Hans U. Simon
Björn Schuster
Malte Darnstädt

Bochum, den 26.01.2015
Abgabe: 02.02.2015 (bis 16 Uhr)

Übungen zur Vorlesung

Diskrete Mathematik

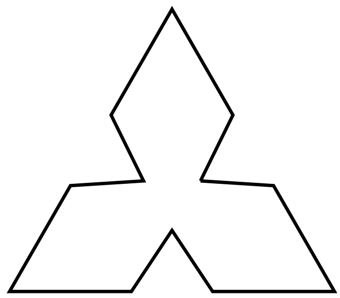
WS 14/15

Übungsblatt 13

Hinweis: Für jede der Aufgaben ist eine vollständige mathematische Argumentation verlangt.

Aufgabe 13.1 Die *Symmetriegruppe* eines geometrischen Objektes besteht aus der Menge aller Kongruenzabbildungen (Drehungen, Spiegelungen an Achsen, Verschiebungen und Kombinationen daraus), die das Objekt auf sich selbst abbilden. Die Gruppenoperation ist die Verkettung von Abbildungen.

Beispiel: Eine Kongruenzabbildung des Sterns rechts ist die Drehung um 120° im Uhrzeigersinn. Die Verknüpfung der 120°-Drehung mit sich selbst ist die Drehung um 240°.



a) Bestimme alle Elemente der Symmetriegruppe des Sterns (du musst nicht zeigen, dass es sich tatsächlich um eine Gruppe handelt).

b) Bestimme die Inversen und die Ordnung von allen Elementen.

c) Zeige, dass die Menge D der Drehungen um 0, 120 und 240 eine Untergruppe von G bildet. Bestimme die Linksnebenklassen von D in G.

Aufgabe 13.2 Wir wollen die Seiten eines Tetraeders mit zwei verschiedenen Farben färben. Wir betrachten den Tetraeder als im Raum frei beweglich und identifizieren Färbungen, die sich durch Drehungen ineinander überführen lassen. Bestimme mit Hilfe des Lemmas von Burnside, wie viele verschiedene (paarweise nicht ineinander überführbare) Färbungen es gibt.

Aufgabe 13.3 In einem Lehrbuch findet sich die Aufgabe, alle unter Isomorphie unterschiedlichen Gruppen der Ordnung 6 zu bestimmen. In der Musterlösung werden folgende drei Gruppen angegeben:

- $\mathbb{Z}_6$
- $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ (mit der komponentenweisen Addition)
- $\mathfrak{S}_3$ (die symmetrische Gruppe über drei Elementen)

Zeige, dass diese Lösung falsch ist.