \infty$ und $u(c) = \sqrt{2}$. Finde in diesem Netzwerk einen eine unendliche Folge flussvergrößernder Wege, deren Restkapazitäten sich zum maximalen Flusswert addieren. [Hinweis: Jeder Weg der Folge enthält genau zwei Kanten von s nach t mit endlichen Restkapazitäten.]

b) Wir fügen im Netzwerk von oben nun eine weitere Kante $e = (s, t)$ ein, mit Kapazität $u(e) = 1$. Zeige, dass dieses Netzwerk eine unendliche Folge flussvergrößernder Wege enthält, deren Restkapazitäten sich zu einem Wert addieren, der verschieden ist vom maximalen Flußwert.

c) Konstruiere nun aus dem Netzwerk in (b) ein Netzwerk in dem jeder Flussvergrößernde Weg in (b) einem Flussergrößerndem Pfad entspricht.
Tip: Spalte die Knoten s und t in einen vollverbundenen Untergraphen mit jeweils vier Knoten, und verbinde je zwei von ihnen mit entsprechenden Kanten aus (b). Füge dabei zwei neue Knoten s, t ein, die als Start- und Zielknoten im Netzwerk dienen.