Datenstrukturen SS 2019 9. April 2019
Hans Simon Übungsblatt 1
Daniel Pasler Abgabe bis 16. April 2019, 12:00 Uhr auf IB 01
Christoph Ries
Leonie Ryvkin

Aufgabe 1.1 (4 Punkte)
Führe den Algorithmus A_1 auf unten angegebener Instanz $(R_i)_i$ aus. Gib in jeder Iteration den Inhalt von I an, sowie das Intervall R_k, das in der Iteration aus der Intervallkollektion entfernt wird.

$$\begin{aligned} R_1 &= [3,6) & R_2 &= [0,5) & R_3 &= [2,6) \\ R_4 &= [0,3) & R_5 &= [7,10) & R_6 &= [1,4) \\ R_7 &= [6,10) & R_8 &= [4,5) & R_9 &= [1,2) \\ R_{10} &= [8,9) \end{aligned}$$

Besteht in einer Iteration eine freie Auswahl, so nimm stets das Intervall mit dem kleinsten Startwert.

Aufgabe 1.2 (4 Punkte)
Wir stellen uns nun die Frage, ob A_1 auch den effektiven Zeitanteil, in dem die Ressource belegt wird, maximiert (und nicht nur die Anzahl an durchgeführten Jobs). Dies kann verneint werden. Für eine Eingabeinstanz $(R_i)_{i=1,..,n}$ heiße eine Menge $K \subseteq [n]$ zulässig, falls für alle $i \neq j \in K$ gilt: $R_i \cap R_j = \emptyset$. Für eine zulässige (nicht-leere) Menge K definiert man ihre effektive Belegungsrate B als

$$B(K) := \frac{1}{\bar{b} - \bar{a}} \sum_{k \in K} (b_k - a_k) \in (0,1],$$

wobei $\bar{b} := \max_{k \in K} b_k$ und $\bar{a} := \min_{k \in K} a_k$. Mit I bezeichnen wir die von A_1 ausgegebene Menge. Zeige, dass es für jedes $r \in \mathbb{R}_{>0}$ eine Eingabeinstanz für A_1 gibt, sodass folgende zwei Bedingungen (gleichzeitig) gelten:

i) $B(I) < r$.

ii) $B(K) = 1$ für eine zulässige Menge $K \subseteq [n]$ mit $|K| = |I|$.

D.h. man soll zeigen, dass die effektive Belegungsrate der von A_1 ausgegebenen Menge I beliebig schlecht werden kann, obwohl es eine weitere optimale Lösung mit einer perfekten effektiven Belegungsrate gibt.

Aufgabe 1.3 (4 Punkte)
Für eine Funktionenklasse M ist $O(M)$ dasselbe wie $\bigcup_{f \in M} O(f)$ (gleiches gilt für Ω, ω, Θ). Zeige oder widerlege die folgenden Aussagen:

a) $\forall c \in \mathbb{N} : 2^{cn} = O(2^n)$.

b) $\forall f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gilt $\omega(\Theta(f)) = \Theta(\omega(f))$.

c) $\forall f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gilt $g = O(f) \cup \Omega(f)$.

Aufgabe 1.4 (4 Punkte)
Gib ein RAM–Programm an, das folgende Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ berechnet:

$$f(n) := \begin{cases} \lceil \log_2(n) \rceil, & \text{falls } n > 0 \\ -1, & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Eingabe n ist in $S[0]$ gespeichert. Das Ergebnis soll am Ende in $S[1]$ stehen.
Kommentiere dein Programm ausreichend!