Aufgabe 7.1 (4 Punkte)
Die Werte $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ mit den Wahrscheinlichkeiten $q_0 = q_2 = q_4 = \frac{1}{18}, q_1 = q_3 = 0$ und $p_1 = \frac{1}{6}, p_2 = \frac{1}{3}, p_3 = \frac{1}{9}, p_4 = \frac{2}{9}$ seien gegeben. Erzeugen Sie einen optimalen binären Suchbaum mit dem Algorithmus aus der Vorlesung. Geben Sie alle w_{ij}, c_{ij} und r_{ij} an.

In den folgenden drei Aufgaben wird die Implementation der UNION-FIND-Datenstruktur auf Basis von Bäumen mit den zwei aus der Vorlesung bekannten Tricks verwendet (soweit nicht anders angegeben).

Aufgabe 7.2 (4 Punkte)
Gegeben seien die Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_9$, die jeweils das Element $1, 2, \ldots, 9$ enthalten, d. h. zu Beginn gelte $M_i = \{i\}$ für alle $1 \leq i \leq 9$.

a) Stellen Sie die veränderten Bäume nach jeder der folgenden Operationen dar:

   UNION(1,2,1), UNION(7,6,7), UNION(4,3,6), UNION(9,8,8), UNION(7,8,7), UNION(6,1,8), UNION(8,7,4)

b) Führen Sie die Operation FIND(9) auf der UNION-FIND-Baumstruktur aus a) aus und stellen Sie den veränderten Baum dar.

c) Führen Sie die Operation FIND(8) auf der UNION-FIND-Baumstruktur aus a) aus und stellen Sie den veränderten Baum dar.

Hinweis: Falls bei einem Aufruf UNION(i,j,k) die Mengen M_i und M_j gleich groß sind, fügen Sie bitte M_j an die Wurzel von M_i an, um eine eindeutige Lösung zu gewährleisten.

Aufgabe 7.3 (4 Punkte)
Gegeben seien UNION-FIND-Baumstrukturen, bestehend aus 1000 einelementigen Mengen. Auf diesen werden beliebig viele der Operationen UNION und FIND ausgeführt. Welche Höhe kann maximal erreicht werden? Skizzieren Sie einen Baum mit maximaler Höhe.

Hinweis zur Zählweise: Eine einelementige Menge möge die Höhe 0 haben.

Aufgabe 7.4 (4 Punkte)
Gegeben seien UNION-FIND-Baumstrukturen, bestehend aus n einelementigen Mengen $\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}$. Die Prozedur FIND führe nun keine Pfadkompression (Trick 2) mehr durch. Zeigen Sie, dass durch eine Folge von UNION-Aufrufen der Fall eintreten kann, dass die n FIND-Aufrufe FIND(1), FIND(2), ..., FIND(n) insgesamt $\Omega(n \log n)$ Zugriffe erfordern.

Abgabe: Lösungen können jeweils bis zum folgenden Dienstag um 12:00 Uhr in die Kästen vor NA 02/257 (Nähe Rechenzentrum Servicecenter) *nach Aufgaben getrennt* eingeworfen werden. Geben Sie ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Gruppe an. Auf jedem abgegebenen Aufgabenzettel dürfen bis zu drei Namen stehen.