Hans U. Simon
Björn Schuster
Malte Darnstädt

Bochum, den 19.01.2015
Abgabe: 26.01.2015 (bis 16 Uhr)

Übungen zur Vorlesung
Diskrete Mathematik
WS 14/15
Übungsblatt 12

Hinweis: Für jede der Aufgaben ist eine vollständige mathematische Argumentation verlangt.

Aufgabe 12.1 Sei auf $A := \{a, b, c, d\}$ eine Verknüpfung $\circ$ folgendermaßen definiert:

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	d	b	d
c	c	b	a	d
d	d	d	d	d

a) Zeige, dass $(A, \circ)$ ein abelsches Monoid ist.

b) Warum ist $(A, \circ)$ keine Gruppe? Welche Elemente in A besitzen Linksinverse bzw. Rechtsinverse bzw. Inverse?

Aufgabe 12.2 Sei $X \neq \emptyset$ eine beliebige Menge, $S \in \{\mathbb{N}_+, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}\}$ und A die Menge der Abbildungen von X nach S:

$$A := \{f \mid f : X \to S\}$$

Wir definieren auf A eine Verknüpfung $+$ durch

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \text{ für alle } x \in X$$

Bestimme bei jeder der drei Möglichkeiten für S, ob $(A, +)$ eine Gruppe, ein Monoid und/oder eine Halbgruppe ist.

Aufgabe 12.3 Bestimme die Inversen und Ordnungen aller Elemente von $(\mathbb{Z}_{20}^*, \cdot)$. Untersuche, ob die Gruppe zyklisch ist (mit Begründung), und gib alle möglichen Untergruppen an.

Aufgabe 12.4 Sei G eine Gruppe. Zeige:

a) Die Abbildung $\varphi : G \to G$ mit $\varphi(a) = a^2$ ist genau dann ein Homomorphismus, wenn G abelsch ist

b) Die Abbildung $\varphi : G \to G$ mit $\varphi(a) = a^{-1}$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn G abelsch ist

   Hinweis: In allen Gruppen gilt $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$

Hinweis zur Klausur:
Folgende Anmerkungen sind im Buch und den Vorlesungsfolien bei Mitnahme zur Klausur erlaubt:

- Hervorhebungen (Textmarker, Unterstreichungen, etc.)
- Lesezeichen
- kurze Randnotizen, die sich auf den konkreten Inhalt des Buches/der Folie beziehen (insbesondere neue Inhalte, wie Lösungen zu Hausaufgaben, sind ausgeschlossen)