Rekursionsgleichungen vom Typ „Divide&Conquer“

Folgende Rekursionsgleichung modelliert den Zeitaufwand einer rekursiven Prozedur bei Aufteilung eines Problems der Größe n in a Teilprobleme der Größe n/c:

$$T(n) = aT(n/c) + bn \text{ und } T(1) = b \ .$$

Term bn repräsentiert die Anzahl der Rechenschritte zum Aufteilen des Problems in Teilprobleme und zum Zusammenfügen der Teillösungen zu einer Gesamtlösung (Annahme eines „linearen Overhead“). Term $aT(n/c)$ repräsentiert die Anzahl der Rechenschritte zum Lösen der Teilprobleme.

Die Rekursionsgleichung hat die Lösung

$$T(n) = \begin{cases} \theta(n), & \text{falls } a < c, \\ \theta(n \log n), & \text{falls } a = c, \\ \theta(n^{\log_c a}), & \text{falls } a > c. \end{cases}$$

Beweis durch Expandieren der Rekursion

Wir setzen der Einfachheit halber $n = c^k$ voraus. Mit $r = a/c$ ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= aT(n/c) + bn \\
&= a(aT(n/c^2) + bn/c) + bn = a^2T(n/c^2) + (r+1)bn \\
&= a^2(aT(n/c^3) + bn/c^2) + (r+1)bn = a^3T(n/c^3) + (r^2+r+1)bn \\
&\dots \\
&= a^kT_{n/c^k} + (r^{k-1} + \cdots + r + 1)bn = bn \cdot \sum_{i=0}^{k} r^i \ ,
\end{aligned}
$$

wobei $a^kT_{n/c^k} = a^kT_1 = a^kb = (a/c)^kbn = bnr^k$ ausgenutzt wurde. Für $a = c$ ergibt sich wegen $r = 1$ die Lösung $(k+1)bn = \theta(n \log n)$. Für $a < c$ ergibt sich wegen $r < 1$ die Lösung $T(n) = \theta(n)$, da $\sum_{i \geq 0} r^i = 1/(1-r)$ (geometrische Reihe). Für $a > c$ ergibt sich die Lösung

$$T(n) = bn\frac{r^{k+1}-1}{r-1} = \theta(nr^k) = \theta(a^k) = \theta(a^{\log_c n}) = \theta(n^{\log_c a}) \ .$$

Anwendungsbeispiele

Die Laufzeit der rekursiven Prozedur MERGESORT läßt sich abschätzen durch die Rekursionsgleichung

$$T(n) = 2T(n/2) + bn \text{ und } T(1) = b \ .$$

Somit gilt $T(n) = \theta(n \log n)$.

Bei der Multiplikation großer Zahlen benötigten wir beim naiven Verfahren 4 Aufrufe auf Zahlen der halben Bitlänge, wohingegen ein raffinierteres Verfahren nur 3 solche Aufrufe benötigte. Dies führte im ersten Fall auf die Rekursion $T_1(n) = 4T_1(n/2) + bn$ mit Lösung $T_1(n) = \theta(n^{\log 4}) = \theta(n^2)$ und im zweiten Fall auf die Rekursion $T_2(n) = 3T(n/2) + bn$ mit Lösung $T_2(n) = \theta(n^{\log 3}) = \theta(n^{1.58\ldots})$.