Aufgabe 3.1 (4 Punkte)
Wir betrachten die in der Vorlesung vorgestellte 1-universelle Klasse H^{SP} mit $m = 13$ und $k = 4$. Gegeben seien zudem die Einträge $e_1, \ldots, e_9$ mitsamt ihrer Schlüssel, die in der nachfolgenden Tabelle aufgeführt sind.

e_i	key(e_i)
e_1	(2,4,5,1)
e_2	(1,2,2,3)
e_3	(5,2,0,7)
e_4	(2,0,3,1)
e_5	(1,0,0,2)
e_6	(6,3,1,0)
e_7	(2,2,1,3)
e_8	(2,6,7,0)
e_9	(2,0,3,1)

a) Berechne den Parameter w und gebe die Mengen an, aus denen die Zahlentupel a und die Schlüssel x jeweils gewählt werden dürfen.

b) Betrachte nun die Hashfunktion $h_{\boldsymbol{a}} \in H^{SP}$ mit $\boldsymbol{a} = (4, 11, 2, 0)$. Berechne alle Hashwerte der Einträge $e_1, \ldots, e_9$.

c) Füge die Einträge $e_1, \ldots, e_9$ in der gegebenen Reihenfolge mittels Hashing mit Verkettung in eine Hashtabelle geeigneter Länge ein. Stelle die entstehende Hashtabelle mitsamt ihrer verketteten Listen graphisch dar.

d) Nenne unter den neun gegebenen Einträgen diejenigen, für die die Suche maximale Zeit benötigt. Begründe kurz deine Antwort.

Aufgabe 3.2 (4 Punkte)
Betrachte eine Hashtabelle der Größe $m = 11$ mit linearem Sondieren und Hashfunktion $h(x) = x \mod m$.

a) Füge die Schlüssel 10, 22, 31, 4, 15, 28, 17, 88, 59 in dieser Reihenfolge in die Hashtabelle ein.

b) In der Vorlesung wurden für das Hashing mit linearem Sondieren zwei Alternativen zur Durchführung des Löschens von Einträgen besprochen (Markierung als gelöscht oder Verschieben von Einträgen). Gebe für beide Möglichkeiten jeweils die Hashtabelle an, die aus dem Löschen des Schlüssels 4 aus der aus Teilaufgabe a) resultierenden Hashtabelle entsteht.

Aufgabe 3.3 (4 Punkte)
In dieser Aufgabe betrachten wir perfektes Hashing. Sei H^{SP} die in der Vorlesung vorgestellte 1-universelle Klasse von Hash-Funktionen mit $m = 7$ und $k = 2$. Sei $S = \{(0,3),(2,2),(3,2),(2,3),(1,0),(2,0)\}$ die Schlüsselmenge, die eingefügt werden soll.

a) Benutze die Hashfunktion $h := h_{\boldsymbol{a}} \in H$ mit $\boldsymbol{a} = (5,1)$, um die Schlüsselmenge S in Teilmengen B_ℓ $(0 \leq \ell < m)$ zu zerlegen. Was ist die Anzahl von Kollisionen $C(h)$?

b) Berechne für jede Teilmenge B_ℓ die Größe m_ℓ der entsprechenden Hashtabelle.

c) Betrachte folgende Werte von $\boldsymbol{a}$:

$$A = \{(2,3),(1,4),(0,6),(4,5)\}.$$

Berechne $h_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})$ für alle $\boldsymbol{a} \in A$ und $\boldsymbol{x} \in B_3$. Für welche $\boldsymbol{a} \in A$ ist $h_{\boldsymbol{a}}$ eine geeignete Hashfunktion für B_3?

Aufgabe 3.4 (4 Punkte)
Zwei Hashfunktionen $h, h' : K \to \{1, \ldots, m\}$ heißen *unabhängig*, falls für zwei zufällig gewählte Schlüssel $x, y \in K$ gilt:

$$\Pr\left(h(x) = h(y)\right) = \frac{1}{m}, \quad \Pr\left(h'(x) = h'(y)\right) = \frac{1}{m}$$

$$\Pr\left(h(x) = h(y) \wedge h'(x) = h'(y)\right) = \frac{1}{m^2}$$

Gebe ein K und m mit $1 < m < |K|$ sowie ein Paar h, h' von unabhängigen Hashing-Funktionen an. Beachte, dass m beliebig groß sein darf. Beweise die Unabhängigkeit. *Tipp:* Verwende ein K der Größe m^2.