Hans U. Simon
Björn Schuster
Malte Darnstädt

Bochum, den 24.01.2014
Abgabe: 04.02.2014 (bis 10:00 Uhr)

Übungen zur Vorlesung
Diskrete Mathematik
WS 13/14
Übungsblatt 12

Erinnerung: Die Klausur findet am 13. März 2014 statt. Studierende der Mathematik können sich ab dem ersten Februar per VSPL anmelden.

Hinweis: Für jede der Hausaufgaben ist eine vollständige mathematische Argumentation verlangt.

Aufgabe 12.1 Die *Symmetriegruppe* eines geometrischen Objektes besteht aus der Menge aller Kongruenzabbildungen (Drehungen, Spiegelungen an Achsen, Verschiebungen und Kombinationen daraus), die das Objekt auf sich selbst abbilden. Die Gruppenoperation ist die Verkettung von Abbildungen.
Wir betrachten die Symmetriegruppe G eines Quadrats, dessen Ecken wir im Uhrzeigersinn mit a, b, c, d bezeichnen. Bezeichne t die Drehung um 90° im Gegenuhrzeigersinn und s die Spiegelung an der Geraden durch a und c.

a) Bestimme die Ordnungen von t und s und zeige $sts^{-1} = t^{-1}$.

b) Bestimme die Ordnungen von $t^k s^\ell$, $k \geq 0$, $\ell \geq 0$.

c) Zeige, dass jedes Element von G von der Form $t^k s^\ell$, $k, \ell \in \mathbb{N}_0$, ist, und bestimme die Ordnung von G.

Aufgabe 12.2 Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und a, b zwei beliebige Elemente.

a) Widerlege mit einem konkreten Beispiel folgende Aussage:

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $(ab)^n = a^n b^n$

b) Zeige folgende Aussage:

G ist abelsch $\iff$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $(ab)^n = a^n b^n$

Aufgabe 12.3 Sei $G = \langle a \rangle$ eine durch a erzeugte zyklische Gruppe mit $|G| = 30$. Bestimme alle Untergruppen von G.

Aufgabe 12.4 Wir wollen die Seiten eines Tetraeders mit zwei verschiedenen Farben färben. Wir betrachten den Tetraeder als im Raum frei beweglich und identifizieren Färbungen, die sich durch Drehungen ineinander überführen lassen. Bestimme mit Hilfe des Lemmas von Burnside wie viele verschiedene (paarweise nicht ineinander überführbare) Färbungen es gibt.