

**Präsenzaufgabe 12.1**

Betrachte die Hashfunktion  $h$  mit  $h(x) = Q(x) \bmod 5$ . Dabei sei  $Q(x)$  die Quersumme von  $x$ . Füge folgende Werte unter Verwendung von  $h$  (in der Reihenfolge) mittels Open-Hashing in eine anfangs leere Hashtabelle ein:

278, 8385, 284, 5640, 111, 516, 442, 775, 175.

Wieviele Schritte benötigt man bei einer Elementsuche nun maximal?

**Präsenzaufgabe 12.2**

Leere Einträge in einer Hashtabelle seien mit *leer* markiert. Wird ein Element gelöscht, so soll dies in der Tabelle mit *entf* gekennzeichnet werden.

- a) Füge die Schlüssel 16, 44, 21, 5, 19, 22, 8, 33, 27, 30 in dieser Reihenfolge mit Hilfe der Folge von Hashfunktionen

$$h_0(k) = k \bmod m$$

und

$$h_i(k) = (h_0(k) + c \cdot i) \bmod m, \quad \forall i \geq 1$$

für  $m = 11$  und  $c = 1$  in eine geschlossene Hashtabelle mit  $b = 1$  ein. Gib die jeweils berechneten Hash- bzw. Rehashwerte und die resultierende Hashtabelle an.

- b) Gib für die Hashfunktion aus a) mit  $m = 14$  möglichst allgemein alle  $c$  an, die sich als unbrauchbar erweisen, d.h. bei denen bestimmte Bereiche der Hashtabelle immer leer bleiben. Begründe.
- c) Nutze die gefüllte Hashtabelle aus a). Lösche die Elemente 5 und 27 in dieser Reihenfolge aus der Hashtabelle. Gib jeweils die bei der Suche nach den Elementen berechneten Hash- und Rehashwerte an. Gib abschließend die resultierende Hashtabelle an.

**Präsenzaufgabe 12.3**

- a) Gegeben seien die Hashfunktionen

$$h_c : \{0, \dots, 35\} \rightarrow \{0, \dots, 23\}, \quad x \mapsto cx \bmod 24.$$

Gib ein  $c \in \{1, \dots, 23\}$  an, sodass die Anzahl an Kollisionen durch  $h_c$  maximal ist. Ist die Wahl dieses  $c$  eindeutig? Eine Kollision ist ein ungeordnetes Paar  $\{x, y\}$  mit  $h_c(x) = h_c(y)$ .

- b) Sei  $M := \{0, \dots, 8\}$ . Zudem sei auf  $M$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß wie folgt definiert ( $p_i := P(i)$ ):

$$p_0 := \frac{1}{9}, p_1 := \frac{1}{36}, p_2 := \frac{5}{36}, p_3 := \frac{1}{36}, p_4 := \frac{1}{12}, p_5 := \frac{2}{9}, p_6 := \frac{1}{9}, p_7 := \frac{1}{6}, p_8 := \frac{1}{9}.$$

Man zieht nun zwei Elemente  $x$  und  $y$  aus  $M$  unabhängig bzgl.  $P$ . Eine Hashfunktion  $h_* : M \rightarrow \{0, \dots, 6\}$  heißt optimal, wenn sie die Wahrscheinlichkeit einer Kollision minimiert:

$$\Pr(h_*(x) = h_*(y)) \rightarrow \min.$$

Gib eine solche Funktion  $h_*$  an. Ist sie eindeutig bestimmt?