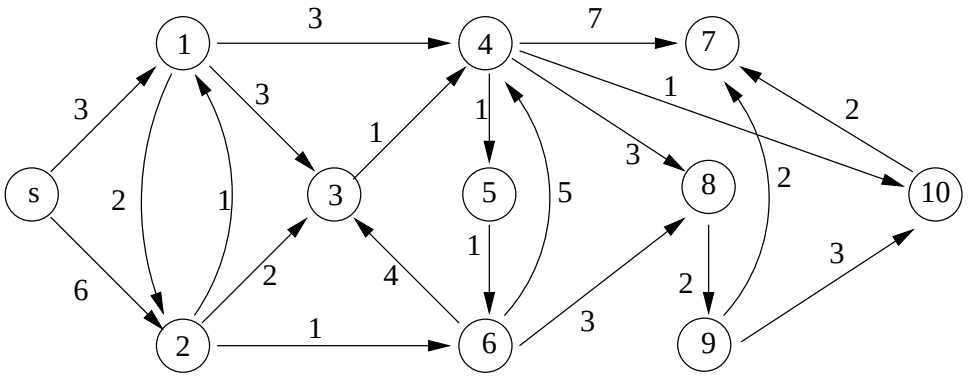
Aufgabe 1.1 (4 Punkte)

Gib zu dem folgenden Digraphen eine baumartige Kollektion kürzester Pfade an.



Finde auch eine nicht-baumartige Kollektion kürzester Pfade und begründe, warum sie nicht baumartig ist.

Aufgabe 1.2 (4 Punkte)

Eine Bibliothekarin plant die Aufsicht in der Bibliothek. Dazu stehen ihr 8 studentische Hilfskräfte zu Verfügung, deren Dienstzeiten und Kosten in der folgenden Tabelle angegeben sind:

Dienstzeit	9–11	9–13	11–13	12–16	12–18	13–17	15–18	17–18
Kosten	12	25	14	18	38	22	15	13

Die Bibliothekarin möchte erreichen, dass zu geringstmöglichen Kosten von 9h-18h immer mindestens eine Hilfskraft anwesend ist.

Zeichne einen Graphen, in dem sich dieses Problem als Kürzeste-Pfade Problem lösen lässt. Gib eine Lösung an.

Aufgabe 1.3 (4 Punkte)

Beweise die folgenden Aussagen über lineare Programme mit beschränkten Differenzen (s. Skript S. 8f.):

a)
1. Wenn der Digraph $G_{\mathcal{P}}$ einen Pfad von i nach j der Länge c enthält, dann kann man aus den linearen Randbedingungen in $\mathcal{P}$ die Ungleichung $x_j \leq x_i + c$ herleiten (Beweis durch Induktion über die Länge des Pfades).
2. Wenn der Digraph $G_{\mathcal{P}}$ einen negativen Kreis enthält, dann besitzen die linearen Randbedingungen in $\mathcal{P}$ keine Lösung.
3. Sei i_0 ein Wurzelknoten von $G_{\mathcal{P}}$. Wenn der Digraph $G_{\mathcal{P}}$ keinen negativen Kreis enthält, dann erhalten wir eine Lösung von $\mathcal{P}$, indem wir für $i = 1, \ldots, n$ die Variable x_i mit der Länge des kürzesten Pfades von i_0 zum Knoten i belegen.

b) Sei $G''_{\mathcal{P}}$ der Graph mit neuem Startknoten s, neuer Kante (s, i_0) mit Kosten p, sowie neuer Kante (j, s) mit Kosten $-q$.

1. Wenn $G''_{\mathcal{P}}$ einen negativen Kreis enthält, so hat $\mathcal{P}$ erweitert um die Bedingungen $x_{i_0} = p$ und $x_j \geq q$ keine Lösung.
2. Wenn $G''_{\mathcal{P}}$ keinen negativen Kreis enthält, dann liefern die von s ausgehenden kürzesten Pfade eine Lösung für $\mathcal{P}$ erweitert um die Randbedingungen $x_{i_0} = p$ und $x_j \geq q$.

Aufgabe 1.4 (4 Punkte)

a) Zeichne den zugehörigen Digraphen für das lineare Programm mit beschränkten Differenzen in Beispiel 2.1.4 des Skripts ohne die Randbedingungen $x_{23} = p$ und $x_0 \geq 0$. Begründe, warum jeder Knoten ein Wurzelknoten ist. Modifiziere dann den Graphen so, dass er auch die beiden obigen Randbedingungen berücksichtigt.

b) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass das lineare Programm genau dann eine Lösung besitzt, wenn der Digraph keinen negativen Kreis enthält. Zeige, dass die Bedingung

$$p \geq b_{i+16} + b_{i+8} + b_i \quad \text{für } i = 0, \ldots, 7$$

für die Existenz einer Lösung notwendig aber nicht hinreichend ist.

Wichtige Informationen zur Vorlesung und den Übungen

- Alle Informationen zur Vorlesung finden sich im Internet unter

  `http://www.ruhr-uni-bochum.de/lmi/lehre/ea_ss07/` .

- Die Vorlesung findet **dienstags** und **donnerstags von 10-12 Uhr** in NA 02/99 statt.
- Die Übung finden **montags von 12-14 Uhr** in **Raum NA 1/64** statt.
- Unter der obigen Adresse werden wöchentlich Übungsaufgaben bereitgestellt. Termin für die **Abgabe** der Übungsaufgaben ist **mittwochs 12h** im Kasten NA 01.
  Die Aufgaben werden korrigiert und in den Übungen besprochen.
- Die genauen Prüfungsbedingungen werden in der zweiten Semesterwoche bekanntgegeben.
- Die Vorlesung basiert auf einem Skriptum, das am Donnerstag den 05.05. und Dienstag den 10.04. in der Pause der Vorlesung zu einem Preis von 4 Euro verkauft wird.
- Bitte beachten Sie auch das Angebot des Servicecenters Mathematik
  - ▷ `http://www.ruhr-uni-bochum.de/ffm/szma/` und
  - ▷ `http://www.ruhr-uni-bochum.de/ffm/szma/helpdesk.html` .