Datenstrukturen SS 2019 21. Mai 2019
Hans Simon Übungsblatt 7
Daniel Pasler Abgabe bis 28. Mai 2019, 12:00 Uhr auf IB 01
Christoph Ries
Leonie Ryvkin

Aufgabe 7.1 (4 Punkte)
Gegeben ist folgende Kollektion von Zeitintervallen

$$R_1 = [1,3), R_2 = [0,4), R_3 = [2,5), R_4 = [5,8), R_5 = [4,9), R_6 = [8,10),$$
$$R_7 = [7,12), R_8 = [11,14), R_9 = [13,15), R_{10} = [12,16)$$

mit den Gewichten

$$w_1 = 1, w_2 = 5, w_3 = 4, w_4 = 1, w_5 = 2, w_6 = 3, w_7 = 5, w_8 = 5, w_9 = 1, w_{10} = 3\ .$$

Nutze den Algorithmus aus der Vorlesung um das Intervall-Scheduling Problem mit Gewichten für obige Eingaben zu lösen. Gib die Arrays p, Opt und B, sowie die optimale Auswahl I^* der Zeitintervalle an.

Aufgabe 7.2 (4 Punkte)
Für eine natürliche Zahl n gelte $Q(n) := M(n,n)$ mit

$$M(i,j) := M(i-1,j) + M(i-1,j-1) + M(i,j-1)$$

und

$$M(i,0) := M(0,i) := i \qquad \forall i \geq 0\ .$$

Zeige zunächst, dass die Berechnung von $Q(n)$ mittels der angegebenen Rekursionsformel Exponentialzeit in Anspruch nimmt. Zeige weiter, dass ein Algorithmus für die Berechnung von $Q(n)$ existiert, der mit quadratischer Laufzeit auskommt.

Aufgabe 7.3 (4 Punkte)
Gegeben sei eine Union–Find–Struktur bestehend aus den acht Bäumen $T_1, ..., T_8$. Baum T_i habe das Label i und enthalte nur das Element i. Stelle nach jeder der nachfolgenden Union–Operationen dar, wie sich die Union–Find–Struktur ändert.

$$\textsc{Union}(1,3,1), \textsc{Union}(5,7,5), \textsc{Union}(2,6,2), \textsc{Union}(1,4,1),$$
$$\textsc{Union}(1,8,1), \textsc{Union}(5,2,2), \textsc{Union}(1,2,1).$$

Führe anschließend $\textsc{Find}(2)$ auf der Struktur aus und stelle den veränderten Baum dar. Nutze stets die zwei in der Vorlesung besprochenen Tricks.

Hinweis: Um eine eindeutige Lösung zu gewährleisten, hänge bei $\textsc{Union}(a,b,c)$ mit zwei gleich großen Komponenten stets die Komponente von b an die von a an.

Aufgabe 7.4 (4 Punkte)
Gegeben sei eine Union–Find–Struktur bestehend aus n Bäumen, die jeweils genau ein Element enthalten. Sei σ eine Folge von Union-/Find-Operationen, sodass sich anschließend alle n Elemente in einem Baum mit Wurzel v befinden. Die Anzahl der Kinder von v ist abhängig von σ. Zeige, dass die Mindestanzahl dieser Kinder durch $\lceil \log_2(n) \rceil$ gegeben ist.