Hans U. Simon
Björn Schuster
Malte Darnstädt

Bochum, den 17.01.2014
Abgabe: 28.01.2014 (bis 10:00 Uhr)

Übungen zur Vorlesung
Diskrete Mathematik
WS 13/14
Übungsblatt 11

Hinweis: Für jede der Hausaufgaben ist eine vollständige mathematische Argumentation verlangt.

Aufgabe 11.1 Sei auf $A := \{a, b, c, d\}$ eine Verknüpfung $\circ$ folgendermaßen definiert:

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	c	d
c	c	c	d	d
d	d	d	d	d

a) Zeige, dass $(A, \circ)$ ein abelsches Monoid ist.

b) Warum ist $(A, \circ)$ keine Gruppe? Welche Elemente in A besitzen Linksinverse bzw. Rechtsinverse bzw. Inverse?

Aufgabe 11.2 Sei $S \in \{\mathbb{N}_+, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}\}$ und A die Menge der Abbildungen von S nach S:

$$A := \{f \mid f : S \to S\}$$

Wir definieren auf A eine Verknüpfung $+$ durch

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \text{ für alle } x \in S$$

Bestimme bei jeder der drei Möglichkeiten für S, ob $(A, +)$ eine Gruppe, ein Monoid und/oder eine Halbgruppe ist.

Aufgabe 11.3 Sei $H = (\mathbb{Z}_8, \cdot, \text{addinv})$, wobei '$\cdot$' die gewöhnliche Multiplikation in $\mathbb{Z}_8$ und 'addinv' das additive Inverse in $\mathbb{Z}_8$ darstellt:

$$\text{addinv}(x) := -x \mod 8$$

Sei $I = (A, \circ, \triangleleft)$, wobei A und der Operator $\circ$ wie in Aufgabe 1 definiert sind. Für den Operator $\triangleleft$ gilt:

x	a	b	c	d
$\triangleleft(x)$	b	a	c	d

a) Was sind die Signaturen der Algebren H und I?

b) Betrachte folgende Abbildung φ von A nach $\mathbb{Z}_8$

x	a	b	c	d
$\varphi(x)$	1	7	4	0

Ist φ ein Algebra-Homomorphismus zwischen I und H? Ist φ sogar ein Monomorphismus, Epimorphismus oder Isomorphismus?

c) Gib eine Unteralgebra von H an.

Aufgabe 11.4

a) Finde eine abelsche Gruppe mit vier Elementen, die nicht isomorph zu $(\mathbb{Z}_4, +)$ ist:
   (i) Zeige, dass deine Gruppe die Definition einer abelschen Gruppe erfüllt.
   (ii) Zeige, dass es keinen Isomorphismus zwischen deiner Gruppe und $(\mathbb{Z}_4, +)$ gibt.

b) Zeige, dass dies alle Gruppen der Ordnung vier sind.